

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ
(ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΡΘΡΩΝ)
https://archive.org/details/@mks75
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β
2024
A
B
C
1
2
3
E
D
F
G
H
y=x^2
a(bxc)

ΣΥΛΛΟΓΗ

ΑΡΘΡΩΝ

ΑΠΟ ΤΟ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β

Της ΕΜΕ

ΓΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥΣ

&

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

(ΜΚ.2024)

η στήλη των ολυμπιάδων

ο λόγος του αντιπροέδρου της ε.μ.ε. καθηγ. Θ. Εξαρχάκου κατά την τελετή της απονομής των βραβείων της 1ης Ελληνικής Ολυμπιάδας

Μέσα στην πορεία της ανθρώπινης ιστορίας τα Μαθηματικά αποτελούν έναν απέραντο κόσμο αρμονίας, θαυμάτων κι εκπλήξεων, καθώς πορεύονται συντροφικά με τον άνθρωπο, πότε προσφέροντάς του απλόχερα πνευματική και ψυχική καλλιέργεια και βοηθώντας τον να βαδίσει πιο ομαλά το δύσκολο δρόμο του, πότε ζητώντας τη βοήθειά του για να μεταμορφωθούν σε άλλες, πιο εξελιγμένες μορφές.

Αν ερευνήσουμε το παρελθόν κι αναλύσουμε ένα προς ένα τα διαδοχικά στάδια απ' τα οποία πέρασε κατά την εξέλιξή της η Μαθηματική Επιστήμη από τον παλαιολιθικό πρωτόγονο μέχρι σήμερα, θα διαπιστώσουμε ότι κάθε νέα φάση στην εξέλιξη της ζωής του ανθρώπου αρχίζει πάντα με μια κατάκτηση των Μαθηματικών. Δεν υπάρχει εποχή και περιοχή της γης, που να καμαρώνει για την πρόοδο και τον πολιτισμό της, χωρίς να παραδέχεται πως στυλοβάτης της σ' αυτή την ανάβαση υπήρξαν τα Μαθηματικά.

Οι Πυθαγόρειοι δίδασκαν ότι αρχή και αίτιο του κόσμου είναι ο αριθμός και η μαθηματική σχέση και πως όλα τα πράγματα έχουν μέσα τους φωλιασμένους τους αριθμούς. «Κάθε τι που έχει υπόσταση στη ζωή, στον ουρανό και τη γη, είναι αριθμός», έλεγαν. «Οι αριθμοί διέπουν τις κινήσεις των άστρων, καθώς το σύμπαν έχει διαταχθεί κατά αριθμητικές σχέσεις και αναλογίες. Οι αριθμοί είναι πραγματικότητες με ηθικές ιδιότητες, είναι ένας κόσμος πνευματικών ουσιών που αποτελούν βασίλειο αμετάβλητο κι αιώνιο».

Κατά τον Πλάτωνα ύλη, χάος, κόσμος, ψυχή, κατασκευάστηκαν κι ανασκευάστηκαν από το χέρι ενός θεού γεωμέτρη. Στο διάλογό του «Τίμαιος» τα τέσσερα στοιχεία της ύλης, η φωτιά, ο αέρας το νερό και η γη, ανάγονται σε τέσσερα καθορισμένα γεωμετρικά σχήματα: Στο τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και το εξάεδρο αντίστοιχα.

Πραγματικά, τα Μαθηματικά είναι το πλαίσιο, μέσα στο οποίο περιλαμβάνονται όλα τα φαινόμενα της φύσης. Αντικαθιστούν μια έννοια μ' έναν αριθμό, μια σχέση με μια εξίσωση, ένα συλλογισμό μ' ένα υπολογισμό. Η χρησιμότητα κι η εφαρμογή τους στην ανθρώπινη ζωή είναι τεράστια. Στις επιστήμες ό,τι θετικό έχει γίνει μέχρι τώρα έχει ως βάση τις Μαθηματικές ανακαλύψεις.

Αυτές έδωσαν την ευκαιρία στην Τεχνολογία να καλπάσει με τεράστια άλματα και έστειλαν τον άνθρωπο στο διάστημα για να το ερευνήσει. Στις εικαστικές τέχνες, η Γεωμετρία αποτελεί ένα αναπόσπαστο σύμπλεγμα με την Τέχνη. Η αρχιτεκτονική σύλληψη, η Γλυπτική κι η Ζωγραφική υλοποιούνται πάντοτε με τη βοήθεια του ρυθμού, της αναλογίας και της αρμονίας. Μουσική και Μαθηματικά είναι στενοί συγγενείς. «Η Μουσική, όπως έλεγε ο Γάλλος Φλαμαριόν, έχει γίνει ολόκληρη από αριθμό».

Τα Μαθηματικά βοηθούν τον άνθρωπο στις ανάγκες της καθημερινής ζωής, επεμβαίνουν παντού, χρησιμοποιούνται απ' όλα τα κοινωνικά στρώματα και καθορίζουν —χωρίς αυτό να είναι πάντοτε φανερό— κάθε μας συναλλαγή. Με τις μαθηματικές ανακαλύψεις ο άνθρωπος ικανοποιεί τις βιοτικές του ανάγκες και καλυτερεύει συνεχώς τη ζωή του κάνοντάς την πιο άνετη και περισσότερο «ανθρώπινη».

Πέρα απ' όλα αυτά όμως ανυπολόγιστη είναι η προσφορά των Μαθηματικών στην πνευματική και ψυχική καλλιέργεια του ανθρώπου. Γι' αυτό και στη διάρκεια της μακραίωνης ιστορίας τους είχαν ξεχωριστή θέση στα προγράμματα των σχολείων όλων των προηγμένων κρατών και θεωρούνταν ως το μάθημα που ήταν κατάλληλο για να οξύνει τη διάνοια.

Ο Πλάτωνας θεωρούσε τα Μαθηματικά βασικό προπαιδευτικό μάθημα κάθε επιστήμης. Κανένα μάθημα, έλεγε, δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το σπουδαιότερο που κάνει, είναι ότι αυτόν που από τη φύση του νυστάζει τον ξυπνάει και τον κάνει να έχει δεκτικότητα στη μάθηση, μνήμη και οξύτητα πνεύματος.

Θα τολμούσαμε να πούμε ότι η διδασκαλία των

Μαθηματικών στις διάφορες βαθμίδες εκπαίδευσης δεν είναι μόνο απαραίτητη, αλλά και καθοριστικής σημασίας.

Αφού λοιπόν τόσο πολύτιμη κι αναμφισβήτητη είναι η προσφορά και η αξία των Μαθηματικών, γιατί αυτή η φοβία κι η απέχθεια τόσων μαθητών προς το μάθημα; Γιατί βέβαια είναι κοινό μυστικό ότι τα Μαθηματικά είναι από τα λιγότερο δημοφιλή μαθήματα των σχολείων. Ο πολύς κόσμος με τραυματικές ίσως εμπειρίες από τη θητεία του στα θρανία, τα αντιπαθεί, τα φοβάται και τα αποφεύγει. Πολλοί τα αντιλαμβάνονται σα μια σκοτεινή, πολύπλοκη και βασανιστική επιστήμη που ασχολείται με ανιαρούς υπολογισμούς και με άχαρους αριθμούς ή γράμματα, που συνδέονται μεταξύ τους με ένα παράξενο τρόπο. Είναι γι' αυτούς το σφουγγάρι που απορροφά την ικμάδα της μαθητικής ζωής.

Που οφείλεται λοιπόν αυτή η περιφρόνηση στη μεγάλη προσφορά των Μαθηματικών;

Η αναζήτηση των αιτίων και η εξέτασή τους σε βάθος δεν είναι θέμα που αναπτύσσεται κι αναλύεται στα περιθώρια μιας λιγόλεπτης ομιλίας.

Πολύ σύντομα όμως θα μπορούσαμε να πούμε ανεπιφύλακτα ότι τα Μαθηματικά τα φοβούνται και τα αποστρέφονται όσοι δεν μπόρεσαν να τα γνωρίσουν, να τα πλησιάσουν, όσοι δεν τ' αγάπησαν και δεν αισθάνθηκαν την ομορφιά και τη γοητεία τους.

Δεν είναι οι ίδιοι υπεύθυνοι γι' αυτό ωστόσο. Υπάρχουν πλήθος από παράγοντες που συντελούν στη δυσκολία κατανόησης των Μαθηματικών.

Τα διδακτικά βιβλία για παράδειγμα, δεν ήταν πάντα τα πιο κατάλληλα. Κι ένα βιβλίο με απρόσεκτη διάταξη της ύλης, κενά, άστοχα παραδείγματα, κακή γλωσσική διατύπωση, επιστημονικά σφάλματα, αντιπαιδαγωγική παρουσίαση των εννοιών, κάθε άλλο παρά ενδιαφέρον προκαλεί. Ενώ ένα καλό βιβλίο, προσεγμένο στο σύνολο και στα μέρη του μπορεί να γίνει ο αγαπημένος βοηθός του μαθητή.

Τα αναλυτικά προγράμματα επίσης έχουν μεγάλη ευθύνη γι' αυτή τη φοβία. Πρόχειρα αναλυτικά προγράμματα έχουν ως συνέπεια τη συγγραφή κακών βιβλίων. Επίσης ύλη που υπερτιμάει ή υποτιμάει τη μέση νοημοσύνη της ηλικίας των μαθητών στους οποίους απευθύνεται δημιουργεί αισθήματα αποστροφής προς το μάθημα.

Αλλά και μεις οι Μαθηματικοί, πρέπει να το παραδεχτούμε, μόνοι μας κάνουμε τις πιο πολλές φορές το μάθημα δύσκολο. Άλλοτε γιατί δεν κατέχουμε απόλυτα τα μυστικά της επιστήμης μας, άλλοτε γιατί δεν κρίνουμε σωστά σε ποιον τομέα του είναι των μαθητών μας απευθυνόμαστε, άλλοτε γιατί δεν γνωρίζουμε την τεχνική να ενεργοποιήσουμε το έμψυχο υλικό μας και να του εμφυσήσουμε το ενδιαφέρον και την αγάπη γι' αυτό που τους διδάσκουμε.

Ο σωστός δάσκαλος φροντίζει να αποκτήσει σφαιρική αντίληψη και βαθιά κατανόηση στις λεπτομέρειες του συνόλου της ύλης που έχει να διδάξει όλο το χρόνο. Φροντίζει να παρακολουθεί τις εξελίξεις της επιστήμης του. Ακολουθεί κάποιες παιδαγωγικές αρχές. Κρατά πάντα στο μυαλό του ότι απευθύνεται σε έμψυχους δέκτες και μάλιστα, ότι δεν απευθύνεται αποκλειστικά στη νόηση των μαθητών του, αλλά και στην ψυχή τους. Ο ρόλος του δεν είναι απλά και μόνο να τους προσφέρει κάποιο υλικό γνώσεων, αλλά και να τους ασκήσει στη δημιουργική εργασία, να τους καλλιεργήσει το πνεύμα της συνεργατικότητας, να τους κάνει να αισθάνονται ελεύθεροι να προβάλλουν τις αντιρρήσεις τους, να τους βοηθήσει να ξεκαθαρίσουν μέσα τους πολλές έννοιες που τους απασχολούν, να τους δώσει όλες εκείνες τις παραμέτρους που θα τους κάνουν ν' αγαπήσουν το μάθημα, ν' ασχοληθούν μ' αυτό και ν' ανακαλύψουν τις ομορφιές του.

Με τον τρόπο αυτό θα τους δώσει ίσως τη διάθεση και τα μέσα ν' αποκτήσουν πρωτοβουλία σκέψης. Έτσι, αν ένα πρόβλημα προκαλέσει την περιέργεια και θέσει σε ενέργεια τις εφευρετικές ικανότητες του μαθητή και το λύσει μόνος του με δικά του μέσα, θα δοκιμάσει ένα αίσθημα τέτοιας θριαμβευτικής χαράς κι έντασης, που προσφέρει μόνο η ανακάλυψη κάτι καινούργιου. Ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να γίνει τόσο διασκεδαστικό, όσο κι ένα παιχνίδι και η εντατική πνευματική εργασία μπορεί να είναι μια άσκηση τόσο επιθυμητή, όσο μια παρτίδα σκάκι.

Αυτές οι εμπειρίες στην κρίσιμη ηλικία, μπορούν να δημιουργήσουν διάθεση για παραπέρα πνευματική εργασία. Αν ο μαθητής γνωρίσει την ευχαρίστηση που προσφέρουν τα Μαθηματικά, δε θα μπορέσει να την ξεχάσει εύκολα και υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το γεγονός αυτό να παίξει ένα σημαντικό ρόλο στη ζωή του.

Σε τέτοιους στόχους αποβλέπουν, μεταξύ άλλων, και οι διαγωνισμοί της Μαθηματικής Εταιρείας. Η φιλοσοφία τους είναι να δώσουν κίνητρα στο μαθητόκοσμο της χώρας να ενδιαφερθεί για τα Μαθημα-

τικά, να γνωρίσει τη χαρά της προσπάθειας και της ευγενούς άμιλλας και να προετοιμαστεί γι' αυτήν.

Αυτή ακριβώς η διαδικασία της προετοιμασίας είναι και ο ουσιαστικότερος στόχος των διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. Γιατί κάνει το μαθητή να ταξινομήσει τις γνώσεις του, να κατανοήσει τις Μαθηματικές έννοιες, να τις ιεραρχήσει, να εμβαθύνει σ' αυτές, να 'ρθει πιο κοντά στη μαθηματική σκέψη, να δοκιμάσει τη γοητεία της ανακάλυψης νέων πραγμάτων και να αγαπήσει το μάθημα.

Παράλληλα, μέσα απ' αυτούς τους διαγωνισμούς θα αποκαλυφτούν πιθανόν κάποια ταλέντα, που θα προωθηθούν στη Βαλκανιάδα και στη Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών, διαγωνισμούς, που σίγουρα θα προκαλέσουν εμπειρίες συγκλονιστικές κι αξέχαστες.

Τους ειδικότερους σκοπούς των διαγωνισμών αυτών θα αναπτύξει ο Γραμματέας της Εξεταστικής Επιτροπής αμέσως μετά.

Εγώ, τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εσάς που παρευρεθήκατε σήμερα στην απονομή των βραβείων και να συγχαρώ τους μαθητές που πρώτευσαν τόσο στον Πανελλήνιο διαγωνισμό, όσο και στην Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα και να τους ευχηθώ να έχουν πάντα νίκες κι επιτυχίες στη ζωή τους και να προσπαθήσουν να μείνουν μέσα στη Μαθηματική κοινότητα.

Κατά τη διάρκεια της τελετής μίλησαν ακόμα, ο Πρόεδρος της Ε.Μ.Ε. καθ. 'Αρης Σισσόρας, ο γραμ. της επιτροπής διαγωνισμών Θ. Μαμούρης και ο συνάδελφος Δ. Κοντογιάννης.

Την ευθύνη για τη διοργάνωση της τελετής είχε ο συνάδελφος Γ. Ωραιόπουλος.

1η ελληνική μαθηματική ολυμπιάδα (1η ε.μ.ο.)

Θ. Εξαρχάκος,
Δ. Κοντογιάννης,
Θ. Μαμούρης,
Γ. Τιρλής

Μια παλιά προσπάθεια της Ε.Μ.Ε. για τη θεσμοθέτηση Μαθηματικής Ολυμπιάδας έγινε φέτος πραγματικότητα.

Στις 16 Μάρτης 1985 διοργανώθηκε στη Ράλλειο Παιδαγωγική Ακαδημία, με απόλυτη επιτυχία η 1η ΕΜΟ.

Πρόκειται για ένα θεσμό που πιστεύουμε προωθεί ακόμη περισσότερο τις χρόνιες προσπάθειες της ΕΜΕ για την αναβάθμιση της παιδείας στην πατρίδα μας. Είναι ένας θεσμός που έλειπε. Κι αυτό γιατί δόθηκε η ευκαιρία στα παιδιά απ' όλη την Ελλάδα που διακρίθηκαν στον Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό (Π.Μ.Δ.) να ζήσουν μερικές μέρες μαζί, ν' ανταλλάξουν απόψεις, να συμμετάσχουν τέλος, συνειδητά σε μια πνευματική αθλητική διαδικασία που τους έδωσε τη δυνατότητα να εκφράσουν τις μαθηματικές τους ανησυχίες, να δημιουργήσουν, σε κοινό χώρο, κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο να γίνει στον Π.Μ.Δ.

Στην 1η Ε.Μ.Ο συμμετείχαν 70 μαθητές της Γ' Λυκείου 10 μαθητές της Α' Λυκείου και εκτός συναγωνισμού ένας μαθητής της Γ' Γυμνασίου στα θέματα της Γ' Λυκείου! Οι μαθητές από τις επαρχίες ήλθαν στην Αθήνα στις εγκαταστάσεις του Ολυμπιακού Σταδίου της Καλογρέζας χάρη στην προσφορά του Υφυπουργείου Νέας Γενιάς το οποίο έχει βοηθήσει σημαντικά τα τελευταία την ΕΜΕ.

Ο διαγωνισμός κράτησε 4 ώρες. Η διόρθωση των γραπτών έγινε από την Επιτροπή των Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. αμέσως μετά τη λήξη του διαγωνισμού.

Αξιοσημείωτο είναι ότι όλα σχεδόν οι μαθητές εξάντλησαν το χρόνο και ότι όλα σχεδόν τα γραπτά ήταν καλά. Οι μαθητές διαγωνίστηκαν με κέφι, δημιούργησαν, δίνοντας πολλές πρωτότυπες και ιδιαίτερα ευφυείς λύσεις.

Διορθώνοντας τα γραπτά η επιτροπή είχε πολλές ευχάριστες εκπλήξεις από τις λύσεις των μαθητών που ενισχύουν την άποψη της ΕΜΕ για την ύπαρξη πολλών μαθηματικών ταλέντων στη χώρα μας.

Η βράβευση έγινε σε ειδική τελετή στα γραφεία της ΕΜΕ την επόμενη μέρα 17 Μάρτη. Παραβρέθηκαν εκπρόσωπος του Υπ. Παιδείας κα-

θηγητές ΑΕΙ, Σχολικοί Σύμβουλοι, εκπρόσωποι των αρχών, συνάδελφοι καθηγητές Μ.Ε., κλπ. Χαιρετισμό στην εκδήλωση απεύθυνε και ο καθηγητής κ. Α. Σισσούρας πρόεδρος της ΕΜΕ.

Οι νικητές είναι οι παρακάτω. Σημειώνεται εδώ ότι εκτός των βραβείων της ΕΜΕ, οι πρώτοι 15 έλαβαν και χρηματικό βραβείο 20 χιλιάδες ο καθένας, από το Υπ. Παιδείας.

1. Χρυσό. Γουνόπουλος Δημήτριος 3ο Λυκ. Ιωαννίνων
2. Χρυσό. Τζερμιάς Παύλος 3ο Λυκ. Ηρακλείου (Γερονυμάκη 32) τηλ. 285727.
3. Χρυσό. Φραντζεσκάκης Κυριάκος Β Λύκειο Νέου Ψυχικού
1. Αργυρό. Μαραντίδης Ισαάκ 1ο Λύκειο Κιλκίς.
2. Αργυρό. Παπαδάτος Νικόλαος Β Λύκ. Μοσχάτου.
3. Αργυρό. Συνοδινός Ιωάννης Κολλέγιο Αθηνών.
1. Χάλκινο. Μπομπολάκης Ζαχαρίας 3ο Λυκ. Χανίων.
2. Χάλκινο. Ντελόπουλος Θανάσης (Βαρβ. πρ. Σχολή).
3. Χαλκινο. Αϊλαπάκη Αναστασία Α' Λύκειο Χανίων.

Έπαινοι

α. Μισούλης Βασίλειος Πρότυπος Ευαγγ. Σχολή.
β. Σταματόπουλος Νικόλαος 4ο Λυκ. Καλλιθέας.
γ. Βεζηργίαννης Μάριος (Λεόντειο Λύκειο Πατησίων.
δ. Σπύρου Ανδρέας (Κολλέγιο Αθηνών).
ε. Ανταχόπουλος Χαράλαμπος Β' Λυκ. Λαμίας.
στ. Σέρελης Ιωάννης (Κολλέγιο Αθηνών).

Ειδικό βραβείο

Κοντοκώστας Δημήτριος (1ο Γυμν. Τρικάλων)
Α' Λυκείου
1. Βραβείο: Τσακαλέρης Ευθύμιος 59ο Λυκ. Αθήνας.
Έπαινος: Κομπότης Ευάγγελος Προτ. Ευαγγλ. Σχολή.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ 1ης ΕΜΟ

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Να βρεθούν όλα τα τόξα θ για τα οποία $\frac{1}{ημ^2θ}$ και $\frac{1}{συν^2θ}$ είναι ακέραιοι αριθμοί και ρίζες της εξίσωσης $x^2 - αx + α = 0$

Θέμα 2ο

α) Να δείξετε ότι ένα κυρτό ν-γωνο δεν μπορεί να έχει περισσότερες από τρεις εσωτερικές γωνίες οξείες.

β) Να δείξετε ότι ένα κυρτό ν-γωνο που έχει τρεις εσωτερικές γωνίες ίσες με 60° είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Θέμα 3ο

Στο εσωτερικό μιας λίμνης υπάρχουν δύο σημεία Α και Β από τα οποία μπορούμε να δούμε κάθε άλλο σημείο της λίμνης. Να δείξετε ότι και από κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μπορούμε να δούμε όλα τα σημεία της λίμνης

Θέμα 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) + f(1 - x) = 1$
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

* Χαρακτηριστικό της ποιότητας των θεμάτων της 1ης ΕΜΟ είναι το γεγονός ότι το 4ο θέμα δόθηκε από τις στήλες του έγκυρου Σοβιετικού περιοδικού «Τα μαθηματικά στο σχολιό» που κυκλοφόρησε το Μάη 1985 ως θέμα του διαγωνισμού που έγινε στην ΕΣΣΔ.

$$f\left(\frac{1}{1986}\right) + f\left(\frac{2}{1986}\right) + \dots + f\left(\frac{1985}{1986}\right) + f\left(\frac{1986}{1986}\right) +$$

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο

Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο. Να δείξετε ότι:

$$E_A\overrightarrow{OA} + E_B\overrightarrow{OB} + E_Γ\overrightarrow{OΓ} = O \quad (1),$$

όπου E_A, E_B, $E_Γ$ τα εμβαδά των τριγώνων ΒΟΓ, ΓΟΒ, ΑΟΒ αντίστοιχα.

Σημείωση: Η σχέση (1) που ισχύει και για τετράεδρα και για μερικά συμπλέγματα του ν-διάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι γνωστή σαν

«σχέση Καραθεοδωρή», γιατί ανακαλύφθηκε και χρησιμοποιήθηκε από τον μεγάλο Έλληνα μαθηματικό Κ. Καραθεοδωρή (1873-1750).

Θέμα 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ που είναι συνεχής. Είναι ακόμα γνωστό, ότι η εξίσωση $f(f(f(f(x)))) = x$ έχει λύση στο R.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει λύση στο R.

Θέμα 3ο

Θεωρούμε την ευθεία Ε:

$$5x - 10y + 3 = 0 \quad (1)$$

Να δείξετε ότι:

α) Η ευθεία Ε δεν περιέχει σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.

β) Δεν υπάρχει σημείο Α (a_1, a_2) με $a_1, a_2 \in Z$, που να απέχει από την ευθεία Ε απόσταση μικρότερη από $\frac{\sqrt{3}}{20}$

Θέμα 4ο

Δίνονται οι διανυσματικοί χώρο v, W με συντελεστές από ένα σώμα Κ και η απεικόνιση $\phi: v \rightarrow W$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y), \forall x, y \in V, \lambda \in K$.

Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται γραμμική. Αν $L\phi = \{x \in v \,/\, \phi(x) = 0\}$ και $M = \phi(v)$, να δείξετε ότι: (i) Lφυπόχωρος του V και M υπόχωρος του W (ii) $L\phi = \{0\}$ αν και μόνο αν η φ είναι 1-1 (iii) Η διάσταση του V ισούται με τη διάσταση του L φ συν τη διάσταση του M (iv) Αν:

$$\Theta: R^3 \rightarrow R^3 \text{ με } \theta(x, y, z) = (2x - z, x > y, x - 3y + z)$$

να δείξετε ότι η θ είναι γραμμική απεικόνιση. Να βρείτε το Lθ και τη διάσταση του $M = \theta(R^3)$. $(L\theta = \{x \in R^3 \,/\, \theta(x) = 0\})$

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ

Τον Ιούνιο του 1985 κυκλοφόρησε ένα βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας γνωστού συγγραφέα χωρίς ημερομηνία έκδοσης, χωρίς βιβλιογραφία και χωρίς πρόλογο. Στο βιβλίο αυτό υπάρχουν ασκήσεις της Επιτροπής Διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε., οι οποίες είχαν δοθεί στον Πανελλήνιο Μαθητικό Διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε. που έγινε την 1η Δεκεμβρίου 1984, χωρίς να αναφέρεται ότι αυτές ήταν ασκήσεις του διαγωνισμού αυτού.

Η Ε.Μ.Ε. εκφράζει τη λύπη της για το γεγονός αυτό και παρακαλεί τους κ.κ. συναδέλφους συγγραφείς να αναφέρουν τις πηγές τους όταν χρησιμοποιούν ασκήσεις από τις εκδόσεις της Ε.Μ.Ε. και από τους διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε., γιατί μπορεί να θεωρηθεί ότι η Ε.Μ.Ε. χρησιμοποιεί στους διαγωνισμούς της ασκήσεις από συγκεκριμένα βιβλία, ενώ είναι γνωστό ότι τα θέματα που δίνονται στους διάφορους διαγωνισμούς της είναι πρωτότυπα και δεν υπάρχουν σε κυκλοφορούντα βιβλία.

ΑΘΛΟΘΕΤΕΣ 1985

1. Κισκύρας Νίκος 5.000

Στη Μνήμη των Γονέων του Ανδρέα και Μεταξίας, του Αδελφού του Ηλία και του Γαμβρού του Νίκου

Του Ιδίου: Δύο σειρές βιβλία του στη Μνήμη των Εκπαιδευτικών Αγωνιστών της Εθνικής Αντίστασης της Δημοκρατίας και της Εθνικής Ανεξαρτησίας στα δύο καλύτερα γραπτά Γεωμετρία της Β' Λυκείου

Αρχηγείο Αστυνομίας Πόλεων 20.000

Ο.Τ.Ε. 20.000

Σταδίου 15 Αθήνα

ΕΛΤΑ 10 Αλμπουμ

Γκούντεμπεργκ Βιβλία αξίας 50.000 (10681 Σόλωνος 103

Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος 40.000

ΓΕΕΘΑ 30.000

Πάλλα Αλίκη 25.000

10. Αλεξάνδρα Χερουβείμ Αμύντα 1 Αθήνα

Στη μνήμη Ιωάννου Χερουβίμ 5.000

11. Θρουμουλόπουλος Λάζαρος

Στη μνήμη του αδελφού του Ηλία και των γονέων του;

Ευκλείδη και Ροδάμης

13. Εμπορική Τράπεζα 20.000

2η βαλκανική μαθηματική ολυμπιάδα

Α. Γαλανός, Δ. Κοντογιάννης, Θ. Μπόλης

Στην ωραία Σόφια έγινε από 4 ως 9 Μάη 1985 η 2η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Β.Μ.Ο.). Η χώρα μας πήρε μέρος με τους μαθητές:

Τζερμιά Παύλο
Μισαύλη Βασίλη
Γουνόπουλο Δημήτρη
Αϊλαμάκη Αναστασία
Φραντζεσκάκη Κυριάκο

Οι μαθητές της ομάδας μας επελέγησαν από τους 10 πρώτους μαθητές της 1ης Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας ύστερα από μια σειρά προπαρασκευαστικών μαθημάτων και διαγωνισμών που έγιναν με πρωτοβουλία της Ε.Μ.Ε. στην Αθήνα το 15-θήμερο των διακοπών του Πάσχα.

Την ευθύνη για τη συγκρότηση της ομάδας είχαν οι συνάδελφοι Θ. Εξαρχάκος (Α΄ αντιπρόεδρος της Ε.Μ.Ε. και πρόεδρος της επιτροπής διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.) και Δ. Κοντογιάννης (υπεύθυνος της προετοιμασίας των μαθητών).

Συνοδούς της Ελληνικής ομάδας όρισε το Υπουργείο Παιδείας ύστερα από πρόταση της Ε.Μ.Ε. τους Α. Γαλανό (από το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε.), τον Δ. Κοντογιάννη και τον καθ. του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Θ. Μπόλη (αρχηγός της αποστολής).

Μπορούμε να πούμε ότι η οργάνωση της 2ης Β.Μ.Ο. όπως άλλωστε και της πρώτης (Αθήνα 1984) ήταν εξαιρετικά επιτυχημένη.

Οι μαθητές και οι συνοδοί φιλοξενήθηκαν σε θαυμάσιους φοιτητικούς ξενώνες σε μια καταπράσινη περιοχή της Σόφιας.

Ακόμα οι διοργανωτές έκαναν ότι ήταν δυνατό για να εξυπηρετήσουν την ομάδα μας.

Στη 2η Β.Μ.Ο. πήραν μέρος τρεις χώρες: Η διοργανώτρια Βουλγαρία, η Ελλάδα και η Ρουμανία.

Για διάφορους λόγους δεν πήραν μέρος η Γιουγκοσλαβία, η Κύπρος και η Τουρκία.

Τη Κυριακή 5 Μάη οι συνοδοί της ελληνικής ομάδας ξενάγησαν τους μαθητές στη Σόφια και έδωσαν δείπνο προς τιμή τους στο ξενοδοχείο Novotel Europa.

Τη Δευτέρα 6 Μάη μετά το πρόγραμμα συνήλθε στο Υπουργείο Παιδείας η διαβαλκανική επιτροπή του διαγωνισμού. Πρόεδρος της επιτροπής ήταν ο καθηγητής του Πανεπιστημίου της Σόφιας και αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας επιστημών της Βουλγαρίας Π. Κεντέρωφ που τον αντιπροσώπευσε ο Ι. Τόνωφ.

Ακόμα μέλη της επιτροπής ήταν οι Τ. Άλμπου (Ρουμανία) και Θ. Μπόλης (Ελλάδα). Τέλος στην επιτροπή αυτή συμμετείχαν οι Δ. Κοντογιάννης (Ελλάδα) και Λ. Νταβίντωφ (Βουλγαρία).

Από τα θέματα που πρότειναν οι χώρες που συμμετείχαν επελέγησαν 4.

Η όλη διαδικασία επιλογής, επίλυσης και επεξεργασίας των θεμάτων κράτησε περίπου 4 ώρες.

Στη συνέχεια τα θέματα μεταφράσθηκαν στις γλώσσες των χωρών που πήραν μέρος και μεταφέρθηκαν στο σχολείο που έγινε ο διαγωνισμός όπου και δόθηκαν στους μαθητές. Κάθε θέμα έπαιρνε 10 μονάδες.

Η διάρκεια του διαγωνισμού ήταν 4 ώρες. Την επόμενη μέρα οι μαθητές πήγαν εκδρομή στην πόλη Πλέβεν, όπου επισκέφθηκαν διάφορα αξιοθέατα. Στους μαθητές και τους συνοδούς των ομάδων δόθηκαν διάφορα αναμνηστικά δώρα και φιλοξενήθηκαν από την Ένωση Μαθηματικών του Πλέβεν.

Το πρωινό της Τετάρτης 8 Μάη έγινε στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Σόφιας η διόρθωση των Γραπτών και το μεσημέρι της ίδιας μέρας συνεδρίασε στο Υπουργείο Παιδείας η επιτροπή διαγωνισμού για την απονομή των βραβείων. Η χώρα μας πήρε ένα πρώτο βραβείο (Π. Τζερμιάς), 3 τρίτα (Μισαύλης, Γουνόπουλος, Αϊλαμάκη) και 2 επαίνους (Μαραντίδης, Φραντζεσκάκης). Η χώρα μας συγκέντρωσε 113 βαθμούς, έναντι 229 της Ρουμανίας και 219 της Βουλγαρίας. Δόθηκαν ακόμα 4 ειδικά βραβεία (ένα για κάθε άσκηση).

Η χώρα μας πήρε ένα ειδικό βραβείο με το μαθητή Π. Τζερμιά για την εξαιρετικά πρωτότυπη λύση που έδωσε για την τέταρτη άσκηση που είχε προτείνει η Ρουμανία.

Βραβεία δόθηκαν και στους συνοδούς της Ελληνικής ομάδας, για την καλή μας εμφάνιση και το αθλητικό πνεύμα της ομάδας μας.

Το απόγευμα έγινε η απονομή των βραβείων κατά τη διάρκεια εκδήλωσης στο μέγαρο των πιονέρων. Η όλη εκδήλωση είχε πλήρη κάλυψη από τον τύπο και την τηλεόραση της Βουλγαρίας. Από ελληνικής πλευράς ο συνάδελφος Θ. Μπόλης σε λόγο του που μεταδόθηκε από τη Βουλγαρική Τηλεόραση μίλησε για το πνεύμα και τη σημασία του θεσμού των Β.Μ.Ο. Το

βράδυ της Τετάρτης η Μαθηματική Εταιρεία της Βουλγαρίας διοργάνωσε αποχαιρετιστήριο γλέντι σε ξενοδοχείο της Σόφιας, όπου ο οίνος έρευσε άφθονος και οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να χορέψουν μέχρι τα μεσάνυχτα.

Μερικά συμπεράσματα τώρα:

Μια πρώτη σύγκριση των αποτελεσμάτων της 1ης και 2ης Β.Μ.Ο. δείχνει, ότι αν και η χώρα μας έκανε μια μικρή βελτίωση, εξακολουθούμε να κατέχουμε την τρίτη θέση στα Βαλκάνια.

Το γεγονός αυτό έχει την απλή εξήγησή του. Πράγματι η χώρα μας βρίσκεται ακόμα στο στάδιο του ερασιτεχνισμού από πλευράς οργάνωσης, εν αντιθέσει με τη Βουλγαρία και τη Ρουμανία που τα αποτελέσματα της 25ης και 26ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας έδειξαν ότι είναι δύο από τις τρεις καλύτερες ομάδες στον κόσμο.

Αντίθετα από πλευράς Ολυμπιακού πνεύματος η ομάδα μας δεν έχει τίποτα να ζηλέψει από τις καλύτερες παραδόσεις του Ολυμπισμού.

Θα αναφέρουμε ένα γεγονός που προκάλεσε τα ευμενή σχόλια των ξένων συναδέλφων: Ούτε ένας μαθητής της Ελληνικής ομάδας μπόρεσε να λύσει την άσκηση που είχε προτείνει η Ελλάδα!!!

Το γεγονός αυτό δείχνει το ήθος της ομάδας μας, που κατά τη γνώμη μας πηγάζει από τους μακροχρόνιους αγώνες της Ε.Μ.Ε. για εκδημοκρατισμό και αναβάθμιση της παιδείας μας. Τα θέματα της 2ης Β.Μ.Ο. είναι τα παρακάτω:

1) Ας είναι O το περίκεντρο του τριγώνου ABC και D το μέσο της AB. Ας είναι E το βαρύκεντρο του τριγώνου ACD. Να δείξετε ότι $CD \perp OE$, αν και μόνο αν $AB = AC$.

(Βουλγαρία, Ι. Τόνωφ).

2) Ας είναι a, b, c, d πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τέτοιοι ώστε:

$$\eta\mu a + \eta\mu\beta + \eta\mu c + \eta\mu d = 1$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu 2a + \sigma\upsilon\nu 2\beta + \sigma\upsilon\nu 2c + \sigma\upsilon\nu 2d \geq \frac{10}{3}.$$

Να δείξετε ότι α, β, c, d $\begin{bmatrix} a & b \\ g & d \end{bmatrix} [0, \frac{\pi}{6})$

(Ρουμανία, Τ. ’Αλμπου).

3) Ας είναι ε ένας άξονας. Τα σημεία του ε με συντεταγμένη της μορφής $19\alpha + 85\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ τα χρωματίζουμε κόκκινα, ενώ όλα τα άλλα σημεία του ε με ακέραιες συντεταγμένες τα χρωματίζουμε πράσινα. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο A του άξονα ε, τέτοιο ώστε, κάθε δύο σημεία B, C με ακέραιες συντεταγμένες και συμμετρικά ως προς το A να έχουν διαφορετικά χρώματα.

(Ελλάδα, Δ. Κοντογιάννης)

4) 1985 άνθρωποι παίρνουν μέρος σε ένα συνέδριο. Σε κάθε ομάδα τριών ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστον δύο που μιλούν την ίδια γλώσσα. Αν κάθε άτομο μιλάει το πολύ πέντε γλώσσες, να αποδείξετε, ότι υπάρχουν τουλάχιστον 200 άτομα στο συνέδριο αυτό που μιλούν την ίδια γλώσσα.

(Ρουμανία, Ε. Πώπ)

Η Ελληνική ομάδα πρότεινε συνολικά 4 ασκήσεις. Οι υπόλοιπες τρεις είναι οι παρακάτω:

5) Να δείξετε, ότι δεν υπάρχουν σημεία με συντεταγμένες ρητούς αριθμούς που ν' ανήκουν στον κύκλο $x^2 + y^2 = 3$.

(Θ. Μπόλης)

6) Ας είναι ε_1, ε_2 δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου, από τα οποία μπορούμε να φέρουμε τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες που να τέμνουν την ε_1 είτε την ε_2.

(Θ. Μπόλης)

7) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 120°$. Ας είναι ΑΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Γ αντίστοιχα και Ι το σημείο τομής των ΑΔ και ΓΕ. Αν Ζ το σημείο τομής των ΒΙ και ΔΕ, να υπολογίσετε τη γωνία ΔΑΖ. (Δ. Κοντογιάννης).

Οι λύσεις των 7 αυτών ασκήσεων θα δημοσιευθούν σε επόμενο τεύχος του περιοδικού.

Γιατί θέλουμε οι αναγνώστες μας να τις μελετήσουν και να μας στείλουν τις δικές τους λύσεις που με χαρά μας θα δημοσιεύσουμε.

η 26η διεθνής μαθηματική ολυμπιάδα

Δ. Κοντογιάννης, Θ. Μπόλης

Η 26η Δ.Μ.Ο. έγινε από 29 Ιούνη ως 10 Ιούλη στις πόλεις Γιόουτσα, Χεϊνόλα και Ελσίνκι της Φιλλανδίας. Στην 26η Δ.Μ.Ο. πήραν μέρος 38 χώρες και μια χώρα (Ινδία) έστειλε παρατηρητή. Στην 25η Δ.Μ.Ο. είχαν πάρει μέρος 34 χώρες. Αξίζει να αναφέρουμε, ότι για πρώτη φορά πήρε μέρος και η Κίνα.

Την Ελληνική ομάδα αποτελούσαν οι μαθητές:
Τζερμιάς Παύλος
Μισούλης Βασίλης
Γουνόπουλος Δημήτρης
Μαραντίδης Ισαάκ
Μπομπολάκης Ζαχαρίας
Συνοδινός Ιωάννης

Συνοδοί της Ελληνικής ομάδας ήταν οι Θ. Μπόλης και Δ. Κοντογιάννης.

Η Ε.Μ.Ε. θέλοντας να προετοιμάσει όσο το δυνατό καλύτερα την Ολυμπιακή ομάδα, εξασφάλισε με τη βοήθεια του Υπουργείου Νέας Γενιάς και Αθλητισμού, τις εγκαταστάσεις του Ολυμπιακού σταδίου. Έτσι για 15 μέρες οι μαθητές μαζί με το συνάδελφο Δ. Κοντογιάννη, έζησαν στο θαυμάσιο περιβάλλον του Ολυμπιακού σταδίου, όπου καθημερινά παρακολουθούσαν μαθήματα που η διάρκεια τους ήταν πολλές φορές και 10 ώρες. Το καθημερινό πρόγραμμα ήταν:

7.30 - 8.30 Πρωινό
8.30 - 1.00 Μάθημα
1.00 - 4.00 Γεύμα και Ανάπαυση
4.00 - 8.30 Μάθημα
8.30 - 9.00 Δείπνο
9.00 - 11.00 Ελεύθερος χρόνος.

Εκτός από το συνάδελφο Δ. Κοντογιάννη που έκανε το μεγαλύτερο μέρος της προετοιμασίας, στους μαθητές δίδαξαν και οι συνάδελφοι Θ. Μπόλης, Δ. Ζέρβας, Ι. Ταρλής.

Κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας τους μαθητές επισκέφθηκε και χαιρέτισε εκ μέρους του Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ο Γενικός γραμματέας συνάδελφος Γ. Δημάκος καθώς και ο συνάδελφος Α. Γαλανός.

Για την πορεία της προετοιμασίας και τα προβλήματα των μαθητών καθημερινά ενημερώνονταν ο αντιπρόεδρος της Ε.Μ.Ε. συνάδελφος Θ. Εξαρχάκος.

Στις 28 Ιούνη αναχώρησε ο συνάδελφος Θ. Μπόλης για την πόλη Χεϊνόλα όπου συνεδρίαζε η επιτροπή της 26ης Δ.Μ.Ο.

Στις 30 Ιούνη ανεχώρησαν οι μαθητές με το συνάδελφο Δ. Κοντογιάννη για το Ελσίνκι, όπου έφθασαν το ίδιο βράδυ και από εκεί για την μικρή πόλη Γιόουτσα (250 Km βόρεια του Ελσίνκι). Σε απόσταση 10 Km από τη Γιόουτσα στις όχθες μιας λίμνης και μέσα σε δάσος βρίσκεται το ξενοδοχείο Rantasipi στα μπαγκαλόους του οποίου έμειναν οι μαθητές.

Στο ξενοδοχείο υπήρχαν βάρκες για όσους αγαπούν τα θαλάσσια σπόρ, ποδήλατα, γήπεδα μπάσκετ, τένις και διάφορες άλλες αθλητικές εγκαταστάσεις.

Στις 2 Ιούλη οι ομάδες όλων των χωρών πήγαν εκδρομή στην πόλη Γιουβέσκουλε.

Στις 3 Ιούλη έγινε η έναρξη της 26ης Δ.Μ.Ο. σε σχολείο της Γιόουτσα. Μετά την τελετή της έναρξης κάθε ομάδα φύτεψε από ένα δένδρο στην αυλή του σχολείου.

Στις 4 και 5 Ιούλη έγινε ο διαγωνισμός της 26ης Δ.Μ.Ο. και επακολούθησε μια εκδρομή.

Μετά το πέρας του διαγωνισμού, οι αρχές της πόλης Γιόουτσα έδωσαν δείπνο προς τιμή των ομάδων και στους συνοδούς των ομάδων, δόθηκε από ένα βιβλίο της πόλης.

Στις 6 Ιούλη οι μαθητές παρακολούθησαν αγώνα Φιλανδικού μπέηζμπώλ στο αθλητικό κέντρο της Γιόουτσα και το απόγευμα έγινε εκδρομή σε λίμνη με αρκετή πεζοπορία μέσα από δάση.

Στις 6 και 7 Ιούλη έγινε και η βαθμολογία των γραπτών. Στις 7 Ιούλη το απόγευμα έγινε εκδρομή στο παραδοσιακό χωριό Βαϊχέλα, όπου παρακολουθήσαμε διάφορα φολκλορικά συγκροτήματα.

Στις 8 Ιούλη οι μαθητές και οι συνοδοί επισκεφθήκαμε την πόλη Λάχτι, όπου και μας δέχθηκε ο δήμαρχος στο δημαρχείο της πόλης. Το βράδυ της ίδιας μέρας συνεδρίασε η επιτροπή της 26ης Δ.Μ.Ο. και αποφάσισε για τα βραβεία και το μέλλον των Δ.Μ.Ο.

Στις 9 Ιούλη αναχωρήσαμε από τη Γιόουτσα για το Ελσίνκι όπου φθάσαμε το μεσημέρι. Εκεί επισκεφθήκαμε διάφορα αξιοθέατα, ανάμεσα στα οποία το πάρκο Σιμπέλιους και το Ολυμπιακό στάδιο Πάαβο Νούρμι. Το απόγευμα της ίδιας μέρας έγινε εκδρομή με βαποράκι στο λιμάνι του Ελσίνκι.

Στις 10 Ιούλη στο Πανεπιστήμιο του Ελσίνκι δόθηκαν τα βραβεία στους νικητές και στη συνέχεια έγινε μια μικρή δεξίωση από την Υπουργό Παιδείας κ. Κασ-

ρίνα Σουόνιο προς τιμή των ομάδων, στο Δημαρχείο του Ελσίνκι.

Μετά έγινε η τελετή λήξης της 26ης Δ.Μ.Ο. και δείπνο στην αίθουσα Matinkylä, από τις αρχές του Ελσίνκι.

Στη διάρκεια του δείπνου μερικές ομάδες παρουσίασαν διάφορα κωμικά σκέτς, χόρεψαν εθνικούς χορούς κ.α. Η ελληνική μαζί με την Κυπριακή ομάδα έκαναν χορωδία και με τη βοήθεια πιάνου τραγούδησαν αρκετά ελληνικά τραγούδια και στην κυριολεξία έκλεψαν την παράσταση, αφήνοντας τις καλύτερες εντυπώσεις.

Στις 11 Ιούλη η ομάδα μας αναχώρησε από το Ελσίνκι και έφθασε στη Ρώμη στις 11 π.μ. Οι μαθητές με το συνάδελφο Δ. Κοντογιάννη έκαναν ένα μικρό περίπατο στη Ρώμη και στις 9 μ.μ. αναχώρησαν για την Αθήνα, όπου και έφθασαν αργά την ίδια μέρα.

Στους μαθητές και στους συνοδούς δεν δόθηκαν χρήματα, κάτι που έγινε για πρώτη φορά σε Δ.Μ.Ο.

Ας δούμε τώρα τα αποτελέσματα:

Η Ελλάδα στην 26η Δ.Μ.Ο. κατέκτησε ένα αργυρό μετάλλιο (Π. Τζερμιάς) και ένα χάλκινο (Β. Μισούλης), ενώ στην 25η Δ.Μ.Ο. είχαμε πάρει μόνο ένα αργυρό. Από άποψη μεταλλείων (επίσημη βαθμολογία) η χώρα μας πήρε τη 16η θέση στις 38 ομάδες, γεγονός πολύ σημαντικό. Από άποψη βαθμών πήραμε την 20η θέση. Η Κύπρος πήρε ένα χάλκινο μετάλλιο και την 31η θέση, ενώ από πλευράς βαθμών την 33η θέση. Χάλκινο μετάλλιο πήρε και ο Μ. Δημητριάδης που κατάγεται από την Κατερίνη, αλλά ζει στην Αυστρία. Πρώτη χώρα από πλευράς μεταλλείων αναδείχθηκε η Ουγγαρία, ενώ από πλευράς βαθμών η Ρουμανία με δεύτερη τις ΗΠΑ.

Από πρώτη άποψη τα αποτελέσματα δε δείχνουν κάτι σημαντικό για την Ελληνική ομάδα.

Στους μαθητές όμως που παίρνουν για πρώτη φορά μέρος σε Δ.Μ.Ο. όπως όλοι οι μαθητές της ομάδας σύμφωνα με τον πίνακα αποτελεσμάτων η σειρά των χωρών είναι: ΕΣΣΔ, Βιετνάμ, Ρουμανία, ΗΠΑ, Αυστραλία, Αν. Γερμανία, Ουγγαρία, Τσεχοσλοβακία, Ελλάδα, Δ. Γερμανία κλπ.

Αν μάλιστα λάβουμε υπ' όψη ότι στις τρεις τελευταίες Δ.Μ.Ο. (24η Παρίσι, 25η Πράγα) η χώρα μας πάντα πήρε μετάλλια (στην 24η τρία τρίτα, στην 25η ένα δεύτερο) μπορούμε να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

1) Ελάχιστες χώρες είναι σε θέση να παρουσιάζουν κάθε χρόνο στις Δ.Μ.Ο. μαθητές - ταλέντα, όπως η Ελλάδα. Αυτό δείχνει πέρα από κάθε αμφισβήτηση, ότι

α) Η χώρα μας διαθέτει αυθεντικά ταλέντα και

β) Η Ε.Μ.Ε. τα τρία τελευταία χρόνια έχει πετύχει κάτι μοναδικό: Την όσο γίνεται καλύτερη αξιοποίηση αυτών των ταλέντων, στα πλαίσια μιας γενικότερης αναβάθμισης της Μαθηματικής Παιδείας.

2) Θέλουμε να πιστεύουμε, ότι το νέο Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. θα βρει τρόπο να συνεχίσει και να ολοκληρώσει την προσπάθεια που άρχισε το προηγούμενο Δ.Σ. στον τομέα των Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Είναι νομίζουμε καιρός ο καθένας μας να αναλάβει τις ευθύνες του.

Σχετικά με τα θέματα τώρα:

Τα θέματα της 26ης Δ.Μ.Ο. ήταν αρκετά δυσκολότερα από τα θέματα των δύο προηγούμενων Δ.Μ.Ο. Έτσι χώρες που πήραν μέρος με νέους μαθητές έχασαν βαθμούς σε σχέση με την 25η Δ.Μ.Ο. Π.χ. η ΕΣΣΔ από 235 βαθμούς στην 25η Δ.Μ.Ο. κατέβηκε φέτος στους 140 και για πρώτη φορά στην ιστορία των Δ.Μ.Ο. μαθητής της δεν πήρε μετάλλιο.

ΠΡΩΤΗ ΜΕΡΑ (4 Ιούλη)

1) Ένα κυρτό τετράπλευρο ABCO έχει όλες τις κορυφές του πάνω σε μία περιφέρεια κύκλου (δηλαδή είναι εγγράψιμο σε κύκλο). Ένας άλλος κύκλος έχει το κέντρο του στην πλευρά AB και εφάπτεται με τις άλλες τρείς πλευρές του τετραπλεύρου. Ν' αποδειχτεί ότι:

$$(AD) + (BC) = (AB)$$

(Μεγ. Βρετανία)

2) Έστω η και κ φυσικοί αριθμοί, πρώτοι προς αλλήλους και $0 < \kappa < \eta$. Κάθε μέλος του συνόλου $M = \{1, 2, \dots, \eta - 1\}$ χρωματίζεται ή μπλέ ή άσπρο. Δίνεται ότι:

(1) Για κάθε $i \in M$, οι αριθμοί i και $\eta - i$ έχουν το ίδιο χρώμα, και

(2) Για κάθε $i \in M$, $i \neq \kappa$, οι αριθμοί i και $|k - i|$ έχουν το ίδιο χρώμα.

Ν' αποδειχτεί ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου M έχουν ίδιο χρώμα.

(Αυστραλία)

3) Για κάθε πολυώνυμο $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ με ακέραιους συντελεστές, συμβολίζουμε με $W(P)$ τον αριθμό (πλήθος) των περιττών συντελεστών του P. Έστω $Q_i(x) = (1 + x)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Ν' αποδειχτεί ότι αν $i_1, i_2, \dots, i_n$ είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε:

$$0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n,$$

τότε:

$$W(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geqslant W(Q_{i_1})\dots$$

(Ολλανδία)

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΡΑ (5 Ιούλη)

4) Δίνεται ένα σύνολο Μ που αποτελείται από 1985 διαφορετικούς θετικούς ακεραίους αριθμούς κανένας από τους οποίους δεν έχει πρώτους διαιρέτες μεγαλύτερους του 26. Ν' αποδειχτεί ότι το Μ περιέχει τουλάχιστον ένα υποσύνολο με τέσσερα διαφορετικά στοιχεία, το γινόμενο των οποίων είναι τέταρτη δύναμη ακεραίου αριθμού.

(Μογγολία)

5) Ένας κύκλος με κέντρο Ο διέρχεται από τις κορυφές Α και C ενός τριγώνου ABC και τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και BC εκ νέου στα διαφορετικά σημεία Κ και Ν αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABC και ΚΒΝ τέμνονται ακριβώς σε δύο διαφορετικά σημεία Β και Μ. Ν' αποδειχτεί ότι η γωνία ΟΜΒ είναι ορθή.

(ΕΣΣΔ)

6) Για κάθε πραγματικό αριθμό x_1, κατασκευάζεται η ακολουθία $x_1, x_2, \ldots$ θέτοντας:

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right) \qquad n \geq 1.$$

Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς μία τιμή του x_1 τέτοια ώστε:

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

για κάθε n.

(Σουηδία)

Η χώρα μας έδωσε δύο σημειώματα στην επιτροπή διαγωνισμού της 26ης Δ.Μ.Ο.

Στο πρώτο υπήρχε η λύση του 1ου θέματος από τον μαθητή Π. Τζερμιά και πρόταση για βραβείο ειδικής λύσης και στο δεύτερο παρατήρηση για το 5ο θέμα του συναδέλφου Δ. Κοντογιάννη, όπου αναφέρεται ότι το σημείο Μ είναι το σημείο Miquel του τετραπλεύρου AKNC και η λύση απλουστεύεται.

Στην 26η Δ.Μ.Ο. δεν δόθηκαν ειδικά βραβεία, παρόλο που προτάθηκαν γι' αυτό 10 περίπου μαθητές.

Από τους αναγνώστες του περιοδικού μας και ιδιαίτερα τους μαθητές περιμένουμε λύσεις των θεμάτων αυτών που θα δημοσιεύσουμε στο περιοδικό μας.

η στήλη των ολυμπιάδων

παρατηρήσεις σ' ένα θέμα διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε.

Δ.Γ. Κοντογιάννη

Στον Πανελλήνιο Μαθητικό Διαγωνισμό της ΕΜΕ το 1984 προτάθηκε για τη Β' Λυκείου το παρακάτω θέμα:

1. *Στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Ρ, τέτοιο ώστε*

$$(ΡΑ) = 5,\ (ΡΒ) = 4,\ (ΡΓ) = 3.$$

Να υπολογίσετε την πλευρά του ΑΒΓ.

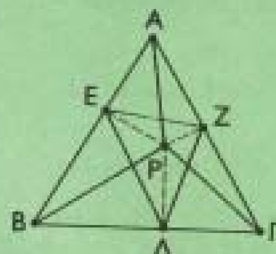
Το πρόβλημα αυτό, που πολλοί μαθητές έλυσαν τριγωνομετρικά, συνδέεται με αρκετές γεωμετρικές προτάσεις, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Ακόμα μπορεί να γενικευθεί κατά πολλούς τρόπους, όπως μπορεί να δει κανείς σε πρόσφατα άρθρα γνωστού Καναδικού μαθηματικού περιοδικού.

Ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα της σύγχρονης Γεωμετρίας είναι το παρακάτω, του μεγάλου Ρουμάνου μαθηματικού Dimitri Pompeiu (1873-1954), που σε μερικά βιβλία αναφέρεται και σαν θεώρημα Lebesque.

2. *Θεώρημα Pompeiu:*
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο επίπεδό του. Τότε τα τμήματα ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ είτε αποτελούν πλευρές τριγώνου, είτε το μεγαλύτερο από αυτά είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων.

Απόδειξη:

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

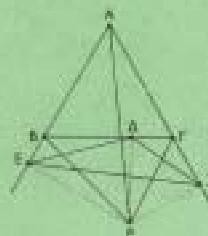


α) Το Ρ είναι εσωτερικό σημείο (Σχ. 1) του ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ οι προβολές του Ρ στις πλευρές του ΑΒΓ, τότε αφού το τετράπλευρο ΑΖΡΕ είναι εγγράψιμο, από το θεώρημα του ημιτόνου στο τριγ. ΑΖΕ θα έχουμε:

$$ΑΡ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,ΖΕ \text{ και όμοια}$$

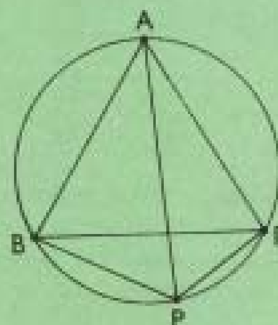
$$ΒΡ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,ΔΖ,\ ΓΡ = \frac{\sqrt{3}}{2}\,ΔΕ$$

Αφού λοιπόν τα ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ είναι πλευρές τριγώνου, θα είναι και τα ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ.



β) Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του ΑΒΓ (Σχ. 2). Τότε η απόδειξη είναι ίδια. γ) Το Ρ είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ. (Σχ. 3). Τότε είναι γνωστό ότι το μεγαλύτερο από τα τμήματα ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ είναι ίσο με το άθροισμα των δυο άλλων.

Όταν τα ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ σχηματίζουν τρίγωνο, αυτό ονομάζεται **τρίγωνο Pompeiu.** Έτσι η πρόταση (1) είναι ισοδύναμη με την πρόταση (1*):



(1*) *Να υπολογίσετε την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, όταν το τρίγωνο Pomeiu έχει πλευρές με μήκη 3, 4, 5.*

(Τις ισοδύναμες προτάσεις (1), (1*), μπορούμε να τις αποδείξουμε με τον παρακάτω τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να δώσουμε και μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος Pompeiu).

Απόδειξη:

Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΡΔΓ (Σχ. 4). Τα τριγ. ΑΡΓ και ΒΔΓ είναι ίσα, αφού ΑΓ = ΒΓ, ΡΓ = ΔΓ και $\hat{ΑΓΡ} = \hat{ΒΓΔ}$. Ώστε (ΒΔ) = (ΡΑ) = 5, δηλαδή το τριγ. ΒΓΔ είναι ορθογώνιο γιατί έχει πλευρές με μήκη 3, 4, 5.

Τότε $\hat{ΒΡΓ} = 150°$ και $\hat{ΒΡΕ} = 30°$, όπου ΒΕ ⊥ ΡΓ. Ακόμα (ΒΕ) = 2 και (ΡΒ) = $2\sqrt{3}$, οπότε $(ΒΓ) = \sqrt{4 + (2\sqrt{3} + 3)^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

4. *Οι γωνίες του τριγ. Pompeiu:*

Θα υπολογίσουμε τώρα τις γωνίες του τριγ. Pompeiu, όταν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒΓ.

Όπως φαίνεται στο Σχ. 4 θα έχουμε:

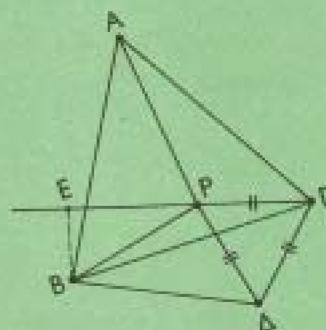
$\hat{ΒΡΔ} = \hat{ΒΡΓ} - 60°$

$\hat{ΡΔΒ} = \hat{ΓΔΒ} - 60° = \hat{ΓΡΑ} - 60°$ και

$\hat{ΔΒΡ} = 180° - (\hat{ΒΡΔ} + \hat{ΡΔΒ}) = 180° - (\hat{ΒΡΓ} - 60°) -$

$- (\hat{ΓΡΑ} - 60°) = 300° - (\hat{ΒΡΔ} + \hat{ΓΡΑ}) =$

$= 300° - (360° - \hat{ΑΡΒ}) = \hat{ΑΡΒ} - 60°$



Ώστε για να βρούμε τις γωνίες του τριγ. Pompeiu, αρκεί από τις γωνίες $\hat{ΑΡΒ}$, $\hat{ΒΡΓ}$, $\hat{ΓΡΑ}$ να αφαιρέσουμε γωνία 60°. (Τις γωνίες του τριγ. Pompeiu θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και τριγωνομετρικά. Τέλος με τη βοήθεια των σχέσεων αυτών θα μπορούσαμε να δώσουμε και μιαν άλλη απόδειξη τις (1), αφού

$$\hat{ΒΡΓ} = 90° + 60° = 150° \text{ κλπ})$$

5. *Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ρ.*

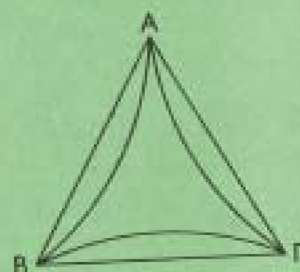
Στην πρόταση (1) υποθέσαμε ότι υπάρχει σημείο Ρ, εσωτερικό του τριγ. ΑΒΓ, ώστε (ΡΑ) = 5, (ΡΒ) = 4, (ΡΓ) = 3.

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα γενικώτερα:

Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος του Ρ, ώστε το τρίγωνο Pompeiu, να είναι ορθογώνιο;

Είναι φανερό, ότι ο γ.τ. του Ρ είναι τα τρία τόξα με χορδές τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ που δέχονται γωνία 150° (Σχ. 5).

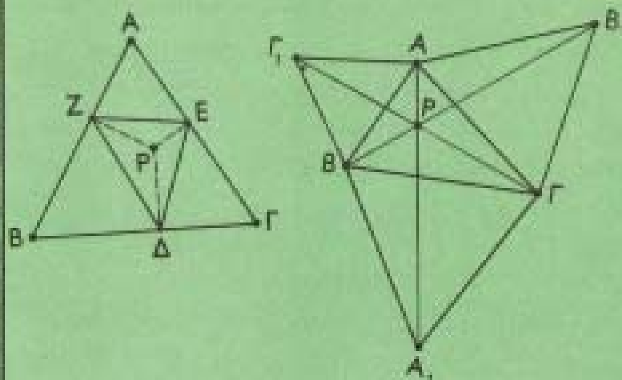
Έτσι στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $ΒΓ = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$, υπάρχουν τρία εσωτερικά σημεία Ρ τέτοια ώστε τα (ΡΑ), (ΡΒ), (ΡΓ) να έχουν τιμές 3, 4, 5.



6. *Το τρίγωνο Pompeiu και το σημείο Toricelli*

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που το Ρ είναι εσωτερικό του ΑΒΓ, παρατηρούμε, ότι στο τριγ. ΔΕΖ το σημείο Ρ είναι το *σημείο Toricelli*, δηλαδή το σημείο για το οποίο το άθροισμα ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ είναι ελάχιστο. Πράγματι είναι γνωστό, ότι αν ένα τριγ. ΑΒΓ έχει γωνίες μικρότερες από 120°, τότε το σημείο Toricelli είναι εκείνο που βλέπει τις πλευρές του τριγώνου με γωνίες 120°. Στην περίπτωση αυτή είναι ακόμα γνωστό, ότι το σημείο Toricelli ταυτίζεται με το σημείο Steiner, δηλαδή το σημείο που τέμνονται οι $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$,

$\Gamma\Gamma_1$, όπου τα $AB\Gamma_1$, $A\Gamma A_1$, ΓAB_1 είναι ισόπλευρα τρίγωνα (Σχ. 7).



7. *Το εμβαδό του τριγώνου Pompeiu*

Παρατηρούμε, ότι από το Σχ. 4 έχουμε:
$BP^2 = PB^2 + P\Gamma^2 - 2PB \cdot P\Gamma$ συν$(60° + \omega)$, όπου $\omega = B\hat{P}\Delta$. Ακόμα

$$B\Gamma^2 = PB^2 + P\Gamma^2 - 2PB \cdot$$
$$\cdot P\Gamma \left\{ \frac{1}{2} \text{συν}\omega - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{συν}\omega \right\} = PB^2 + P\Gamma^2 + P\Gamma^2 -$$
$$- 2\,\frac{1}{2} PB \cdot P\Gamma \;\text{συν}\omega + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} PB \cdot P\Gamma \;\text{ημ}\omega \quad (1)$$

Αν $(PA) = \alpha_1$, $(PB) = \beta_1$, $(P\Gamma) = (P\Delta) = \gamma_1$ η (1) γίνεται:

$$\alpha^2 = \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 2\beta_1 \cdot \gamma_1 \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2 - \alpha_1^2}{2\beta_1 \gamma_1} + 2\sqrt{3}\,E_1 \quad (2)$$

όπου $(B\Gamma) = \alpha$ και E_1 το εμβαδό του τριγ. Pompeiu.

Η (2) γίνεται: $\alpha^2 = \dfrac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2}{2} + 2E_1\sqrt{3}$ (3)

Από τη σχέση (3) ο αναγνώστης μπορεί να δείξει εύκολα την παρακάτω πρόταση:

8. *Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο P στο εσωτερικό του. Αν E_1 το εμβαδό του τριγώνου Pompeiu που αντιστοιχεί στο P, τότε*

$$E_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} |R^2 - \delta^2|,$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ και δ η απόσταση του P από το περίκεντρο 0 του ΑΒΓ.

(Δηλαδή $E_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} |\Delta_0^P|$, όπου Δ_0^P η δύναμη του P ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο 0).

8. *Γενίκευση του θεωρήματος Pompeiu:*

Ορισμός: *Θα λέμε σχηματισμό P κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων του χώρου με την ιδιότητα: Οι αποστάσεις κάθε σημείου του χώρου από τα σημεία του P είναι μεγέθη πλευρών πολυγώνου.*

Είναι γνωστό (θεωρ. Sturm), ότι για να αποτελούν οι θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ $(\nu \geq 3)$ μεγέθη πλευρών ν-γώνου, αρκεί για κάθε α_i με $1 \leq i \leq \nu$, να υπάρχει δείκτης $\kappa < \nu$, ώστε $\alpha_i < \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_\kappa}$, όπου:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_\kappa\} \subseteq \{1, 2, \dots, \nu\} - \{i\} \quad (4)$$

Η συνθήκη (4) είναι ικανή και αναγκαία, μόνο στην περίπτωση που $\nu = 3$. Από τα παραπάνω γίνεται φανερή η πρόταση:

8.1.) *Ας είναι $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \dots, \mathbb{M}_\nu$ $(\nu \in \mathbb{N})$ σχηματισμοί P. Τότε και το σύνολο $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \dots \cup \mathbb{M}_\nu$ είναι σχηματισμός P.*

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μια γενίκευση του θ. Pompeiu.

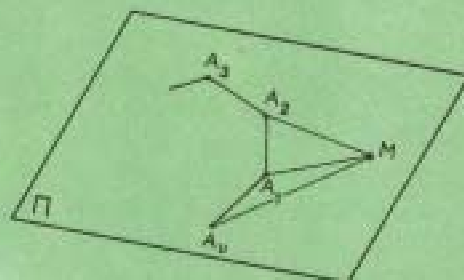
8.2.) *Οι αποστάσεις σημείου P του χώρου από τις κορυφές $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ κανονικού ν-γωνου $A_1 A_2 \dots A_\nu$, σχηματίζουν ένα ν-γωνο.*

Η πρόταση (8.2) μπορεί να διατυπωθεί και με τον παρακάτω τρόπο:

Οι κορυφές κανονικού ν-γώνου $A_1 A_2 \dots A_\nu$ αποτελούν σχηματισμό P.

Απόδειξη:

Στο επίπεδο (π) του κανονικού ν-γώνου $A_1 A_2 \dots A_\nu$ ορίζουμε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων x O y όπου O το κέντρο του ν-γώνου και το A_1 βρίσκεται πάνω στον Ox και είναι $\overline{OA_1} = 1$ (Σχ. 8).



Τότε οι κορυφές του ν-γώνου είναι οι εικόνες των ριζών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu$ της εξίσωσης $x^\nu - 1 = 0$ (5).

Είναι γνωστό ότι:

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_\nu = 0$ (6) και

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_\nu^2 = (\Sigma_{\varepsilon_i})^2 - 2\,\Sigma_{\varepsilon_i\varepsilon_j} = 0 \qquad (7)$$

Αν $z \in C$ με εικόνα το σημείο Μ του (π), από τις (6) και (7) παίρνουμε:

$$\varepsilon_1 (z - \varepsilon_1) + \varepsilon_2 (z - \varepsilon_2) + \dots + \varepsilon_\nu (z - \varepsilon_\nu) = 0 \qquad (8)$$

Η (8) γίνεται:

$$\varepsilon_2 (z - \varepsilon_2) + \dots + \varepsilon_\nu (z - \varepsilon_\nu) = -\,\varepsilon_1 (z - \varepsilon_1) \Rightarrow$$

$$|\varepsilon_2 (z - \varepsilon_2) + \dots + \varepsilon_\nu (z - \varepsilon_\nu)| = |\varepsilon_1 (z - \varepsilon_1)| \Rightarrow$$

$$|\varepsilon_2 (z - \varepsilon_2)| + \dots + |\varepsilon_\nu (z - \varepsilon_\kappa)| > |\varepsilon_1 (z - \varepsilon_1)| \Rightarrow$$

$$|\varepsilon_2|\,|z - \varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_\nu|\,|z - \varepsilon_\nu| > |\varepsilon_1|\,|z - \varepsilon_1| \Rightarrow$$

$$|z - \varepsilon_2| + \dots + |z - \varepsilon_\nu| > |z - \varepsilon_1| \qquad (9)$$

Από την (9) προκύπτει ότι οι αποστάσεις του Μ από τις κορυφές $A_1, A_3, \dots, A_\nu$ αποτελούν πλευρές ν-γώνου.

Οι αναγνώστες σαν άσκηση να εξετάσουν την περίπτωση που το Μ βρίσκεται έξω από το επίπεδο (π).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ αν είναι γνωστές οι πλευρές του α, β και το τμήμα s ($s < \alpha + \beta$) η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των αποστάσεων των σημείων του επιπέδου από τις κορυφές του ΑΒΓ.

2. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Pompeiu να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο, που οι πλευρές του να βρίσκονται σε τρεις ομόκεντρους κύκλους.

3. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εσωτερικό του σημείο Ρ. Ας είναι $A_1 B_1 \Gamma_1$ το τρίγωνο Pompeiu που ορίζεται από το Ρ. Στο $A_1 B_1 \Gamma_1$ περιγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο $A_2 B_2 \Gamma_2$ που έχει το μέγιστο εμβαδό. Να δείξετε ότι $(A_2 B_2 \Gamma_2) : (AB\Gamma) = 4 : 3$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στη διάρκεια της προετοιμασίας των μαθητών που πήραν μέρος στην 26η Δ.Μ. Ολυμπιάδα, οι μαθητές μελέτησαν περίπου 300 θέματα, από όλη την ύλη των στοιχειωδών μαθηματικών που πρέπει να γνωρίζουν αυτοί που μετέχουν σε διεθνείς διαγωνισμούς.

Σε πολλά από τα θέματα αυτά οι μαθητές μας, έδωσαν εξαιρετικά ευφυείς λύσεις. Τα θέματα αυτά, που μας έστειλαν οι μαθητές Τζερμιάς Π., Μισούλης Β., Γουνόπουλος Δ., Μαραντίδης Ι., Μπομπολάκης Δ., Συνοδινός Ι. μαζί με τις λύσεις των μαθητών θα παρουσιάσουμε από τη στήλη αυτή. Ο μαθητής Μισούλης Β. μας έστειλε και μερικές δικές του ασκήσεις κατάλληλες για τη στήλη που και αυτές θα παρουσιάσουμε.

Ακόμα θα παρουσιάσουμε κάθε λύση που θα μας στείλουν οι αναγνώστες μας. Τέλος παρουσιάζουμε μερικά από τα θέματα που μας έστειλε ο μαθητής Π. Μπολτσής.

Η Επιτροπή διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

1) Ας είναι α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι:

$$\alpha(\beta-\gamma)^2 + \beta(\gamma-\alpha)^2 + \gamma(\alpha-\beta)^2 + 4\alpha\beta\gamma > \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

2) Είναι γνωστό ότι συν(αημx) > ημ(βσυνx), $\forall\, x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

3) Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ για το οποίο ισχύει $AB + B\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι $AB < A\Gamma$.

4) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{(1185 - x_1 - x_2)^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + (1580 - y_1 - y_2)^2}$$

5) Ας είναι ν περιττός αριθμός και $\alpha_i \in [0, \pi]$, όπου $1 \le i \le \nu$. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{1 \le i < j \le \nu} \text{συν}\,(\alpha_i - \alpha_j) \geqslant \frac{1-\nu}{2}$$

6) Ένα κυρτό ν^2-γωνο καλύπτεται εντελώς από ν κυρτά 5-γωνα που έχουν κοινή κορυφή ή κοινή πλευρά ($\nu > 2$). Να δείξετε ότι $\nu = 3$

7) Από τις κορυφές κανονικού 9-γωνου άλλες βάφουμε άσπρες και άλλες μαύρες. Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστο δύο ίσα τρίγωνα, που οι κορυφές τους έχουν όλες το ίδιο χρώμα.

8) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($A \ne 90°$) ισχύει

$$\frac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

Τι συμπέρασμα βγαίνει για το τρίγωνο;

9) Ας είναι ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς ξ_1, ξ_2, ξ_3 ώστε να ισχύει η σχέση:

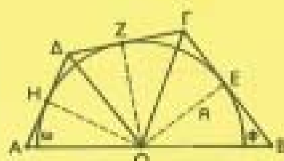
$$\frac{\xi_1}{\upsilon_\alpha \upsilon_{\alpha'}} + \frac{\xi_2}{\beta\beta'} + \frac{\xi_3}{\gamma\gamma'} = 0$$

ολυμπιάδες

οι λύσεις των θεμάτων της 26ης Δ.Μ.Ο.

Από τους συναδέλφους Θ. Μπόλη, Δ. Κοντογιάννη και τον 2ο Ολυμπιονίκη της 25ης Δ.Μ.Ο. φοιτητή Α. Μελά πήραμε τις λύσεις των θεμάτων της 26ης Δ.Μ.Ο. που είχαμε δημοσιεύσει στο τεύχος 1 του Ευκλείδη Β΄.

Θέμα 1ο: Ας είναι ΑΒΓΔ το εγγράψιμο τετράπλευρο και Ε, Ζ, Η τα σημεία επαφής των ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ με τον κύκλο (Σχ. 1). Φέρουμε τις ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΓ, ΟΔ και παρατηρούμε ότι αν $O\hat{A}\Delta = \omega$, $O\hat{B}\Gamma = \phi$, τότε:



Σχ. 1

$$B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - \omega,\ A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - \hat{\phi}$$

και ακόμα:

$$AH = R\,\text{σφ}\omega,\ H\Delta = R\text{εφ}\,\frac{\phi}{2},\ BE = R\text{σφ}\phi,$$

$$E\Gamma = \frac{\omega}{2} \quad \text{οπότε:}$$

$$A\Delta + B\Gamma = R\left(\text{εφ}\,\frac{\phi}{2} + \text{εφ}\,\frac{\omega}{2} + \text{σφ}\omega + \text{σφ}\phi\right) \quad (1).$$

Όμως
$$AB = AO + OB = \frac{R}{\text{ημ}\omega} + \frac{R}{\text{ημ}\phi} = R\left(\frac{1}{\text{ημ}\omega} + \frac{1}{\text{ημ}\phi}\right) \qquad (2)$$

Αλλά
$$\text{σφ}\omega + \text{εφ}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega} + \frac{\text{ημ}\,\frac{\omega}{2}}{\text{συν}\,\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \frac{\text{συν}\omega\ \text{συν}\,\frac{\omega}{2} + \text{ημ}\omega\ \text{ημ}\,\frac{\omega}{2}}{\text{ημ}\omega\ \text{συν}\,\frac{\omega}{2}} = \frac{\text{συν}\,\frac{\omega}{2}}{\text{ημ}\omega\text{συν}\,\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\text{ημ}\omega}$$

και
$$\text{σφ}\,\phi + \text{εφ}\,\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\text{ημ}\phi}.$$

Από τις (1), (2) λοιπόν έχουμε ότι

$$A\Delta + B\Gamma = AB$$

Θέμα 2ο: Θα λύσουμε την άσκηση επαγωγικά. Για $n = 3$ η πρόταση είναι φανερή, αφού από τις συνθήκες (α), (β) οι αριθμοί $1,\ 2 = 3 - 1$, έχουν το ίδιο χρώμα. Ας είναι τώρα $n > 3$ και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \leq n - 1$.

Αν $\kappa = 1$ είναι φανερό, ότι όλοι οι αριθμοί έχουν το ίδιο χρώμα.

Ας είναι $\kappa > 1$ και $n = \kappa \cdot \pi + \upsilon$ με $0 < \upsilon < \kappa$. Είναι φανερό τότε, ότι οι αριθμοί κ, υ είναι σχετικά πρώτοι.

Το σύνολο $M_1 = [1, 2, \ldots, \kappa]$ είναι υποσύνολο του Μ και για τους αριθμούς κ, υ ικανοποιεί τις συνθήκες της άσκησης. Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, όλοι οι αριθμοί του M_1 έχουν το ίδιο χρώμα. Από την (α) τότε όμως προκύπτει, ότι και οι αριθμοί του Μ θα έχουν το ίδιο χρώμα.

Θέμα 3ο: Αν $n = 2^{\mu}$, τότε

$$Q_{\nu}(x) = (1 + x)^n = 1 + \pi(x) + n^n,$$

όπου $\pi(x)$ είναι πολυώνυμο με άρτιους συντελεστές. Ώστε αν ο βαθμός του $P(x)$ είναι $n < 2^m$, τότε $W(P \cdot Q_{\nu}) = 2W(P)$ (1).

Θα δείξουμε την πρόταση με επαγωγή ως προς i_n. Αν $i_n = 0$ ή $i_n = 1$ η πρόταση είναι φανερή.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε ακολουθία i_n με $i_n > 2^m$, όπου $m \geqslant 1$. Ας είναι τώρα $2^m \leq i_n < 2^{m+1}$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

(α) Να είναι $i_1 \geqslant 2^m$. Θέτουμε

$$i_j = i_j - 2^m \ (1 \le j \le n)$$

και από την (1) έχουμε:

$$W(Q_{i1} + Q_{i2} + \ldots + Q_{in}) =$$
$$= 2\, W(Q_2^m (Q_{i1'} + Q_{i2'} + \ldots + Q_{in})) =$$
$$= 2\, W(Q_{i1'} + Q_{i2'} + \ldots Q_{i\nu'} \geqslant 2\, W(Q_{i1'}) = W(Q_{i1}),$$

δηλαδή η πρόταση ισχύει.

(β) Να είναι $i_t < 2^m$. Θέτουμε $\kappa = 2^m$ και

$$i_t < 2^m < i_{t+1}.$$

Τότε $P(x) = Q_{i1} + Q_{i2} + \ldots + Q_{in} =$

$$Q_{i1} + \ldots + Q_{it} + (1+x)^\kappa (Q_{j1'} + \ldots + Q_{j'n}) =$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa + (1+x)^\kappa$$
$$(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i x^i + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \beta_i x^{i-1} + x^\kappa \sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i x^i + \Pi(x),$$

όπου $\Pi(x)$ πολυώνυμο με περιττούς συντελεστές. Στον υπολογισμό του $W(P)$ κάθε περιττός συντελεστής α_i προστίθεται σε έναν περιττό συντελεστή β_i του $\sum_{i=1}^{\kappa-1} \beta_i\, x^{i-1}$ και γίνεται άρτιος. Αλλά το άθροισμα $\alpha_i + \beta_i$ ξαναγίνεται περιττός με την πρόσθεση σ' αυτό του β_i από το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\kappa} \beta_i x^\kappa x^i$. Έτσι έχουμε

$$W(R) = W\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i x^i\right) = W(Q_{i1} + \ldots + Q_{it}) \geqslant W(Q_{i1}).$$

Θέμα 4ο: Ας είναι M το σύνολο των 1985 ακεραίων. Κάθε αριθμός $x_i \in M$ έχει τη μορφή $x_i = \prod_{\kappa=1}^{9} \pi_\kappa^{\alpha_{i\kappa}}$, όπου $\pi_1 = 2, \pi_2 = 3, \ldots, \pi_9 = 23$ οι πρώτοι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 26. Το γινόμενο $x_i \cdot x_j$ είναι τέλειο τετράγωνο, αν για κάθε κ με $1 \le \kappa \le 9$ έχουμε $\alpha_{i\kappa} + \alpha_{j\kappa} = 0 \pmod 2$. Όμως οι διαφορετικές ως προς (mod 2) 9-αδες είναι $2^9 = 512$. Επομένως σύμφωνα με την αρχή Dirichlet, σε κάθε 513 στοιχεία του συνόλου M θα υπάρχουν δυο τουλάχιστο, που το γινόμενο τους θα είναι τέλειο τετράγωνο. Αφού $1985 > 513$, μπορούμε να βρούμε δυο αριθμούς του M με την ιδιότητα αυτή. Από τους υπόλοιπους 1983 αριθμούς του M μπορούμε πάλι να βρούμε δύο άλλους αριθμούς κ.λ.π. Τη διαδικασία αυτή μπορούμε να επαναλάβουμε

$$\frac{1985 - 513}{2} = 736 \text{ φορές.}$$

Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε ένα νέο σύνολο M_1 με στοιχεία τα 736 γινόμενα που είναι τέλεια τετράγωνα. Επειδή όμως $736 > 513$, ανάλογα μπορούμε να βρούμε δυο στοιχεία του M_1 που το γινόμενό τους να είναι τετάρτη δύναμη ακέραιου αριθμού.

6ο Θέμα: Για κάθε πραγματικό αριθμό x_1, κατασκευάζεται η ακολουθία $x_1, x_2, \ldots$ θέτοντας:

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right) n \ge 1.$$

Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς μια τιμή του x_1, τέτοια ώστε:

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 \ (*)$$

για κάθε n.

Απόδειξη: Η (*) είναι ισοδύναμη με την:

$$1 - \frac{1}{n} < x_n < 1 \ (1) \quad \text{για κάθε n.}$$

Πράγματι αν η (1) ισχύει για κάθε η τότε:

$$x_n > 1 - \frac{1}{n} > 0,\ x_{n+1} < 1,\ x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{\nu} \right) > x_n,$$

άρα $0 < x_n < x_{n+1} < 1$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ξεκινώντας από την (1) για συγκεκριμένα $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάζουμε τις πεπερασμένες ακολουθίες:

$$\alpha_n^{(n)} = 1,\ \alpha_\kappa^{(n)} = \frac{1}{2\kappa} \left(\sqrt{4\kappa^2 \alpha_{\kappa+1}^{(n)} + 1} - 1\right) \quad \text{και:}$$

$$\beta_n^{(n)} = 1 - \frac{1}{n},\ \beta_\kappa^{(n)} = \frac{1}{2\kappa} \left(\sqrt{4\kappa^2 \beta_{\kappa+1}^{(n)} + 1} - 1\right) \quad \text{με}$$

$$1 \le \kappa \le n - 1.$$

και θέτουμε: $\alpha_n = \alpha_1^{(n)},\ \beta_n = \beta_1^{(n)}$

Θα αποδείξουμε ότι αν

$$\beta_n < x_1 < \alpha_\nu \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < x_n < 1 \qquad (2)$$

Πράγματι αν: $\beta_n < x_1 < \alpha_n$ τότε:

$$\beta_1^{(n)} \left(\beta_1^{(n)} + \frac{1}{1} \right) < x_2 < \alpha_1^{(n)} \left(\alpha_1^{(n)} + \frac{1}{1} \right)$$

και επειδή: $\beta_1^{(n)} = \frac{1}{2 \cdot 1} \left(\sqrt{4 \cdot 1^2\, \alpha_2^{(n)} + 1} - 1\right),$

$\alpha_1^{(n)} = \frac{1}{2\cdot 1}(\sqrt{4\cdot 1^2\, \alpha_2^{(n)}+1}-1)$ άρα:

$\beta_\kappa^{(n)}\left(\beta_1^{(n)}+\frac{1}{1}\right)=\beta_2^{(n)}, \quad \alpha_1^{(n)}\left(\alpha_1^{(n)}+\frac{1}{1}\right)=\alpha_2^{(n)}$,

άρα $\beta_1^{(n)} < x_2 < \alpha_2^{(n)}$

Γενικά αν $\beta_\kappa^{(n)} < x_\kappa < \alpha_\kappa^{(n)}$ για κάποιο

$1\le\kappa\le\kappa\le n-1$ τότε:

$$\beta_\kappa^{(n)}\left(\beta_\kappa^{(n)}+\frac{1}{\kappa}\right)<x_\kappa\left(x_\kappa+\frac{1}{\kappa}\right)<\alpha_\kappa^{(n)}\left(\alpha_\kappa^{(n)}+\frac{1}{\kappa}\right)$$

άρα από τον ορισμό των $\beta_\kappa^{(n)}, \alpha_\kappa^{(n)}$ έχουμε:

$$\beta_{\kappa+1}^{(n)} < x_{\kappa+1} < \alpha_{\kappa+1}^{(n)}$$

Συνεπώς θα έχουμε: $\beta_n^{(n)} < x_n < \alpha_n^{(n)}$ δηλαδή:

$$1-\frac{1}{n} < x_n < 1.$$

Ομοίως αν $1-\frac{1}{n}<x_n<1$ τότε:

$$\beta_n^{(n)} < x_{n-1} + \left(x_{n-1}+\frac{1}{n-1}\right) < \alpha_n^{(n)}$$

δηλαδή: $x_{n-1}^2 + \frac{1}{n-1}x_{n-1} - \beta_n^{(n)} > 0$ και

$$x_{n-1}^2+\frac{1}{n-1}x_{n-1}-\alpha_n^{(n)}<0$$

και επειδή προφανώς προκύπτει ότι $x_{n-1}>0$ από τον ορισμό των $\alpha_\kappa^{(n)}, \beta_\kappa^{(n)}$ έχουμε:

$$\beta_{n-1}^{(\kappa)} < x_{n-1} < \alpha_{n-1}^{(n)}$$

συνεχίζονται έτσι έχουμε: $\beta_{n-1}^{(n)} < x_{n-1} < \alpha_{n-1}^{(n)}$

για $1\le\kappa\le n-1$ άρα:

$\beta_1^{(n)} < x_1 < \alpha_1^{(n)}$ δηλαδή $\beta_n < x_1 < \alpha_n$

Από τις (2) και την ισοδυναμία των (*) και (1) έχουμε ότι:

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

αν και μόνο αν

$$x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\beta_n, \alpha_n)$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\beta_n, \alpha_n)$ είναι μονοσύνολο. Έχουμε:

$$\beta_n<\beta_{n+1}<\alpha_{n+1}<\alpha_n,$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Έχουμε:

$$\alpha_n^{(n+1)} = \frac{1}{2n}(\sqrt{4n^2+1}-1) < \frac{1}{2n}(2n+1-1) = 1 = \alpha_n^{(n)}$$

$$\alpha_{n-1}^{(n+1)} = \frac{1}{2(n-1)}(\sqrt{4(n-1)^2\alpha_n^{(n+1)}+1}-1) <$$

$$< \frac{1}{2(n-1)}(\sqrt{4(n-1)^2\alpha_n^{(n)}+1}-1)=\alpha_{n-1}^{(n)}$$

και ομοίως από την $\alpha_{\kappa+1}^{(n+1)}<\alpha_{\kappa+1}^{(n)}$ έχουμε:

$$\alpha_\kappa^{(n+1)} = \frac{1}{2\kappa}(\sqrt{4\kappa^2\alpha_{\kappa+1}^{(n+1)}+1}-1) <$$

$$< \frac{1}{2\kappa}(\sqrt{4\kappa^2\alpha_{\kappa+1}^{(n)}+1}-1)=\alpha_\kappa^{(n)}.$$

Άρα τελικά $\alpha_1^{(n+1)} = \frac{1}{2\kappa} < \alpha_1^{(n)}$ άρα $\alpha_{n+1}<\alpha_n$.

Προφανώς: $\alpha_{n+1}>\beta_{n+1}$ και επίσης:

$$\beta_n^{(n+1)} = \frac{1}{2n}\left(\sqrt{4n^2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+1}-1\right) >$$

$$> \left(\sqrt{4n^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}-1\right) = \frac{1}{2n}(2n-2)=\beta_n^{(n)}$$

και ομοίως με τα παραπάνω $\beta_1^{(n+1)} > \beta_1^{(n)}$ άρα

$\beta_{n+1}>\beta_n$ είναι: $\lim_n(\alpha_n-\beta_n)=0$

Πράγματι έχουμε:

$$\alpha_n^{(n)}-\beta_n^{(n)} = 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}, \text{ και}$$

$$\alpha_\kappa^{(n)}-\beta_\kappa^{(n)} = \frac{1}{2\kappa}(\sqrt{4\kappa^2\alpha_{\kappa+1}^{(n)}+1}-\sqrt{4\kappa^2\beta_{\kappa+1}^{(n)}+1}) =$$

$$= \frac{1}{2\kappa}\cdot\frac{4\kappa^2(\alpha_{\kappa+1}^{(n)}-\beta_{\kappa+1}^{(n)})}{\sqrt{4\kappa^2\alpha_{\kappa+1}^{(n)}+1}+\sqrt{4\kappa^2\beta_{\kappa+1}^{(n)}+1}}$$

$$< \frac{(\alpha_{\kappa+1}^{(n)}-\beta_{\kappa+1}^{(n)})}{\sqrt{\alpha_{\kappa+1}^{(n)}}+\sqrt{\beta_{\kappa+1}^{(n)}}} < \alpha_{\kappa+1}^{(n)}-\beta_{\kappa+1}^{(n)}$$

διότι $\sqrt{\alpha_{\kappa+1}^{(n)}}+\sqrt{\beta_{\kappa+1}^{(n)}} > 1$, άρα: αν

$$n > 2,\ \alpha_\kappa^{(n)} - \beta_\kappa^{(n)} < \frac{1}{n}$$

άρα και $$0 < \alpha_n - \beta_n < \frac{1}{n}$$

συνεπώς $$\lim_n (\alpha_n - \beta_n) = 0$$

Συνεπώς υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\beta_n, \alpha_n) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Η σχέση $\sqrt{\alpha_{\kappa+1}^{(n)}}+\sqrt{\beta_{\kappa+1}^{(n)}} > 1$ προκύπτει από τα εξής:

αν $n > 2$ είναι $\beta_n^{(n)} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Με επαγωγή και επειδή:

$$\frac{1}{2\kappa}\left(\sqrt{4\kappa^2 \cdot \frac{1}{2} + 1} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2\kappa}(\sqrt{2\kappa^2+1} - 1) \geq \frac{1}{2\kappa}((\kappa+1)-1) = \frac{1}{2}$$

για $\kappa \geq 2$ έχουμε: $\beta_\kappa^{(n)} > \frac{1}{2}$.

Επίσης $\beta_1^{(n)} = \frac{1}{2}(\sqrt{4\beta_2^{(n)}+1} - 1) >$

$$> \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\frac{1}{4}.$$

Άρα: $\alpha_\kappa^{(n)} > \beta_\kappa^{(n)} > \frac{1}{4}$ αν $1 \leq \kappa \leq \nu$ άρα:

$$\sqrt{\alpha_\kappa^{(n)}} + \sqrt{\beta_\kappa^{(n)}} > \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ κ.τ.λ.)}$$

Τη λύση του 6ου θέματος έδωσε ο Α. Μελάς.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο Διάλογος στην τάξη:

«***Καθηγητής***: Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x-25}{1975} + \frac{x-23}{1977} + \frac{x-21}{1979} + \frac{x-19}{1981} +$$

$$+ \frac{x-17}{1983} + \frac{x-15}{1985} =$$

$$= \frac{x-1975}{25} + \frac{x-1977}{23} + \frac{x-1979}{21} +$$

$$\frac{x-1981}{19} + \frac{x-1983}{17} + \frac{x-1985}{15}.»$$

Ένας Μαθητής: *«Πολύ δύσκολη άσκηση κύριε, ούτε μέχρι το 2.000 δεν πρόκειται να τη λύσουμε». Μπορείτε εσείς να λύσετε την πολύ δύσκολη άσκηση;*

Θέμα 2ο Στο επίπεδο δίνονται 1985 διαφορετικά σημεία $A_1, A_2, \dots A_{1985}$. Να δείξετε ότι σε κάθε κύκλο του επιπέδου που έχει ακτίνα ίση με 1 υπάρχει σημείο Μ, τέτοιο ώστε

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{1985} \geqslant 1985.$$

Θέμα 3ο Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς ν με $86 \leq \nu \leq 101$ που ικανοποιούν *μόνο μια* από τις παρακάτω συνθήκες:

α) Ο ν είναι άρτιος
β) Ο ν διαιρείται με τον 3
γ) Ο ν διαιρείται με τον 2 ή τον 3
δ) Ο ν δεν διαιρείται με τον 3, αλλά διαιρείται με τον 4
ε) Ο ν δεν διαιρείται με τον 3, και δεν διαιρείται με τον 4
στ) Ο ν διαιρείται με τον 3, αλλά δεν διαιρείται με τον 6

συνέχεια στη σελίδα 256

συνέχεια από τη σελίδα 230

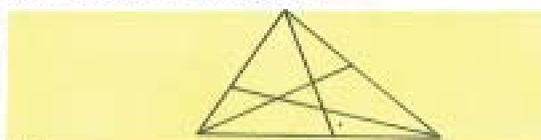
ζ) Ο ν διαιρείται με τον 8 ή τον 9
η) Ο ν διαιρείται με τον 3 και τον 4

Θέμα 4ο Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Μπορούμε να χωρίσουμε το ΑΒΓ σε δυο ίσα τρίγωνα φέρνοντας από κάποια κορυφή του μια ευθεία;

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θέμα 1ο Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό ν που είναι πολλαπλάσιο του 1985 και αν το διαιρέσουμε με το 1981 δίνει υπόλοιπο 12.

Θέμα 2ο α) Στο παρακάτω σχήμα πόσα τρίγωνα νομίζετε ότι υπάρχουν;



β) Αν για τους αριθμούς α, β, γ, δ, ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \gamma^2 + \delta^2 = 1,\ \alpha\gamma + \beta\gamma = 0$$

να υπολογίσετε την παράσταση $\alpha\beta + \gamma\delta$.

Θέμα 3ο — Θέμα 4ο
Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου επιλέγουν δυο από τα θέματα της Α΄ Λυκείου.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί μη μηδενικοί αριθμοί, α, β, γ ώστε οι εξισώσεις:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1)$$
$$\beta x^2 + \gamma x + \alpha = 0 \quad (2)$$
$$\gamma x^2 + \alpha x + \beta = 0 \quad (3)$$

να έχουν λύσεις (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1) αντίστοιχα, όπου x_1, x_2, x_3 πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί ανά δύο.

Θέμα 2ο Ας είναι Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και Ρ σημείο στην προέκταση της ημιευθείας ΓΔ. Αν Σ η τομή των ΑΓ, ΡΜ να δείξετε ότι $\widehat{MN\Sigma} = \widehat{MNP}$.

Θέμα 3ο Τα μέτρα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι οι αριθμοί α, β, γ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*_+$)

i) Να δείξετε ότι και οι αριθμοί

$$\frac{\alpha}{2\alpha+1},\ \frac{\beta}{2\beta+1},\ \frac{\gamma}{2\gamma+1},$$

είναι μέτρα πλευρών τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

ii) Τι πρέπει να συμβαίνει ώστε τα τετράγωνα των μέτρων των πλευρών του ενός τριγώνου να είναι τα μέτρα των πλευρών του άλλου;

Θέμα 4ο α) Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{1, 2, \ldots, 1985\}$$

και μια συνάρτηση $f : A \to A$ που είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Να δείξετε ότι το γινόμενο:

$$(f(1) + 1).\ (f(2) + 2) \ldots (f(1985) + 1985)$$

είναι άρτιος αριθμός.

β) Να βρείτε μια πολυωνυμική συνάρτηση α΄ βαθμού γνωρίζοντας ότι $\phi(0) \neq 0$ και ότι η εξίσωση: $f(x \cdot f(x)) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Από την επιτροπή διαγωνισμού της ΕΜΕ πήραμε τα παρακάτω Γ΄ Λυκείου θέματα του Πανελλήνιου Μαθητικού διαγωνισμού, που προτείνουμε στους αναγνώστες μας για λύση:

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο α) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = (\sqrt{9 + 2\sqrt{20}})^x + (\sqrt{9 + 2\sqrt{20}})^x - 2$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια
ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
iii) Είναι η f συνάρτηση επί;

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και την εξίσωση $f(x) - f(-x) = x$ (1).
Αν η (1) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων να δείξετε ότι το πλήθος των λύσεων είναι περιττός αριθμός.

Θέμα 2ο Θεωρούμε ευθεία xx΄ τα σημεία της Α, Β και ένα σημείο 0 που δεν ανήκει στην

xx΄. Να δείξετε ότι για να ανήκει το σημείο Γ στην ευθεία xx΄, πρέπει και αρκεί να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $κ + λ = 1$, ώστε $\vec{ΟΓ} = κ \cdot \vec{ΟΑ} + λ\vec{ΟΒ}$. Ακόμη να προσδιορίσετε τις τιμές των κ, λ ώστε: (i) Το Γ να ανήκει στην ημιευθεία x΄A (ii) Το Γ να ανήκει στο τμήμα AB (iii) Το Γ να ανήκει στην ημιευθεία Bx.

Θέμα 3ο Ας είναι $Σ = \{(α, β)$ με $α, β \in \mathbb{R}\}$ για το οποίο (i) υπάρχει ζευγάρι $(α, β) \in Σ$, ώστε $α \neq 0, β \neq 0, α \neq β$ ii) Αν $(x_1, ψ_1) \in Σ$, $(x_2, ψ_2) \in Σ$ και $λ \in \mathbb{R}$, τότε

$$(x_1 + x_2, ψ_1 + ψ_2) \in Σ, (λx_1, λψ_1) \in Σ,$$

$$(x_1 x_2, ψ_1 ψ_2) \in Σ.$$

Να δείξετε ότι $Σ = \mathbb{R}^2$

Θέμα 4ο Για κάθε πραγματικό αριθμό κ, συμβολίζουμε με L(κ) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $[x] = κx - 1985$ ($[x]$ το ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$).

Να δείξετε ότι:

i) Αν $κ > 2$, τότε $1 \leq L(κ) \leq 2$

ii) Αν $0 < 1986κ < 1$ τότε $L(κ) = 0$

iii) Υπάρχει $κ \in \mathbb{R}$ με $L(κ) = 1985$.

Από το Συνάδελφο Γ. Τζίντζιφα (Θεσ/νίκη) πήραμε για τη στήλη των Ολυμπιάδων της παρακάτω ασκήσεις:

1) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο και το εγγεγραμμένο σ' αυτό τρίγωνο ΔΕΖ έχει εγγεγραμμένο κύκλο, ομόκεντρο του κύκλου του περιγεγραμμένου στο ΑΒΓ.

Τι συμπέρασμα βγάζετε για το ΔΕΖ; Μήπως είναι κι' αυτό ισόπλευρο;

2) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Να βρείτε τη θέση σημείου Μ στο τρίγωνο ΑΒΓ, ώστε αν ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ είναι οι κάθετες στις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ περνούν από το ίδιο σημείο.

Αλληλογραφία:

Θεοχ. Νίκου (Τρίκαλα): Συνάδελφε, πήραμε τις θαυμάσιες λύσεις των θεμάτων της 2ης Β.Μ.Ο. που μας έστειλες πολύ αργά. Σ' ευχαριστούμε πάντως και περιμένουμε νέα εργασία σου.

Γ. Τζίντζίφα (Θεσ/νίκη:) Συνάδελφε πήραμε τις ωραίες ασκήσεις καθώς και το άλλο υλικό που μας έστειλες και σ' ευχαριστούμε θερμά. Περιμένουμε νέα εργασία σου.

Αθήνα 6-9-82

...ύστερα από σύμφωνη γνώμη της Επιτροπής Κρίσεως Περιοδικών του ΥΠΕΠΘ, επιτρέπουμε την κυκλοφορία στα σχολεία των περιοδικών α) «Ευκλείδης» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας...

Ο ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΠΕΤΡΟΣ ΜΩΡΑΛΗΣ

- Νοιώθουμε την ανάγκη να εκφράσουμε απ' αυτό το σημείο τις ολόθερμες ευχαριστίες μας, σ' όλους τους φίλους — αναγνώστες που είχαν τη καλοσύνη να συνδράμουν στην έκδοση του περιοδικού της φετεινής χρονιάς, με οποιονδήποτε τρόπο, από τον απλό λόγο τους μέχρι την καλοδιάθετη και διεξοδική πολλές φορές κριτική θέση τους.

- Πιστεύουμε ότι η συμμετοχή σας θά ναι το ίδιο καθοριστική και για τη νέα χρονιά.

- Περιμένουμε συνεργασίες και προτάσεις στη διεύθυνση του περιοδικού μέχρι 30 Μαΐου '86

με Ευχές για καλό Καλοκαίρι
η Σ.Ε.

3η εθνική Μαθηματική ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 1986

Επιτροπή διαγωνισμών

- **Τα θέματα που προτάθηκαν από όλες τις χώρες στην 27η διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα**
- **Στιγμιότυπα απ' την εθνική Ολυμπιάδα '86 (θέματα, λύσεις, αθλοθέτες)**

Στο Λύκειο Καματερού Αθήνας έγινε στις 20/12/86 η 3η ετήσια Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα και συμμετείχαν 179 μαθητές οι οποίοι διακρίθηκαν στον πανελλήνιο διαγωνισμό της 8/11/86.

Γι' αυτή την ευγενική πνευματική άμιλλα ο γραμματέας της επιτροπής και μέλος του διοικητικού συμβουλίου της Μαθηματικής Εταιρείας κ. Γιώργος Ωραιόπουλος τόνισε στην εκδήλωση απονομής των βραβείων που έγινε στο Πνευματικό κέντρο του Δήμου Αθήνας:

«Τα παιδιά που διαγωνίζονται σήμερα λατρεύουν τα μαθηματικά. Και η προσπάθειά τους μόνο είναι συγκινητική. Από αυτούς τους 179 μαθητές θα επιλεγούν οι καλύτεροι 12 οι οποίοι ύστερα από ειδική προετοιμασία θ' αποτελέσουν την Εθνική Μαθηματική Ομάδα που θα διαγωνιστεί την άνοιξη στη «Μαθηματική Βαλκανιάδα». Επίσης απ' αυτήν την ομάδα θα επιλεγούν οι μαθητές που θα εκπροσωπήσουν τη χώρα μας στη «Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα» που θα γίνει το καλοκαίρι στην Κούβα».

Διακρίθηκαν 31 μαθητές που ύστερα από ειδική προετοιμασία θα επιλεγούν οι 12 που θα αποτελέσουν και την Εθνική Μαθηματική ομάδα.

Αναλυτικά τα βραβεία και οι έπαινοι κατά τάξη ήταν:

Από την Γ' Λυκείου

1ο βραβείο Χ. Ταμβάκης 2ο Λύκειο Αγίας Παρασκευής.

2ο βραβείο Σ. Κουτρουμπής Λύκειο Νέας Ερυθραίας.

2ο βραβείο Σ. Παπαποστόλου 2ο Λύκειο Ρόδου.

3ο βραβείο Δ. Μανουσάκη 2ο Λύκειο Χανίων.

'Επαινοι:

Θ. Θεοδοσόπουλος Λύκειο Ανατόλια Θεσσαλονίκης.
Π. Βλάμος Λύκειο Μοσχάτου.
Π. Μαραγκουδάκης 4ο Χανίων.
Χ. Γιάτσης 1ο Λύκειο Τρικάλων.
Β. Κομπότης Ευαγγελική Σχολή Ν. Σμύρνης.
Θ. Παπαδόπουλος Ενιαίο Πολυκλαδικό Λύκειο Βέροιας.
Α. Τσιρογιάννης 3ο Λύκειο Τούμπας.

Από τη Β' Λυκείου

1ο βραβείο Τ. Μαυροειδής Αμερικανικό Κολλέγιο Αθήνας

1ο βραβείο Γ. Ζιάμας 3ο Λύκειο Λάρισας

2ο βραβείο Γ. Ιβρισιμιτζής 3ο Λύκειο Χαριλάου Θεσσαλονίκης.

3ο βραβείο Σ. Γεωργιακάκη 8ο Λύκειο Αθηνών.

3ο βραβείο Δ. Κοντοκώστας 1ο Λύκειο Τρικάλων.

3ο βραβείο Γ. Προσπαθόπουλος 1ο Λύκειο Καλλιθέας.

'Επαινοι:

Κ. Βλάχος 10 Λύκειο Ιωαννίνων
Χ. Τέας 3ο Λύκειο Τρικάλων.
Σ. Παντέλης 1ο Λύκειο Σερρών.
Α. Παπαδήμας 4ο Λύκειο Ιωαννίνων.
Χ. Σαρτζετάκης 2ο Λύκειο Καλλιθέας
Σ. Βαμβάκος Γερμανική Σχολή Αθηνών
Μ. Παπαδοπούλη 2ο Λύκειο Ηρακλείου.

Από την Α' Λυκείου

1ο βραβείο Χ. Αθανασιάδης 1ο Λύκειο Κάτω Τούμπας Θεσσαλονίκης.

2ο βραβείο Δ. Μαυροειδής 5ο Λύκειο Χανίων.

'Επαινοι:

Α. Οικονόμου 35ο Λύκειο Αθήνας.
Γ. Τριανταφυλλίδης Αμερικανικό Καλλέγιο.

Από την Γ' Γυμνασίου

1ο βραβείο Ματέκοβιτς 1ο Γυμνάσιο Ζωγράφου.

Τέλος δόθηκαν έπαινοι στους μαθητές:

Δ. Σταθόπουλο 3ο Ζωγράφου
Π. Νεράτζη 1ο Λύκειο Σερρών
Α. Τσίκα 3ο Λύκειο Πύργου
και στους
Γ. Καρακώστα, Β. Γαγάνη, Λ. Τσίκα, Α. Ποντίκα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Μαθηματική Εταιρεία για να βοηθήσει περισσότερο τα παιδιά που αγαπούν τα μαθηματικά οργανώνει στη χώρα μας **το Α΄ Βαλκανικό Μαθηματικό Σχολείο**, στο οποίο θα φοιτούν για ένα καλοκαίρι μαθητές από όλες τις **Βαλκανικές Χώρες**.

Θέματα της 3ης ΕΘΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑΣ

γ΄ γυμνασίου

1ο ΘΕΜΑ: Χρωματίζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου με δυο χρώματα. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο σημεία του επιπέδου (τουλάχιστον), που έχουν το ίδιο χρώμα και απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1.

2ο ΘΕΜΑ: Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-7)=1680$$

3ο ΘΕΜΑ: Να οριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β για να είναι πολυώνυμο $\Pi(x)=x^{\nu+1}+\alpha x+\beta$ διαιρετό με το $(x-1)^2$. Κατόπιν να βρεθεί το πηλίκο $\Pi(x):(x-1)^2$ $\nu \in N^*$

4ο ΘΕΜΑ: Αν $x+y+z=x^2+y^2+z^2=$

$$=x^3+y^3+z^3=1 \quad \text{με} \quad x, y, z \in R,$$

να δειχτεί ότι, ένας τουλάχιστον απ' τους x, y, z ισούται με μηδέν.

α΄ λυκείου

1ο ΘΕΜΑ: Είναι γνωστό ότι οι διαγώνιες του τετραγώνου, όπως και του κανονικού πενταγώνου είναι ίσες. Να βρείτε το μεγαλύτερο φυσικό αριθμό ν, για τον οποίο ένα κυρτό ν-γώνο έχει όλες τις διαγώνιες ίσες.

2ο ΘΕΜΑ: Να δείξετε ότι η παράσταση

$$A=\frac{25}{2}(\nu+2-\sqrt{2\nu+3})$$

είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού, αν η παράσταση Α είναι ακέραιος αριθμός $(\nu \in \mathbb{N})$.

3ο ΘΕΜΑ: Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α η παράσταση

$$A=(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-6)+10$$

είναι πάντα θετική.
Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση Α και για ποιές τιμές του α;

4ο ΘΕΜΑ: Θεωρούμε ένα κυρτό 100-γωνο $A_1A_2 \ldots A_{100}$. Φέρνουμε τη διαγώνιο $A_{10}A_{81}$ που το χωρίζει σε δύο κυρτά πολύγωνα Π_1, Π_2. Πόσες κορυφές και πόσες διαγώνιες έχει καθένα από τα Π_1, Π_2;

β΄ λυκείου

1ο ΘΕΜΑ: Χρωματίζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου με 3 (τρία) χρώματα. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία του επιπέδου που έχουν το ίδιο χρώμα και απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 1.

2ο ΘΕΜΑ: Αν για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x)+f(x+1)+f(x+2)+\ldots+f(x+1986)=0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι η f είναι περιοδική και να βρεθεί μια περίοδος της.

3ο ΘΕΜΑ: Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α η ανίσωση:

$$\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}>\alpha, \ x \in \mathbb{R}$$

4ο ΘΕΜΑ: Έστω Α, Β δύο σημεία στο εσωτερικό του κύκλου (O, R) και Μ σημείο του κύκλου. Έστω A_1, B_1 οι τομείς του κύκλου με τις ΜΑ, ΜΒ αντίστοιχα. Έστω τέλος Γ το μέσο του ΑΒ και $\Gamma_1 = C \cap M\Gamma$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{MA}{AA_1}+\frac{MB}{BB_1}>2\frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma_1}$$

γ΄ λυκείου

1ο ΘΕΜΑ: (α) Να δείξετε ότι κάθε υπο-ομάδα (Α, +) της ομάδας (Ζ, +) είναι της μορφής $A=\nu\cdot\mathbb{Z}$ για κάποιο $\nu \in Z$ όπου $\nu\cdot\mathbb{Z}=\{\nu\cdot x \,/\, x\in\mathbb{Z}\}$.

(β) Με τη βοήθεια της (α) να δείξετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δ των μη μηδενικών ακέραιων αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ δίνεται από τη σχέση:

$$\delta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_\nu\alpha_\nu \quad \text{με} \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, \ i=1, 2, \ldots, \nu$$

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ είναι ο κοινός διαιρέτης τους που διαιρείται από κάθε άλλο κοινό διαιρέτη των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

2ο ΘΕΜΑ: Αν $A=(\alpha_{ij})$ είναι ένας μxν πίνακας και $B=(\beta_{k\rho})$ είναι ένας νxμ πίνακας με $\mu>\nu$ να δείξετε ότι: $D(A\cdot B)=0$

3ο ΘΕΜΑ: Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ακολουθία x_ν με όρους φυσικούς αριθμούς και γνησίως αύξουσα ώστε: $x_\nu+x_\kappa=x_{\nu\cdot\kappa}\ \forall \nu, \kappa \in N^*$.

4ο ΘΕΜΑ: Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε την ευθεία $y=3x$ και σημείο $A(4, 3)$. Να βρείτε πάνω στην ευθεία $y=3x$ σημείο Β ώστε το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{OB\Gamma}$ να είναι ελάχιστο, όπου

$$\Gamma = AB \cap OX$$

Λύσεις των θεμάτων Ολυμπιάδας

(Μερικές απ' αυτές είναι λύσεις των βραβευθέντων μαθητών. Αναφέρεται σχετικά το όνομα κάτω από την λύση)

γ' γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1ο Θεωρούμε ότι χρωματίσαμε τα σημεία ενός επιπέδου α σε δύο χρώματα (ας είναι άσπρα και μπλέ), και θεωρούμε ότι δύο οποιοδήποτε σημεία του α, P_1 και P_2, έχουν μεταξύ τους $(P_1P_2) = 1$, (το P_1 — άσπρο και P_2 — μπλέ).

Κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά P_1P_2 και με κορυφές P_1, P_2 και P_3, $P_3 \in \alpha$ και τότε πρέπει να έχει ένα απ' τα δύο χρώματα: άσπρο ή μπλέ. Αν είναι άσπρο τότε $(P_1\ P_3) = 1$, αν μπλέ τότε $(P_2,\ P_3) = 1$, δηλαδή τότε θα υπάρχει τουλάχιστον 2 σημεία του επιπέδου α που απέχουν μεταξύ τους 1.

ΘΕΜΑ 2ο $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$

$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

Παρατηρούμε ότι $x-4, x-5, x-6$ και $x-7$ είναι διαδοχικοί αριθμοί. Το 1680 μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή γινομένου διαδοχικών αριθμών σαν:

$1680 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ ή $1680 = (-5) \cdot (-6)(-7) \cdot (-8)$

και έχουμε:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow x = 12$

2) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = (-5)(-6)(-7)(-8) \Rightarrow x = -1$

ΘΕΜΑ 3ο Αν $(x-1)^2 \mid \Pi(x) \Rightarrow$

Δηλαδή

$\Pi(x) = (x-1)(x^\nu + x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x^3 + x^2 + x - \beta)$

Επειδή $(x-1)^2 \mid \Pi(x)$, ονομάζουμε

$$P(x) = x^\nu + x^{\nu-1} + \dots + x^2 + x - \beta$$

και τότε πρέπει

$$(x-1) \mid P(x) \Leftrightarrow P(1) = 0 \Rightarrow \nu \cdot 1 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \nu$$

Συνεπώς, $\beta = \nu \Rightarrow \alpha = -\nu - 1$ και τότε

$\Pi(x) = x^{\nu+1} + (-\nu-1)x + \nu$, και $(x-1)^2 \mid \Pi(x)$.

Τώρα έχουμε

$\Pi(x) = (x-1)(x^\nu + x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x^2 + x - \nu) = \dots$

$= (x-1)^2(x^{\nu-1} + 2x^{\nu-2} + 3x^{\nu-3} + 4x^{\nu-4} + 5x^{\nu-5} + \dots$

$\dots + (\nu-3)x^3 + (\nu-2)x^2 + (\nu-1)x + \nu)$

Άρα, όταν διαιρούμε το $\Pi(x)$ με το $(x-1)^2$, βρίσκουμε το πηλίκο

$\varphi(x) = x^{\nu-1} + 2x^{\nu-2} + 3x^{\nu-3} + 4x^{\nu-4} + \dots + (\nu-2)x^2 + (\nu-1)x + \nu$

ΘΕΜΑ 4ο Έχουμε:

$x^3 + y^3 + z^3 = (x^3 + y^3 + z^3) - 3xy(x+y) -$

$- 3xz(x+z) - 3yz(y+z) - 6xyz \Rightarrow$

$1 - 3[xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z) + 2xyz] = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy(x+y) + xz(x+z) + xyz + yz(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow$

$xy(x+y) + xz(x+z) + xyz + yz = 0 \Leftrightarrow (\dots)\ 2xyz = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 0$ ή $z = 0$

Οι λύσεις έχουν δοθεί όλες απ' την Α. Ματέκοβιτς
(α' βραβείο της 3ης Εθνικής Ολυμπιάδας)

α' Λυκείου

ΘΕΜΑ 1ο Έστω μια πλευρά του πολυγώνου που έχει όλες τις διαγώνιές του ίσες, και την ονομάζουμε $A_\nu A_{\nu+1}$. Σύμφωνα με τα δεδομένα θα είναι

$A_{\nu-2}A_\nu = A_{\nu-2}A_{\nu-1} = A_{\nu-3}A_\nu = A_{\nu-3}A_{\nu-1} = \dots = A_{\nu+3}A_\nu = A_{\nu+3}A_{\nu+1}$

Τότε όμως τα τρίγωνα $A_{\nu-2}A_\nu A_{\nu+1}$, $A_{\nu-3}A_\nu A_{\nu+1}$, ... $A_2A_\nu A_{\nu+1}$, ..., $A_{\nu+3}A_\nu A_{\nu+1}$ είναι ισοσκελή με βάση την $A_\nu A_{\nu+1}$ και μάλιστα και με τις άλλες πλευρές τους ίσες. Αλλά τότε τα σημεία $A_{\nu-2}, A_{\nu-3}, \dots A_2, A_1, \dots A_{\nu+4}, A_{\nu+3}$ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του $A_\nu A_{\nu+1}$, γιατί αν το $A_{\nu-2}$ (ένα οποιοδήποτε) π.χ. δεν βρισκόταν σ' αυτήν τότε

$$A_{\nu+3}M + MA_{\nu+1} > A_{\nu+1}A_{\nu+3} \xrightarrow{MA_\nu = MA_{\nu+1}} A_\nu A_{\nu+3} > A_{\nu+3}$$

άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $A_\nu A_{\nu+3} = A_{\nu+1}A_{\nu+3}$. Τότε όμως αφού όλα τα σημεία εκτός από 4 (τα Γ, A_ν, $A_{\nu+1}$, Δ) βρίσκονται στην μεσοκάθετο της $A_\nu A_{\nu+1}$ αν υποθέσουμε ότι αυτά είναι μεγαλύτερα του 1 σε πλήθος τότε μια πλευρά του πολυγώνου θα βρισκόταν στη μεσοκάθετο αυτή, το οποίο είναι άτοπο γιατί το πολύγωνο είναι κυρτό και δεν μπορεί τα A_ν, $A_{\nu+1}$ να βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδα με ακμή μια πλευρά. Άρα το μέγιστο πλήθος αυτών των σημείων είναι το 1, και συνεπώς το μέγιστο πλήθος πλευρών το 5. Άρα ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 5.

(Χ. Αθανασιάδης)

ΘΕΜΑ 2ο Αφού Α ακέραιος σημαίνει ότι ο $(2\nu+3)$ είναι τέλειο τετράγωνο και επειδή $(2\nu+3)$ περιττός, πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο περιττού αριθμού. Άρα $2\nu + 3 = (2\kappa+1)^2$ δηλαδή $2\nu + 3 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1$ οπότε $\nu = 2\kappa^2 + 2\kappa - 1$. Τότε η Α θα γραφεί

$A = \frac{25}{2}[2\kappa^2 + 2\kappa - 1 + 2 - \sqrt{2(2\kappa^2 + 2\kappa - 1) + 3}]$ δηλαδή

$$A = \frac{25}{2}[2\kappa^2 + 2\kappa + 1 - \sqrt{4\kappa^2 + 4\kappa + 1}] \text{ άρα}$$

$$A = 25\kappa^2 \text{ δηλαδή } A = (5\kappa)^2.$$

ΘΕΜΑ 3ο Σύμφωνα με την ταυτότητα του Νεύτωνα έχουμε:

$$A = (\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-6) + 10 =$$

$= \alpha^4 - (1+3+4+6)\alpha^3 + (3+4+6+12+18+24)\alpha^2 -$

$- (12+18+24+72)\alpha + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 10 =$

$= \alpha^4 - 14\alpha^3 + 67\alpha^2 - 126\alpha + 82 =$

$$= (\alpha^2)^2 + 49\alpha^2 + 9^2 - 14\alpha^3 + 18\alpha^2 - 126\alpha + 1 =$$

$$= (\alpha^2)^2 + (-7\alpha)^2 + 9^2 + 2\alpha^2(-7\alpha) + 2\cdot\alpha^2\cdot 9 + 2(-7\alpha)\cdot 9 + 1 =$$

$$= (\alpha^2 - 7\alpha + 9)^2 + 1 > 0$$

αφού $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geqslant 0 \wedge 1 > 0) \Rightarrow x^2 + 1 > 0$

Το ελάχιστο της $(\alpha^2 - 7\alpha + 9)^2 + 1$, αφού $(\alpha^2 - 7\alpha + 9)^2 \geqslant 0$, και $1 =$ σταθερό, θα είναι όταν

$$(\alpha^2 - 7\alpha + 9)^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο Α είναι η 1 για

$$\alpha = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(Δηλαδή $\alpha = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$ ή $\alpha = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$.)

(Χ. Αθανασιάδης)

ΘΕΜΑ 4ο Το Πολύγωνο Π_1 έχει από την κορυφή του, A_1 έως την κορυφή A_{42}, 42 κορυφές και από την κορυφή A_{43} έως την A_{100} ακόμα 20 κορυφές. Κάθε κορυφή ενός ν-γώνου συνδέεται με διαγώνιες, με $\nu - 3$ κορυφές του ν-γώνου.

Άρα το Π_1 έχει συνολικά $42 + 20 = 62$ κορυφές.

Έτσι το πλήθος διαγωνίων $= \frac{\nu(\nu - 3)}{2}$ ($\nu =$ πλήθος κορυφών). Εφαρμόζοντας αυτό τον τύπο στο πολύγωνο Π_1 έχουμε:

$$\text{πλήθος διαγωνίων} = \frac{62(62 - 3)}{2} = \frac{62 \cdot 59}{2} = \frac{3658}{2} = 1829$$

Για το Π_2 έχουμε 40 κορυφές, από την κορυφή A_{43} έως την A_{82}. Εφαρμόζοντας τον τύπο των διαγωνίων έχουμε:

$$\text{πλήθος διαγωνίων} = \frac{40(40 - 3)}{2} = \frac{40 \cdot 37}{2} = \frac{1480}{2} = 740.$$

(Α. Οικονόμου)

β' λυκείου

ΘΕΜΑ 1ο Θεωρούμε δυό ρόμβους

$$A_1A_2A_3A_4 \quad \text{και} \quad A_1A_5A_6A_7$$

με πλευρά ένα και γωνία 60° ώστε να είναι και η μια διαγώνιος ίση με 1. Στρέφουμε τον ένα με την κοινή κορυφή για κέντρο ώστε να είναι $A_3A_6 = 1$. Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τρία σημεία ομοχρωματικά. Από την ίδια αρχή έχουμε ότι δυο τουλάχιστον από αυτά ανήκουν στον ίδιο ρόμβο. Έστω στον πρώτο θα είναι υποχρεωτικά τα A_2, A_3. Το τρίτο σημείο αν δεν είναι το A_6 θα απέχει από το A_1 απόσταση ίση με 1. Αν είναι το A_6 θα έχουμε $A_3A_6 = 1$. Όπως δηλαδή να πάρουμε τα τρία ομοχρωματικά σημεία δύο τουλάχιστον απέχουν 1.

(Γ. Ιβραιμτζής)

ΘΕΜΑ 2ο

$$f : f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) + \ldots + f(x + 1986) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει και για $x + 1$ άρα

$$f(x + 1) + f(x + 2) + \ldots + f(x + 1987) = 0 =$$

$$= [f(x) + f(x + 1) + f(x + 2) + \ldots + f(x + 1986)] +$$

$$+ f(x + 1987) - f(x) = 0 + f(x + 1987) - f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x + 1987) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x + 1987)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

άρα f περιοδική με μια περίοδο ίση με 1987.

(Τ. Μαυροειδής)

ΘΕΜΑ 3ο Με $|x| \leq \alpha$ (1) πρέπει το α να μην είναι αυστηρώς αρνητικό αφού $\alpha \geqslant |x| \geqslant 0$. Σε περίπτωση που $\alpha < 0$ η ανισότητα δεν ορίζεται στο $\mathbb{R}$ γιατί ένα από τα $\alpha + x$, $\alpha - x$ είναι αρνητικό.

Αν τώρα $\alpha \geqslant x$ και $\alpha \geqslant 0$ θάχουμε

$$\alpha + x + \alpha - x + 2\sqrt{(\alpha + x)(\alpha - x)} > \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - x^2} > \alpha^2 \Rightarrow 2\sqrt{\alpha^2 - x^2} > \alpha^2 - 2\alpha.$$

Από την (1) η $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ είναι πάντα θετική. Η παράσταση $\alpha^2 - 2\alpha$ είναι αρνητική για $\alpha < 2$ γιατί

$$\alpha^2 - 2\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 2\alpha \Rightarrow \alpha < 2.$$

Για α συνεπώς τέτοιο ώστε $0 < \alpha < 2$ η ανισότητα ικανοποιώντας για κάθε x που όμως υπακούει στην (1) δηλαδή για κάθε x τέτοιο ώστε $\alpha > |x| \Rightarrow -\alpha < x < \alpha$.

Για την τιμή $\alpha = 0$ η ανισότητα πάλι είναι αδύνατη γιατί για να έχουν νόημα οι παραστάσεις $\sqrt{\alpha + x}$, $\sqrt{\alpha - x}$ θα είναι $x = 0$ και θα προκύψει $0 > 0$ άτοπο.

Αν τώρα $\alpha > 2$ τα δυο μέλη της ανισότητας

$$2\sqrt{\alpha^2 - x^2} > \alpha^2 - 2\alpha$$

είναι θετικά υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$4\alpha^2 - 4x^2 > \alpha^4 + 4\alpha^2 - 4\alpha^3 \Leftrightarrow -4x^2 > \alpha^4 - 4\alpha^3.$$

Παρατηρούμε ότι $-4x^2 < 0$ οπότε θα πρέπει να είναι και

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 < 0 \Rightarrow \alpha^4 < 4\alpha^3 \Rightarrow \alpha < 4.$$

Η ανισότητα λοιπόν είναι αδύνατη για $\alpha > 4$.

Αν $2 \leqslant \alpha \leqslant 4$ η ανισότητα γίνεται

$$-4x^2 > \alpha^4 - 4\alpha^3 \Rightarrow 4x^2 < 4\alpha^3 - \alpha^4 \Rightarrow 4x^2 < \alpha^3(4 - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{\alpha^3(4 - \alpha)}{4} \Rightarrow x < \frac{\sqrt{\alpha^3(4 - \alpha)}}{2}$$

Δεν μένει παρά να εξετάσουμε αν αυτές οι τιμές του υπακούουν στην (1). Αρκεί να είναι

$$\alpha < \frac{\sqrt{\alpha^3(4 - \alpha)}}{2} \Rightarrow 2\alpha < \sqrt{\alpha^3(4 - \alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 < 4\alpha^3 - \alpha^4 \Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2(\alpha^2 - 3\alpha + 4) < 0 \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 4 < 0.$$

Το τριώνυμο αυτό όμως έχει διακρίνουσα μικρότερη του μηδενός συνεπώς είναι πάντα θετικό. Δηλαδή το α δεν μπορεί να ανήκει ούτε στο διάστημα [2, 4].

(Γ. Ιβραιμτζής)

ΘΕΜΑ 4ο (Ι) Έστω $AB \parallel A_1B_1$ τότε από θ. Θαλή:

$$\frac{MA}{AA_1} = \frac{MB}{BB_1} \Rightarrow \frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} = 2 \cdot \frac{MA}{AA_1} = 2\,\frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma'} > 2\,\frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma_1}$$

αφού $\Gamma\Gamma' < \Gamma\Gamma_1$.

(ΙΙ) AB όχι παράλληλη με A_1B_1 τότε είτε η παράλληλη των AB από το A_1 τέμνει την (MB_1) στην προέκταση της είτε η παράλληλη οπότε AB απ' το B_1 τέμνει την (MA_1) στην προέκταση της. Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας φυσικά ότι ισχύει το πρώτο. Τότε από Θαλή

$$\frac{MA}{AA_1} = \frac{MB}{BB_2} < \frac{MB}{BB_1}$$

αφού $(BB_1) < (BB_2)$ άρα $\frac{MA}{AA_1} < \frac{MB}{BB_1}$ (1)

Επίσης $\frac{MA}{AA_1} = \frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma''} > \frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma_1}$ (2)

(αφού $\Gamma\Gamma_1 > \Gamma\Gamma''$)

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} > 2\,\frac{MA}{AA_1} > 2\,\frac{M\Gamma}{\Gamma\Gamma_1}$$

(Τ. Μαυροειδής)

γ' λυκείου

ΘΕΜΑ 1ο Αν $A\nu = \nu \cdot Z$ τότε με $\alpha, \beta \in A$, θα είναι $\alpha = \nu x$, $\beta = \nu \cdot y$ και επομένως $\alpha - \beta = \nu(x - y) \in A$. Άρα η $(A, +)$ είναι ομάδα.

Αν $(A, +)$ μια υποομάδα της $(Z, +)$. Τότε το $0 \in A$ $A = \{0\}$, τότε $A = 0 \cdot Z$. Δεχόμαστε ότι $A \neq \{0\}$. Τότε θα υπάρχει κάποιος ακέραιος $\mu \in A$ με $\mu \neq 0$ και επειδή $(A, +)$ είναι ομάδα $0 - \mu$ θα ανήκει στο A. Μπορούμε επομένως να δεχτούμε ότι το A περιέχει ένα θετικό ακέραιο $\mu \neq 0$. Τότε το A θα περιέχει και έναν ελάχιστο θετικό ν. Θα δείξουμε ότι $A = \nu \cdot Z$. Επειδή $\nu \in A$, $\nu + \nu = 2\nu \in A$, $\nu + 2\nu = 3\nu \in A$ και γενικά $\nu \cdot x \in A\ \forall x \in Z$. Άρα $\nu \cdot Z \subseteq A$ (1). Αλλά για κάθε $\alpha \in A$ είναι $\alpha = \nu \cdot x + \beta$ με $x, \beta \in Z$ και $0 \leq \beta < \nu$ και επειδή $\alpha \in A$, $\nu \cdot x \in A$ έπεται ότι $\beta = \alpha - \nu \cdot x \in A$ και επειδή $0 \leq \beta < \nu$ έπεται ότι $\beta = 0$ αφού ο ν είναι ο ελάχιστος θετικός $(\nu \neq 0)$ που ανήκει στο A. Άρα $\alpha = \nu \cdot x \in \nu \cdot Z\ \forall \alpha \in A$. Αυτό δίνει $A \subseteq \nu \cdot Z$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $A = \nu \cdot Z$.

Αν $\nu \cdot Z = \mu \cdot Z$, τότε το ν περιέχεται στο $\mu \cdot Z$ και άρα το ν είναι πολλαπλάσιο του μ. Ανάλογα έχουμε ότι το μ είναι πολλαπλάσιο του ν. Άρα $\mu = \nu$.

(β) Έστω

$$A = \{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu \mid \lambda_i \in Z,\ i = 1, 2, \ldots \nu\}$$

Τότε κάθε στοιχείο x του A έχει τη μορφή

$$x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu$$

για κάποιους ακέραιους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Είναι φανερό ότι το $(A, +)$ είναι ομάδα, υπο-ομάδα της $(Z, +)$. Άρα $A = \delta \cdot Z$ για κάποιο κατάλληλο φυσικό αριθμό $\delta \neq 0$ με $\delta \in A$, γιατί $A = \delta \cdot Z \neq \{0\}$ αφού τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι στοιχεία του A. Έτσι κάθε στοιχείο του A είναι πολ/σιο του δ.

Άρα το δ είναι κοινός διαιρέτης των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Αν δ_1 είναι κοινός διαιρέτης των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, τότε το δ_1 διαιρεί και κάθε στοιχείο της μορφής

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu$$

για οποιαδήποτε επιλογή των $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Άρα ο δ_1 διαιρεί κάθε στοιχείο του A και επομένως διαιρεί και το δ. Άρα ο δ είναι ο Μ.Κ.Δ. των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ και ως στοιχείο του A γράφεται στη μορφή

$$\delta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu \alpha_\nu$$

για κατάλληλους ακέραιους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$.

ΘΕΜΑ 2ο Το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται και είναι ένας $\mu \times \mu$ πίνακας. Επομένως μπορούμε να μιλάμε για την ορί-

Στον πίνακα A προσθέτουμε $\mu - \nu$ μηδενικές στήλες και στο B $\mu - \nu$ μηδενικές γραμμές τότε έχουμε:

$$D(A \cdot B) \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2\mu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \ldots & \beta_{\nu\mu} \end{pmatrix}\right| =$$

$$D\left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\mu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2\mu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \ldots & \beta_{\nu\mu} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$= D(X \cdot Y)$

Οι πίνακες X και Y είναι $\mu \cdot \mu$ πίνακες. Ο X έχει $\mu - \nu$ μηδενικές στήλες και ο Y έχει $\mu - \nu$ μηδενικές γραμμές. Άρα $D(X) = D(Y) = 0$ και επειδή $D(XY) = D(X) \cdot D(Y)$ θα είναι $D(A \cdot B) = D(XY) = D(X) \cdot D(Y) = 0$.

ΘΕΜΑ 3ο Είναι $x_1 + x_1 = x_1 \Leftrightarrow x_1 = 0$ άρα $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 2$, γενικά $x_\nu \geq \nu - 1$ γιατί η (x_ν) είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $\forall \nu \in \mathbb{N} : x_{2\nu} = \nu x_2$. Είναι $x_{2^1} = x_2 = 1 \cdot x_2$; $x_{2^2} = x_{2 \cdot 2} = x_2 + x_2 = 2x_2$. Έστω ότι για $\nu = \kappa$, $x_{2\kappa} = \kappa x_2$. Τότε

$$x_{2^{\kappa+1}} = x_{2^\kappa} + x_2 = x_2 = \kappa x_2 + x_2 = (\kappa + 1)\, x_2.$$

Άρα $x_{2^\nu} = \nu x_2\ \forall \nu \in \mathbb{N}$. Όμως $x_{2^\nu} \geq 2^\nu - 1$ άρα $\nu x_2 \geq 2^\nu - 1$ ή $x_2 \geq \frac{2^\nu - 1}{\nu}$, άτοπο, γιατί η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{2^\nu - 1}{\nu}$ έχει όριο το $+\infty$ και άρα δεν είναι φραγμένη άνω. Άρα η x_ν δεν υπάρχει.

(Χ. Ταμβάκης)

ΘΕΜΑ 4ο Θεωρούμε τις συντεταγμένες του $B(\alpha, 3\alpha)$ και του $\Gamma(\beta, 0)$. Θα βρούμε το β συναρτήσει του α. Η ευθεία που περνά από τα A, B έχει εξίσωση.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ \alpha & 3\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ή \quad x(3 - 3\alpha) - y(4 - \alpha) + 9\alpha = 0$$

και για $y = 0$ έχουμε $x(1 - \alpha) + 3\alpha = 0$. Αν τώρα $\alpha \neq 1$ οπότε η ευθεία AB δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα $x x'$) ισχύει

$$x = \beta = \frac{3\alpha}{\alpha - 1}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΒΓ είναι

$$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 3\alpha & 1 \\ \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3\alpha\beta| = \frac{3}{2} |\alpha\beta| =$$

$$= \frac{9}{2} \left| \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \right| = \frac{9}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$$

διότι για να τέμνει τον ox η AB πρέπει $\alpha > 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}$ (με $\alpha \in (1, +\infty)$).

Θα βρούμε που παίρνει ελάχιστη τιμή. Είναι

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} = y \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha y + y = 0 \quad (1)$$

Για να έχει η (1) λύσεις ως προς α πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$ ή $y^2 - 4y \geq 0$ ή $y \geq 4$ γιατί είναι $y \geq 0$. Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(\alpha) = 4$ οπότε

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Συνεπώς το Β έχει συντεταγμένες (2, 6) για να είναι το (ΟΒΓ) ελάχιστο.

ΑΘΛΟΘΕΤΕΣ ΠΔ (1986)

Αθλοθέτες του Πανελλήνιου μαθηματικού διαγωνισμού και της Ελληνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας '86.

Χόλη Αθηνά
Στη μνήμη της φίλης της Ερασμίας Σούζης 5.000 ΔΡΧ.

Στη μνήμη των αδελφών της Αλεξάνδρας και Ιωάννου Χερουβείμ 5.000 ΔΡΧ.

Θρουμόπουλος Λάζαρος
Στη μνήμη των γονέων του Ευκλείδου και Ροδάμης και του αδελφού του Ηλία 5.000 ΔΡΧ.

Θρουμοπούλου Κική
Στη μνήμη της αδελφής της Αλεξάνδρας Χερουβείμ 1.000 ΔΡΧ.

Κισκύρας Νίκος
Στη μνήμη Χρίστου και Αλέκας Σάνδρη 5.000 ΔΡΧ.

Στη μνήμη των Γονέων του Ανδρέα και Μεταξίας, του Αδελφού του Ηλία και του γαμπρού του Νίκου 5.000 ΔΡΧ.

Στη μνήμη των Εκπαιδευτικών Αγωνιστών της Εθνικής Αντίστασης της Δημοκρατίας και της Εθνικής Ανεξαρτησίας στα δύο καλύτερα γραπτά Γεωμετρίας της Β' Λυκείου 2 σειρές βιβλία του.

Υπουργείο Δημοσίας Τάξης
(Ελληνική Αστυνομία) 10.000 ΔΡΧ.

Εφημερίδα «ΕΣΤΙΑ»
Στη μνήμη Ν. Κρητικού 10.000 ΔΡΧ.

ΓΕΕΘΑ
(Υπουργείο Εθνικής Άμυνας) 15.000 ΔΡΧ.

Βιβλιοπωλείο Ελευθερουδάκη
Στη μνήμη Γ. Ελευθερουδάκη 20.000 ΔΡΧ.

Κεντρική Τράπεζα Ελλάδος
30.000 ΔΡΧ.

Γενική Τράπεζα της Ελλάδος
10.000 ΔΡΧ.

Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο
10.000 ΔΡΧ.

Οργανισμός Σιδηροδρόμων Ελλάδος (ΟΣΕ)
1 εισιτήριο δωρεάν Α' θέσης για 2 άτομα για οποιαδήποτε διαδρομή μέσα στην Ελλάδα

Ολυμπιακή Αεροπορία
2 εισιτήρια δωρεάν Εσωτερικού

Πάλλα Νίκη
Στη μνήμη του άνδρα της Αριστείδη Πάλλα 30.000 ΔΡΧ.

Υπουργείο Δημοσίας Τάξης
(Αρχ. Πυροσβ. Σώματος) 50.000 ΔΡΧ.

Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος
50.000 ΔΡΧ.

Απαραίτητες διευκρινήσεις...

Η **«στήλη του μαθητή» «οι αφορμές και στιγμιότυπα»** και ένα μεγάλο μέρος της **αλληλογραφίας** θα δημοσιευτούν στο 4ο τεύχος πού θα κυκλοφορήσει έκτακτα στο τέλος Φλεβάρη του '87.
Αγαπητοί μας αναγνώστες ζητάμε συγγνώμη γι αυτή την απρόβλεπτη αλλαγή. Οι συνεργασίες των συναδέλφων για το 3ο καί 4ο τεύχος καθώς και στα προηγούμενα θα δημοσιευτούν στο καινούριο τεύχος της νέας χρονιάς ανάλογα με την **Επικαιρότητα** του θέματος.

* * *

Αυτό κρίθηκε απαραίτητο για την όσο γίνεται **καλύτερη προσαρμογή ύλης,** μια και οι συνεργασίες των συναδέλφων που ήρθαν στο περιοδικό απ' όλη την Ελλάδα ήταν πάρα πολλές.

* * *

Σ' αυτό το σημείο και απ' αυτή τη θέση κρίνουμε απαραίτητο **να ευχαριστήσουμε** όλους τους συναδέλφους που βοηθούν με κάθε τρόπο στη κυκλοφορία, διάθεση και ποιοτική άνοδο του περιοδικού.

Θέματα που προτάθηκαν απο τις διάφορες χώρες στην 27η διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1986.

Τη μετάφραση έκανε ο συνάδελφος Δ. Κοντογιάννης και οι μαθητές του **Ολυμπιακού Φροντιστηρίου** της ΕΜΕ Βαγγέλης Κομπότης και Χαράλαμπος Ταμβάκης.

• ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ:

1) Αν $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $n = 2^2 - 1$ να δείξετε ότι

$$1 + b^{\kappa} + b^{2\kappa} \ldots b^{n\kappa} \geq (1 + b^{n})^{\kappa}$$

για κάθε $b \geq 0$, όταν $\kappa = 2, 3, 4$.

2) Το ABCD είναι ένα κυρτό τετράπλευρο. Οι DA, CB τέμνονται στο F και οι AB, DC τέμνονται στο E. Οι διχοτόμοι των γωνιών DFC, AED είναι κάθετες μεταξύ τους. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών αυτών είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι AC και BD.

3) Μια ευθεία παράλληλη στην πλευρά BC του τριγώνου ABC τέμνει την AB στο F και την AC στο E. Να δείξετε ότι οι κύκλοι με διαμέτρους BE και CF τέμνονται σε σημείο του ύψους από το A.

• ΒΕΛΓΙΟ:

1) Να βρείτε τα οκτώ τελευταία ψηφία του αριθμού 27^{1986} όταν αυτός είναι γραμμένος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

2) Δίνονται δυο οξυγώνια τρίγωνα ABC, DEF. Σημειώνουμε με $d = (EF)$, $e = (FD)$, $f = (DE)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο P εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, για το οποίο η παράσταση

$$d(AP) + e(BP) + f(CP)$$

γίνεται ελάχιστη.

3) Σε μια δεξαμένη υπάρχει μια σφαίρα με τον αριθμό 1, δυο σφαίρες με τον αριθμό 2, ..., n σφαίρες με τον αριθμό n. Παίρνουμε δυο σειρές τυχαίες και χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, οι δυο αυτές σφαίρες να έχουν τον ίδιο αριθμό.

• ΒΟΥΛΓΑΡΙΑ:

1) Ας είναι F(ν) ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών σημείων του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχει μια ευθεία που περιέχει ακριβώς κ από τα δοσμένα σημεία. Υπολογίστε τον f(n) (ή αποδείξτε ότι

$$f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right],$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος του x).

2) Δίνεται ένα τετράεδρο ABCD τέτοιο ώστε:

$$AD = BC = \alpha,\ A\Psi = BD = b,\ AB \cdot CD = c^2.$$

Έστω $f(P) = AP + BP + CD + DP$, όπου τυχαίο σημείο του χώρου. Να υπολογίσετε την ελαχίστη τιμή του f(P).

• ΚΑΝΑΔΑΣ:

1) Να δείξετε ότι το άθροισμα των επιπέδων γωνιών σε κάθε κορυφή ενός τετράεδρου είναι 180°, αν και μόνο αν, οι έδρες του είναι ίσα τρίγωνα.

2) Ένα σύνολο από n όμοιους κύβους (τάβλια) ανακατεύονται και τυχαία τοποθετούνται πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Αν $n < 2\tau$ και $\tau < s$, τότε η πιθανότητα να υπάρχει μια σειρά από τουλάχιστο τ, αλλά όχι περισσότερες από s διαδοχικές μονάδες είναι

$$\frac{P}{S+2}$$

3) Στο τρίγωνο ABC είναι $A\hat{B}C = 100°$ και D σημείο της πλευράς του AC τέτοιο ώστε $A\hat{B}D = C\hat{B}D$. Αν AB = AC να δείξετε ότι AD + DB = BC.

• ΚΙΝΑ:

1) Έστω $A_1A_2A_3A_4$ ένα τετράεδρο και O ένα εσωτερικό του σημείο. Έστω S_1, S_2, S_3, S_4 σφαίρες με κέντρα τα A_1, A_2, A_3, A_4, αντίστοιχα και U, V σφαίρες με κέντρο το 0. Υποθέτουμε ότι για

$$i, j = 1, 2, 3, 4,\ i \neq j$$

οι Si, Sj είναι εφαπτόμενες στο σημείο Bij της AiAj, η U εφάπτεται στην AiAj και η V εφάπτεται στις S_1, S_2, S_3, S_4. Να δείξετε ότι το $A_1A_2A_3A_4$ είναι κανονικό τετράεδρο.

2) Σε κάθε ζευγάρι i, j των αριθμών του συνόλου $N = \{1, 2, \ldots n\}$, όπου $n \geq 3$ αντιστοιχεί μια τιμή f_{ij}, τέτοια ώστε $f_{ij} = 0$ ή 1 και $f_{ij} + f_{ji} = 1$.
Έστω $\tau(i) = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in \nu}} f_{ij}$.

Να δείξετε ότι για κάθε $s \in \{t / \tau(t) = \min_{i \in \nu} \tau(i)\}$, υπάρχει ένας αριθμός $\kappa \in \{t/\tau(t) = \max \tau(i)\}$ και ένας αριθμός $\nu \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $f\kappa\tau \cdot f\nu s = 1$.

3) Στο επίπεδο δίνεται τρίγωνο $A_1A_2A_3$ και σημείο P_0. Ορίζουμε $A_s = A_{s-3}$ για όλα τα $s \geq 4$. Κατασκευάζουμε μιαν ακολουθία σημείων $P_0, P_1, P_2, \ldots$ έτσι ώστε το $P_{\kappa+1}$ να προκύπτει από την περιστροφή του P_k γύρω από το σημείο $A_{\kappa+1}$ κατά γωνία 120° κατά τη φορά δεικτών του ωρολογίου ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$). Αν $P_{1986} = P_0$, να δείξετε ότι το $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο.

4) Έστω ℓ ένας θετικός ακέραιος και $B_1, B_2, \ldots, B_n$

ένας διαμερισμός του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακέραιοι

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p, \; t_1 < t_2 < \ldots < tn < \ldots$$

τέτοιοι ώστε για κάθε

$$j = 1, 2, \ldots \text{ οι } t_j, \; t_j + x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots x_{i_m},$$

όπου $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, $1 \leq m \leq l$ να ανήκουν σε κάποιο B_k.

• ΤΣΕΧΟΣΛΟΒΑΚΙΑ:

1) Έστω κ θετικός ακέραιος. Να βρείτε το μικρότερο ακέραιο nκ που είναι τέτοιος ώστε να υπάρχουν πέντε σύνολα. S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 με τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $|S_j| = \kappa$ για $j = 1, 2, \ldots 5$,

(2) $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5| = nk$

(3) $|S_1 \cap S_2| = |S_2 \cap S_3| = |S_3 \cap S_4| =$

$= |S_4 \cap S_5| = |S_5 \cap S_6| = 0$.

2) Θα ονομάζουμε ορθοεδρικό ένα τετράεδρο που και οι τέσσερες έδρες του είναι ορθογώνια τρίγωνα.

α) Να δείξετε ότι κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο χωρίζεται σε έξι (6) ορθοεδρικά τετράεδρα.

β) Να δείξετε ότι το τετράεδρο $A_1A_2A_3A_4$ είναι ορθοεδρικό αν και μόμο αν υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί αριθμοί c_1, c_2, c_3, c_4 τέτοιοι ώστε οι ακμές (A_j, A_k) να έχουν μήκη $(A_j A_k) = \sqrt{|cj - ck|}$ για $1 \leq j < \kappa \leq 4$.

3) Έστω η θετικός ακέραιος και p πρώτος, $p > 3$. Να να βρείτε τουλάχιστο $3(n + 1)$ διαφορετικές (όχι λαμβανόμενες η μια από την άλλη με μετάθεση) τριάδες θετικών ακεραίων x, c, z που να ικανοποιούν τη σχέση

$$xcz = p^n(x + c + z).$$

• ΟΜ. ΔΗΜ. ΓΕΡΜΑΝΙΑΣ

1) Αν πολλαπλασιάσουμε οποιουσδήποτε δύο αριθμούς του συνόλου $S = \{2, 5, 13\}$ και αφαιρέσουμε τον 1, θα πάρουμε ένα τέλειο τετράγωνο. Να δείξετε ότι το S δε μπορεί να επεκταθεί με την προσθήκη ενός άλλου ακεραίου χωρίς να παραβιαστεί η συνθήκη.

1α) Το ίδιο πρόβλημα με $S = \{5, 10, 29\}$.

2) Σε μια δεξαμενή υπάρχουν η σφαίρες αριθμημένες με $1, 2, \ldots, n$. Η αρίθμηση είναι τυχαία και οι αριθμοί χρησιμοποιούνται μόνο μια φορά ο καθένας. Ποια είναι η πιθανότητα ώστε η τυχαία μετάθεση να έχει τοπικό μέγιστο; (Το a_j είναι τοπικό μέγιστο αν είναι μεγαλύτερο από καθένα από τα γειτονικά του a_{j-1}, a_{j+1}. Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ένα γειτονικό, πρέπει να είναι μικρότερο από το a_j).

3) Ένα σωματίδιο κινείται από το σημείο $(0, 0)$ στο σημείο (n, n) οδηγούμενο από ένα ιδανικό νόμισμα. Για κάθε «κορώνα» το σωματίδιο κινείται ένα βήμα ανατολικά και για κάθε «γράμματα» ένα βήμα βόρεια. Στο σημείο (n, y), $y < n$ μένει αν έρθει «κορώνα» και στο σημείο (x, n), $x < n$ μένει αν έρθει «γράμματα». Ποια είναι η πιθανότητα $p(\kappa)$ το σωματίδιο να χρειασθεί ακριβώς $2n + \kappa$ ρίψεις για να φθάσει στο (n, n).

4) Για οποιαδήποτε δύο σημεία A, B του επιπέδου ορίζουμε μια πράξη και ως εξής: $C = A \,\&\, B$, είναι η τρίτη κορυφή του θετικά προσανατολισμένου τριγώνου ισοπλεύρου ABC. Ποια είναι η αμοιβαία θέση τριών σημείων I, M, O στο επίπεδο αν ισχύει η ισότητα

$$I \,\&\, (M \,\&\, O) = (O \,\&\, I) \,\&\, M;$$

5) Να δείξετε ότι κάθε κυρτό πολύεδρο με έδρες ισόπλευρα τρίγωνα έχει το πολύ 30 ακμές.

• Λ. ΔΗΜ. ΓΕΡΜΑΝΙΑΣ:

1) Έστω E ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες. Είναι πάντα δυνατό να χρωματίσουμε μερικά από τα σημεία του E κόκκινα και τα υπόλοιπα σημεία του E άσπρα έτσι ώστε, σε κάθε ευθεία L παράλληλη προς τον ένα ή τον άλλο άξονα συντεταγμένων, η διαφορά του αριθμού των άσπρων σημείων από τον αριθμό των κόκκινων σημείων να είναι $-1, 0, 1$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2) Να δείξετε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, \ldots, 1986$ με 27 χρώματα έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις διαφορετικοί αριθμοί α, β, c με το ίδιο χρώμα που να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

3) Σε κάθε κορυφή κανονικού πενταγώνου αντιστοιχούμε έναν ακέραιο αριθμό έτσι ώστε το άθροισμα όλων των πέντε αριθμών να είναι θετικό. Αν σε τρεις διαδοχικές κορυφές αντιστοιχούν οι αριθμοί x, y, z με $y < 0$, τότε επιτρέπεται η ακόλουθη πράξη: Οι αριθμοί x, y, z αντικαθίστανται από τους αριθμούς $x + y$, $-y$, $z + y$ αντίστοιχα. Αυτή η πράξη επαναλαμβάνεται εφ' όσον υπάρχει έστω και ένας αριθμός ανάμεσα στους πέντε. Να καθορίσετε αν αυτή η διαδικασία θα τερματισθεί μετά από πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

• ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ:

1) Έστω: $f : [0, 1] \to [0, 1]$ για την οποία ισχύει

(i) $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

(ii) $f(x + y) - f(x) = f(x) - f(x - y)$ για κάθε x, y τέτοια ώστε $x \in [0, 1]$ και $[x - y, x + y] \subset [0, 1]$.

Να δείξπε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

2) Για $0 < \alpha < 180°$ θα ονομάζουμε ένα κυρτό κλειστό επίπεδο σύνολο **α-σύνολο,** αν είναι φραγμένο από δύο κυκλικά τόξα ή από ένα τόξο και μια ευθεία που τέμνει το σύνολο με γωνίες ίσες με α. Δίνεται ένα (κλειστό) τρίγωνο T. Να βρείτε το μεγαλύτερο α, που είναι τέτοιο ώστε κάθε δύο σημεία του T να ανήκουν σε ένα α-σύνολο $B \subset T$.

• ΓΑΛΛΙΑ:

1) Έστω [A, B] ένα τμήμα μήκους α και C, D δυο σημεία του. Να βρείτε το μέγιστο του γινομένου των μηκών των έξι (6) τμημάτων που ορίζουν τα τέσσερα σημεία A, B, C, D.

2) Θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ των ακεραίων που ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_{\nu+2} = 4\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες δ των όρων

α_{1986}, α[illegible].

3) Έστω ABC ένα τρίγωνο, I το κέντρο του εγγεγραμμένου του κύκλου, J το κέντρο του παραγγεγραμμένου κύκλου στη γωνία $\hat{BAC}$. Για κάθε σημείο M του επιπέδου του τριγώνου που δεν είναι συνευθειακό με τα A, B παριστάνουμε με I_M (αντίστοιχα με J_M) το κέντρο του εγγεγραμμένου (αντίστοιχα του περιγεγραμμένου κύκλου στη γωνία BMC) κύκλου του τριγώνου BCM. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M για τα οποία το $II_M JJ_M$ είναι ορθογώνιο.

4) Βρισκόμαστε στο επίπεδο και τα επίθετα «κάθετη» και «οριζόντια» παριστάνουν τις δύο διευθύνσεις. Θεωρούμε 15 ευθείες κάθετες που απέχουν διαδοχικά 1 και 11 ευθείες οριζόντιες που απέχουν διαδοχικά επίσης 1. Παίρνουμε 165 σημεία τομής. Να δείξετε ότι χρησιμοποιώντας ως κορυφές μόνο σημεία από αυτά τα 165 μπορούμε να φτιάξουμε 1986 τετράγωνα.

5) Έστω $x_1, x_2, ..., x_n$ η πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n < 1.$$

Θέτουμε $x_0 = 0$ και $x_{n+1} = 1$. Υποθέτουμε ότι αυτοί οι αριθμοί ικανοποιούν το σύστημα:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + ... + \frac{1}{x_1 - x_n} + \frac{1}{x_1 - 1} = 0$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2 - x_1} + ... + \frac{1}{x_2 - x_n} + \frac{1}{x_2 - 1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - x_1} + ... + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} = 0$$

$$\left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0, \ 1 \leq i \leq n \right)$$

Να δείξετε ότι: $\forall i, 1 \leq i \leq n \ \ x_{n+1-i} = 1 - x_i$.

• ΑΓΓΛΙΑ:

1) Τα P, Q είναι διαφορετικά σημεία στο επίπεδο του τριγώνου ABC τέτοια ώστε

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ}.$$

Να δείξετε ότι η RQ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

2) Να βρείτε (με απόδειξη), όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1,$$

όπου x, y, z είναι ακέραιοι θετικοί.

3) Να βρείτε (με απόδειξη), όλες τις συναρτήσεις f, που ορίζονται στο σύνολο $\mathbb{R}_+$ και παίρνουν μη αρνητικές τιμές, τέτοιες ώστε:

(i) $f[xf(y)] f(y) = f(x + y)$, για κάθε $x, y \geq 0$ και

(ii) $f(2) = 0$, αλλά $f(x) \neq 0$ για $0 \leq x < 2$.

4) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|\alpha| + |\beta| + |c|$ αν οι α, β, c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε η μέγιστη τιμή της παράστασης $|\alpha x^2 + \beta x + c|$ για $-1 \leq x \leq 1$ είναι 1.

• ΕΛΛΑΔΑ:

1) Έστω S ένα σύνολο με κ στοιχεία

α) Να βρείτε τον αριθμό των απεικονίσεων $f : S \to S$ που ικανοποιούν τις παρακάτω δύο συνθήκες:

(i) $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in S$ και

(ii) $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in S$.

β) Το ίδιο χωρίς την (i) συνθήκη.

2) Έστω $x_1 + x_2 + ... + x_m + y_1 + y_2 + ... + y_n = 1986$ όπου x_i διαφορετικοί άρτιοι θετικοί και y_i διαφορετικοί περιττοί θετικοί. Να βρείτε το μέγιστο της παράστασης

$$2m + 7n.$$

3) Έστω ABC τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο

(O, R) και M, N, P τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB αντίστοιχα.
Οι ευθείες AM, BN, CP τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία A′, B′, C′. Αν το τρίγωνο A′B′C′ είναι ισόπλευρο, να δείξετε ότι και το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

• **ΟΥΓΓΑΡΙΑ**

1) Τοποθετούμε τους ακέραιους $1, 2, \ldots, n^2$ στα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας $(n > 2)$ έτσι ώστε αριθμοί που βρίσκονται σε δυο τετράγωνα με κοινή ακμή ή κορυφή να έχουν διαφορά το πολύ $n + 1$. Πόσες τέτοιες τοποθετήσεις υπάρχουν;

2) Τρεις άνθρωποι A, B, C παίζουν το εξής παιχνίδι: Διαλέγουν τυχαία κ από τους πρώτους 1986 θετικούς ακέραιους (χωρίς επαναλήψεις). Αφού αθροίσουν τους αριθμούς αυτούς, ο νικητής είναι ο A, B, C αν το υπόλοιπο (mod 3) του αθροίσματος είναι 0, 1 ή 2 αντίστοιχα. Για ποιές τιμές του κ είναι δίκαιο το παιχνίδι;

• **ΙΤΑΛΙΑ:**

1) Ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ABC εφάπτεται στις πλευρές BC, CA, AB στα σημεία D, E, F αντίστοιχα και X, Ψ, Z είναι τα μέσα των EF, FD, DE αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι το έγκεντρο του ABC και τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων στα XΨZ, ABC είναι συνευθειακά σημεία.

2) Έστω η πραγματική αριθμοί $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n$.

Ορίζουμε $S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$. Να δείξετε ότι

$$a_1 \leq \frac{s_1}{n} - \sqrt{\frac{s_1^2}{n^2} - \frac{2s_2}{n(n-1)}} \leq \frac{s_1}{n} + \sqrt{\frac{s_1^2}{n^2} - \frac{2s_2}{n(n-1)}} \leq a_n$$

Το ίσον αν και μόνο αν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

3) Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα με 19 γραμμές και 86 στήλες τέτοιο ώστε

(i) Για κάθε $1 \leq i \leq 19$ και $1 \leq j \leq 86$, $x_{ij} = 0, 1$ ή 2.

(ii) Σε κάθε στήλη να υπάρχουν ακριβώς κ στοιχεία ίσα με 0.

(iii) Για κάθε δύο στήλες j_1, j_2 να υπάρχει μια τουλάχιστο γραμμή i_1 τέτοια $x_{i_1 j_1} + x_{i_1 j_2} = 3$.

Για ποιές τιμές του κ μπορεί να γίνει αυτό;

• **ΙΣΡΑΗΛ:**

1) Θεωρούμε δύο διαδοχικές κορυφές A, B ενός κανονικού ν-γώνου με κέντρο O. Ένα τρίγωνο XΨZ που είναι ίσο με το OAB και αρχικά συμπίπτει μ' αυτό, κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε το Ψ και το Z να διαγράφουν όλη την περίμετρο του πολυγώνου και το X να παραμένει στο εσωτερικό του ν-γώνου. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου X.

2) Έστω P ένα κυρτό 1986-γωνο του επιπέδου. Ας είναι A, D δύο σημεία δύο διαφορετικών πλευρών των P και B, C διακεκριμένα σημεία του τμήματος AD διαφορετικά από τα A, D. Με αφετηρία ένα τυχαίο σημείο Q_1 του P ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ σημείων του P ως εξής: Για

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

προεκτείνουμε την ευθεία Q_nB που τέμνει πάλι το P στο R_n. Μετά προεκτείνουμε την ευθεία R_nC που τέμνει πάλι το P στο Q_{n+1}. Να δείξετε ότι για αρκετά μεγάλα n τα σημεία Q_n βρίσκονται όλα πάνω σε μια πλευρά του P που περιέχει το A ή το D.

3) Ας είναι C_1, C_2 κύκλοι ακτίνας $\frac{1}{2}$ που εφάπτονται μεταξύ τους και ακόμα εφάπτονται εσωτερικά με κύκλο C ακτίνας 1. Οι κύκλοι c_1, c_2 είναι οι πρώτοι όροι μιας άπειρης ακολουθίας $c_1, c_2, c_3, \ldots$ διαφορετικών μεταξύ τους κύκλων που ορίζονται έτσι ώστε ο C_{n+2} εφάπτεται εξωτερικά στους κύκλους C_n και C_{n+1} και εσωτερικά στον κύκλο C. Έστω c_n η ακτίνα του C_n. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{c_n}$ είναι ακέραιος για κάθε n.

• **ΛΟΥΞΕΜΒΟΥΡΓΟ**

1) (i) Στο τρίγωνο ABC, AD είναι η διχοτόμος και I το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου. Να κατασκευάσετε ευθεία $PQ \parallel BC$ τέτοια ώστε η περίμετρος του τριγώνου APQ να έχει μέτρο $\kappa \cdot BC$ όπου $\kappa \in \mathbb{Q}$.

(ii) Η PQ τέμνει την AD στο R. Για ποιές τιμές του κ έχουμε $AR = RI$;

(iii) Σε ποιές περιπτώσεις έχουμε $AR = RI = ID$;

• **ΜΑΡΟΚΟ:**

1) Έστω $A_1A_2A_3A_4A_5\,A_6$ ένα εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου 0. Για κάθε σημείο M του τόξου $\widehat{A_1A_6}$ εκτός από το A_6, σημειώνουμε με h_i την απόσταση του M από τη χορδή $A_i\,A_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 5)$.

Να κατασκευαστεί το M έτσι ώστε το

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_5$$

να είναι μέγιστο.

2) Θεωρούμε τρίγωνο ABC και σημειώνουμε με A′, B′ C′ τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές BC, CA, AB αντίστοιχα. Ακόμα ση-

μειώνουμε με A_1, B_1, C_1 τα σημεία επαφής του παρεγγεγραμμένου κύκλου στη γωνία $\hat{A}$ με τις ίδιες πλευρές, με A_2, B_2, C_2 και με A_3, B_3, C_3 τα σημεία επαφής των παραγγεγραμμένων κύκλων στις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{C}$ με τις ίδιες πλευρές. Να δείξετε ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το ABC ορθογώνιο είναι τα σύνολα των τριών σημείων $\{A', B_3, C'\}$, $\{A_3, B', C_3\}$, $\{A', B', C_2\}$, $\{A_2, B_2, C'\}$, $\{A_3, B_1, C_2\}$, $\{A_3, B_3, C_1\}$, $\{A_1, B_2, C_1\}$, $\{A_1, B_1, C_3\}$ περιέχουν σημεία συνευθειακά.

• ΜΟΓΓΟΛΙΑ:

1) Έστω a, b, c, d τα μήκη των πλευρών περιγεγραμμένων σε κύκλο τετραπλεύρου και S το εμβαδό του.
Να δείξετε ότι $S \leq \sqrt{abcd}$. *Πότε ισχύει το ίσον;*

2) Να λύσετε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
\text{εφ}x_1 + \text{σφ}x_1 &= 3\text{εφ}x_2 \\
\text{εφ}x_2 + \text{σφ}x_2 &= 3\text{εφ}x_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\text{εφ}x_\nu + \text{σφ}x_\nu &= 3\text{εφ}x_1
\end{aligned}
$$

3) Έστω r, ν, n φυσικοί αριθμοί. Συμβολίζουμε με $S(r, \nu, n)$ τον αριθμό όλων των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = r,$$

που είναι τέτοιες ώστε $x_1 \leq \nu, x_2 \leq \nu, \ldots, x_\nu \leq \nu$.
Να δείξετε ότι

$$S(r, \nu, n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{r - (\nu + 1)k + n - 1}{n - 1},$$

όπου $m = \min\left\{ n, \left[\frac{r}{\nu + 1} \right] \right\}$.

4) Να βρείτε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n που έχει την ιδιότητα: *Αν στο επίπεδο δοθούν 8 τυχαία σημεία* και n τμήματα που τα συνδέουν, υπάρχει ευθεία που τέμνει τουλάχιστο 4 από τα τμήματα αυτά σε εσωτερικά σημεία.

5) Να βρείτε όλους τους n-ψήφιους $(n \geq 2)$ αριθμούς $M_0 = \overline{a_1a_2 \ldots a_n}$ $(a_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n)$ που διαιρούνται με όλους τους αριθμούς $M_1 = \overline{a_2a_3 \ldots a_na_1}$ $M_2 = \overline{a_3a_4 \ldots a_na_1a_2}, \ldots, M_{n-1} = \overline{a_na_1a_2 \ldots a_{n-1}}$ που προκύπτουν με μετάθεση στο τέλος των m πρώτων ψηφίων $(m = 1, 2, \ldots, n - 1)$ του αριθμού M_0.

• ΟΛΛΑΝΔΙΑ:

1) Να βρείτε 4 θετικούς ακέραιους που καθένας τους δεν ξεπερνά τον 70.000 και έχει περισσότερους από 100 διαιρέτες.

2) Έστω ABCD κυρτό τετράπλευρο που δεν είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Το A'B'C'D' είναι ένα τετράπλευρο με κορυφές A', B', C', D' τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα BCD, ACD, ABD και ABC.

Γράφουμε $T(ABCD) = A'B'C'D'$.

α) Να δείξετε ότι τα ABCD και A''B''C''D'' είναι όμοια, όπου

$$A''B''C''D'' = T(A'B'C'D') = T(T(ABCD))$$

β) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας

$$\left(\text{δηλαδή το λόγο } \frac{A''B''}{AB} \right).$$

3) Να δείξετε ότι για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα:

$$(-a + b + c)^2 (a - b + c)^2 (a + b - c)^2 \geq$$
$$\geq (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c_2).$$

• ΡΟΥΜΑΝΙΑ:

1) Έστω X και C δύο μη κενά σύνολα με n και p στοιχεία αντίστοιχα. Να βρείτε το μεγαλύτερο ακέραιο p που έχει την παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε συνάρτηση $f : P(x) \Rightarrow C$ υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα $A, B \in P(x)$ τέτοια ώστε

$$f(A) = f(B) = f(A \cup B).$$

2) Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) φυσικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $p^x - y^3 = 1$, όπου p ένας σταθερός πρώτος αριθμός.

3) Έστω ABC τρίγωνο και AA', BB', CC' οι διχοτόμοι του $(A' \in B, B' \in AC, C' \in AB)$. Να δείξετε ότι κάθε μια από τις ευθείες A'B', B'C', C'A' τέμνει τον εγγεγραμμένο στο τρίγωνο κύκλο σε δύο διακεκριμένα σημεία.

4) Η ακολουθία $(a_\nu)\ \nu \geq 1$ ορίζεται ως εξής:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{και} \quad a_{\nu+2} = 7a_{\nu+1} - a_\nu - 2$$

για κάθε $\nu \geq 1$. Να δείξετε ότι ο a_ν είναι τέλειο τετράγωνο για κάθε φυσικό ν.

5) Ας είναι $A_1 A_2 A_3 A_4$ κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο στον κύκλο Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο M τέτοιο ώστε $MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 = 0$

• ΣΟΥΗΔΙΑ:

1) Θεωρούμε 100 κόκκινα και 100 μπλε σημεία που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι μπορού-

με να ενώσουμε με ευθύγραμμα τμήματα κάθε κόκκινο σημείο με ένα μπλε έτσι ώστε τα τμήματα αυτά να μην τέμνονται μεταξύ τους.

2) Έστω $f(x) = x^{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος. Είναι η δεκαδική παράσταση $\alpha = 0 \cdot f(1)\, f(2)\, f(3) \ldots$ ρητός για κάθε τιμή του ν;

3) Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

με πραγματικούς συντελεστές α, β. Να ορίσετε τον αριθμό των διαφορετικών πραγματικών ριζών και την πολλαπλότητα τους για τις διάφορες τιμές των α, β. Να παραστήσετε τα συμπεράσματά σας γραφικά στο ab-επίπεδο.

• **ΤΟΥΡΚΙΑ:**

1) Έστω AX, BΨ, CZ τρεις σεβιανές που τέμνονται σε σημείο 0 εσωτερικό του τριγώνου ABC. Να δείξετε ότι αν δυο από τα τετράπλευρα DΨAZ, DZBX, DXCΨ είναι εγγράψιμα, τότε θα είναι και το τρίτο.

2) Έστω ABCD ένα τετράεδρο στο οποίο τα αθροίσματα των απέναντι ακμών του είναι ίσα.

Να δείξετε ότι $\tau_A + \tau_B + \tau_C + \tau_D \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\upsilon$, όπου τ_A, τ_B, τ_C, τ_D είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων στις έδρες των κύκλων. Η ισότητα ισχύει μόνον αν το τετράπλευρο ABCD είναι κανονικό.

3) Δύο ευθείες t, t΄ κάθετες μεταξύ τους τέμνουν κάθε πλευρά ενός τριγώνου σε σημεία συμμετρικά ως προς το μέσο της αντίστοιχης πλευράς. Να δείξετε ότι t, t΄ τέμνονται πάνω στον κύκλο που περνά από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου.

4) Παίζεται ένα παιχνίδι για ένα άτομο με δυο δυνατές εκβάσεις ως εξής: μετά από κάθε γύρο, ο παίκτης παίρνει ή α ή β βαθμούς, όπου α, β ακέραιοι με

$$0 < \beta < \alpha < 1986.$$

Ο αριθμός των γύρων είναι απεριόριστος και η συνολική βαθμολογία του παιχνιδιού ορίζεται σαν το άθροισμα των βαθμών που πάρθηκαν σε κάθε γύρο. Παρατηρείται ότι κάθε ακέραιος $x \geq 1986$ μπορεί να είναι το συνολικό αποτέλεσμα ενός τέτοιου παιχνιδιού ενώ ο 663 όχι. Επιπλέον ο 1986 είναι ο ελάχιστος όλων των ακεραίων m που είναι τέτοιοι ώστε κάθε ακέραιος $x \geqslant m$ να μπορεί να προκύπτει από την τελική βαθμολογία του παιχνιδιού. Να προσδιορίσετε τα α, β.

5) Έστω $(\alpha_\nu)\nu \in \mathbb{N}$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim \alpha_\nu = +\infty \quad \text{και} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq 10 \quad \text{για κάθε } \nu.$$

Να δείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν άπειρα ζεύγη (i, j) τέτοια ώστε

$$10^\kappa \leq \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \leq 10^{\kappa+1}.$$

• **ΗΠΑ:**

1) Από ένα σύνολο n ανθρώπων, επιλέγονται 2 διαφορετικές ομάδες ατόμων που αριθμούνται 1, 2, ..., q.

Έστω m ο μικρότερο ακέραιος που είναι $\geq \dfrac{2q}{n}$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν $m + 1$ άτομα που μπορεί να καταγραφούν έτσι ώστε:

(i) Κάθε ζευγάρι διαδοχικών ανθρώπων ανήκει σε μιαν ομάδα.

(ii) Στην αλυσίδα των ομάδων που σχηματίζεται έτσι, οι ομάδες βρίσκονται σε αριθμητική σειρά.

2) Σ' ένα τρίγωνο το έγκεντρο είναι το μέσο του τμήματος που ενώνει το βαρόκεντρο με ορθόκεντρο. Αν το τμήμα αυτό έχει μήκος 4, να βρείτε το μέγιστο δυνατό εμβαδό του τριγώνου.

3) Έστω A, B, C τρία σημεία στην όχθη μιας κυκλικής λίμνης, τέτοια ώστε το B να βρίσκεται ακριβώς δυτικά του C και το ABC να είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 86 μέτρα. Ένα αγόρι άρχισε να κολυμπά από το A απ' ευθείας στο B. Αφού διάνυσε απόσταση x μέτρων, γύρισε και κολύμβισε προς τη Δύση, φθάνοντας στην ακτή, έχοντας κολυμβήσει y μέτρα. Αν οι αριθμοί x, y είναι ακέραιοι να βρείτε τον y.

• **ΕΣΣΔ:**

1) Να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων την εξίσωση

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 8$$

2) Να δείξετε, ότι για δύο οποιαδήποτε τρίγωνα με γωνίες α, β, γ και α_1, β_1, γ_1 ισχύει η ανισότητα

$$\frac{\text{συν}\alpha_1}{\text{ημ}\alpha} + \frac{\text{συν}\beta_1}{\text{ημ}\beta} + \frac{\text{συν}\gamma_1}{\text{ημ}\gamma} \leq \text{σφ}\alpha + \text{σφ}\beta + \text{σφ}\gamma.$$

3) Στο οξυγώνιο τρίγωνο ABC φέρνουμε τα ύψη AA_1, BB_1, CC_1. Στα τμήματα A_1C_1, B_1C_1 παίρνουμε τα σημεία K και M τέτοια ώστε, η γωνία MAK να είναι ίσα με τη γωνία CAA_1. Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $C_1\hat{K}M$.

4) Στην πυραμίδα ABCD εγγράφουμε σφαίρα με κέντρο 0. Να βρείτε τη γωνία των επιπέδων DOB και DOC αν $OD \perp AD$.

η διαφορά μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου στοιχείου κάθε γραμμής είναι το πολύ d, όπου $d > 0$.

Κάθε στήλη επαναδιατάσσεται κατά φθίνουσα τάξη, ώστε το μέγιστο στοιχείο της να βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και το ελάχιστο στην τελευταία γραμμή.

Να δείξετε ότι και μετά την επαναδιάταξη αυτή, η διαφορά του μέγιστου και του ελαχίστου στοιχείου κάθε γραμμής είναι το πολύ d.

0_{10}. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων καλύπτει το διάστημα [0,1]. Να δείξετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε — μεταξύ των διαστημάτων αυτών — ανά δυο ξένα διαστήματα που το ολικό τους μήκος να είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}$.

Τελική Βαθμολογία
28ης Ολυμπιάδας Μαθηματικών

1. Ρουμανία (250), 2. Ομοσπονδιακή Δημ. Γερμανίας (248), 3. Σοβ. Ένωση (235), 4. Λαϊκή Δημ. Γερμανίας (231), 5. Η.Π.Α. (220), 6. Ουγγαρία (218), 7. Βουλγαρία (210), 8. Κίνα (200), 9. Τσεχοσλοβακία (192), 10. Μεγ. Βρετανία (182), 11. Βιετνάμ (172), 12. Γαλλία (154), 13. Αυστρία (150), 14. Ολλανδία (146), 15. Αυστραλία (143), 16. Καναδάς (139), 17. Σουηδία (134), 18. Γιουγκοσλαβία (132), 19. Βραζιλία (116), 20. Ελλάδα (111), 21. Τουρκία (94), 22. Ισπανία (91), 23. Μαρόκο (88), 24. Κούβα (83), 25. Βέλγιο (74), 26. Περσία (70), 27. Νορβηγία (69), 28. Φιλλανδία (69), 29. Κολομβία (68), 30. Μογγολία (67), 31. Πολωνία (55), 32. Ισλανδία (45), 33. Κύπρος (42), 34. Περού (41), 35. Ιταλία (35), 36. Αλγερία (29), 37. Κουβέιτ (28), 38. Λουξεμβούργο (27), 39. Ουραγουάη (27), 40. Μεξικό (17), 41. Νικαράγουα (13), 42. Παναμάς (7).



3-8 Μαη '87
Ολυμπιακό Στάδιο

4η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Στην Αθήνα από 3 ως 8 Μάη 1987 έγινε η 4η Β.Μ.Ο. Σ' αυτήν πήραν μέρος η διοργανώτρια Ελλάδα, η Βουλγαρία, η Γιουγκοσλαβία, η Κύπρος και η Ρουμανία.



Χαρακτηριστικό στιγμιότυπο απ' τη τελετή λήξης της 4ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας

Την 4η Β.Μ.Ο. διοργάνωσε η Ε.Μ.Ε.

Την ομάδα της χώρας μας αποτελούσαν οι μαθητές:
Ταμβάκης Χαράλαμπος (Αθήνα)
Ιμβρισημτζής Γιάννης (Θεσσαλονίκη)
Ζιάμας Χρήστος (Λάρισα)
Κομπότης Βαγγέλης (Αθήνα)
Κουτρουμπής Δημήτριος (Αθήνα)
Θεοδοσόπουλος Θεόδωρος (Θεσσαλονίκη)

Ακόμα πήραν μέρος στο διαγωνισμό και 12 Έλληνες μαθητές σαν αναπληρωματικοί.

Η χώρα μας πήρε 2 χρυσά (Ταμβάκης, Ιμβρισημτζής) και 4 αργυρά μετάλια, πράγμα που συμβαίνει για πρώτη φορα και δείχνει τη συνεχή άνοδο της ομάδας μας. Στη γενική βαθμολογία είχαμε:

Ρουμανία (240), Βουλγαρία (215), Ελλάδα (185), Γιουγκοσλαβία (174), Κύπρος (160) ενώ η Αλβανία και η Τουρκία δε συμμετέχουν.

Τέλος το μοναδικό ειδικό βραβείο που δόθηκε στην 4η Β.Μ.Ο. πήρε ο μαθητής μας Ζιάμας Χρήστος για την πρωτότυπη λύση που έδωσε στο 4ο πρόβλημα.

Θα πρέπει να πούμε εδώ, ότι στην τελετή έναρξης της Βαλκανιάδας παραβρέθηκε και μίλησε για το πνεύμα της εκδήλωσης ο πρώην Υφυπουργός Παιδείας κ. Παπαδημητρίου, κάτι που γίνεται για πρώτη φορά σε τέτοια διοργάνωση στη χώρα μας. Το γεγονός αυτό δείχνει το ενδιαφέρον της πολιτείας για το **θεσμό** και την αναγνώριση του θετικού ρόλου της ΕΜΕ στην προσπάθεια αναβάθμισης της παιδείας μας.

Τα θέματα της 4ης Β.Μ.Ο. είναι τα παρακάτω. Η Ελλάδα σαν διοργανώτρια χώρα δεν πρότεινε θέματα.

Στο επόμενο τεύχος θα δώσουμε περισσότερα στοιχεία για τη διοργάνωση αυτή καθώς και αποσπάσματα απ' τις ομιλίες των ξένων αντιπροσωπειών καθώς επίσης και διάφορα χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της όλης εκδήλωσης. Θα πρέπει σ' αυτό το σημείωμα να ευχαριστήσουμε το **Υπουργείο Εμπορίου** και τον **Ο.Τ.Ε.** που συνέβαλαν οικονομικά στην 4η Βαλκανική Ολυμπιάδα Μαθηματικών με τα αντίστοιχα χρηματικά ποσά (99.740 δρχ.) και (70.000 δρχ.). Επίσης τη προσφορά του γραφείου τουρισμού (Ε.Ο.Τ.) για τα καλαίσθητα έντυπα και αφίσες για τη προβολή της χώρας μας, που είχε τη καλοσύνη να μας δώσει, για τις ξένες αποστολές.

Θέματα 4ης Βαλκανιάδας

5 ΜΑΗ 1987

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f(x + y) = f(x)f(\alpha - y) + f(y)f(\alpha - x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1/2.$$

Ν' αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερά.

(Γιουγκοσλαβία)

Λύση:

Θέτοντας $x = y = 0$, παίρνουμε $f(\alpha) = 1/2$. Θέτοντας $y = 0$, παίρνουμε $f(x) = f(\alpha - x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $y = \alpha$, παίρνουμε $f(x) = f(\alpha + x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι

$$f(-x) = f(\alpha - (-x)) = f(\alpha + x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

και επομένως

$$f(x - y) = f(x)f(\alpha + y) + f(-y)f(\alpha - x) +$$
$$+ f(x)f(\alpha - y) + f(y)f(\alpha - x) = f(x + y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

και έτσι με $x = y$ παίρνουμε

$$f(2x) = f(0) = 1/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $$f(x) = 1/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Έστω $x \geqslant 1$ και $y \geqslant 1$ και έστω ότι οι αριθμοί

$$\alpha = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \quad \text{και}$$
$$b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$$

είναι μη διαδοχικοί ακέραιοι. Ν' αποδειχτεί ότι

$$b = \alpha + 2 \quad \text{και} \quad x = y\ 5/4.$$

(Ρουμανία)

Λύση:

Έχουμε $0 < b - \alpha =$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} \leq 2\sqrt{2}$$

(επειδή $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{2}$. Επειδή $\alpha, b \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $b - \alpha = 2$. Έστω $x + y = s$ και $xy = p$. Έχουμε

$$\alpha^2 = s - 2 + 2\sqrt{p - s + 1},$$
$$b^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = s + 2 + 2\sqrt{p + s + 1}$$

δηλαδή

$$\alpha^2 - s + 2 = 2\sqrt{p - s + 1} \quad \text{και}$$
$$\alpha^2 + 4\alpha + 2 - s = 2\sqrt{p + s + 1}, \ \alpha^2 + 2 \geq s.$$

Παίρνοντας τα τετράγωνα και αφαιρώντας έχουμε

(1) $$s = (\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha)/(\alpha + 1)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $s \leq \alpha^2 + 2$, η (1) μας δίνει $\alpha^2 \leq 2$. Άρα $\alpha = 1$, $s = 5/2$, $p = 25/16$ και έτσι $x = y = 5/4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Σ' ένα τρίγωνο ABC με την ιδιότητα

$$\eta\mu^{23}(\alpha/2)\ \sigma\upsilon\nu^{48}(\beta/2) = \eta\mu^{23}(\beta/2)\ \sigma\upsilon\nu^{48}(\alpha/2)$$

όπου α και β είναι οι γωνίες με κορυφές A και B αντίστοιχα, να βρεθεί ο λόγος AC/BC.

(Κύπρος)

Λύση:

$$[\eta\mu(\alpha/2)\ /\ \eta\mu(\beta/2)]^{13} = [\sigma\upsilon\nu(\alpha/2)\ /\ \sigma\upsilon\nu(\beta/2)]^{48},$$

Η ημ είναι ↑ στο διάστημα $(0, \pi/2)$ και η συν ↓. Αν $\alpha \neq \beta$ το ένα μέλος της ισότητας είναι > 1 και το άλλο < 1. Άρα $\alpha = \beta$ και επομένως $AC/BC = 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Δύο κύκλοι K_1, K_2 με κέντρο O_1, O_2 και ακτίνες 1, $\sqrt{2}$, αντίστοιχα τέμνονται σε δυο σημεία A και B και ισχύουν $O_1 O_2 = 2$. Έστω AC μια χορδή του κύκλου K_2. Να βρεθεί το μήκος της AC αν το μέσο της κείται επί του K_1.

(Βουλγαρία)

Λύση:

Από τον τύπο του Ήρωνα, το εμβαδό του τριγώνου AO_1O_2 είναι $\sqrt{7/4}$ και επομένως το εμβαδό του τετραπλεύρου $AO_1BO_2 = \sqrt{7}/2 = \frac{1}{2}(AB)(O_1O_2) = AB$. Από το τρίγωνο ABC συνάγουμε ότι

(1) $$AC^2 = 2(AB^2 + BC^2) - 4BM^2.$$

Επειδή $BM = 2\eta\mu\phi$, $BC = 2\sqrt{2}\,\eta\mu\phi$, όπου $\phi = B\hat{A}C$, η (1) μας δίνει

$$AC^2 = 2\left(\frac{7}{4} + 8\,\eta\mu^2\phi\right) - 4 \cdot 4\,\eta\mu^2\phi = 7/2$$

δηλαδή $AC = (7/2)^{1/2}$.

Λύσεις στα θέματα της 3ης Βαλκανιάδας

• Λύσεις στα θέματα της 3ης Μαθηματικής Βαλκανιάδας που έγινε το 1986 στο Βουκουρέστι (τ_1, σελ. 9 σχ. χρονιά 86-87) καθώς και στα θέματα της 27ης Δ.Μ.Ο. πήραμε από πολλούς αναγνώστες και δημοσιεύουμε αυτές που παρουσιάζουν περισσότερο ενδιαφέρον καθώς επίσης και χρήσιμες παρατηρήσεις-σχόλια.

Λύσεις έστειλαν: Π. Μαραγκουδάκης (**Χανιά**): θ_1, θ_4 (3η Β.Μ.Ο.), Χρ. Αθανασιάδης (Θεσσαλονίκη) θ_4 (3η Β.Μ.Ο) Κ. Ζιάμας (**Λάρισα**) Β. Μουρούκος (**Αθήνα**) (θ. Βουλγαρίας) θ_1, θ_2, θ_3, (α) θ_1, (β) θ_1, θ_2 θ.(27η Δ.Μ.Ο.), θ_1, θ_2, (IBA) θ_1, θ_5, θ_6 (3η Β.Μ.Ο.) Α. Αθανασιάδης (Κιλκίς) θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 (3η Β.Μ.Ο.) Γ. Νικητάκης (**Σητεία Κρήτης**) θ_1, θ_3, θ_4 (3η Β.Μ.Ο.) Γ. Δερμιτζάκης (**Αθήνα**) θ_3, θ_4 (3η Β.Μ.Ο) Γ. Κυριακόπουλος (θ_5 Iberoamericana). Μ. Στεργίου (27η Δ.Μ.Ο. Θ<u>ΕΣΣΔ</u>), Γ. Πιτσίλκας (**Λάρισα**): θ_1, θ_2 (27η Δ.Μ.Ο). Π. Θεοδοσίου (**Φλώρινα**): θ_1, θ_2, θ_5, θ_6, (27η Δ.Μ.Ο.) Γ. Διαμαντίδης (**Σάμος**) θ_3 (Π.Μ.Δ. 86-87) και τέλος μια πάρα πολύ καλή επιλογή με αρκετά κομψές λύσεις και όμορφα σχόλια σε θέματα της 27ης Δ.Μ.Ο. απ' τον Γ. Τζήκα (Μ.Π.Κ. **Σερρών**). (θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6, θ_7, θ_8, θ_9, θ_{10}, θ_{11}) που σε σύντομο χρόνο θα 'χει τη χαρά να δημοσιεύσει απ' τις στήλες του περιοδικού.

Σ' αυτό το τεύχος δίνουμε τις λύσεις της 3ης Β.Μ.Ο. ενώ θα ακολουθήσουν θέματα της 27ης Δ.Μ.Ο., επιλογές θεμάτων **Iberoamericana.**

θ_1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο Ο. Έστω ευθεία (ε) που περνάει από έγκεντρο του ΑΒΓ και τέμνει των περιγεγραμμένο κύκλο στα Δ και Ε και τον εγγραμμένο στα F και G (όπου F από την μεριά του Δ και G από την μεριά του Ε). Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ, δείξτε ότι

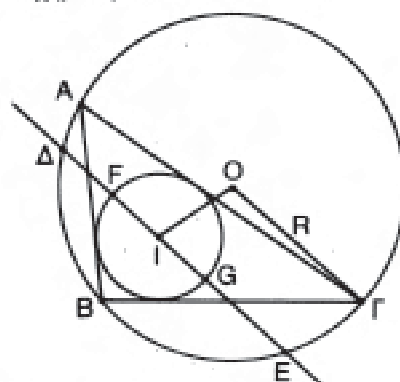
$$\Delta F \cdot EG \geqslant \rho^2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μ. Κεσογλίδης
(**μαθηματικός** — Πολυτ. Σχολ. Ξάνθης)

Απόδειξη:

Από το σχήμα προκύπτει



$$DF \cdot EG = (I\Delta - \rho)(IE - \rho) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F \cdot EG = I\Delta \cdot IE - (I\Delta + IE)\,\rho + \rho^2 \Rightarrow$$

(1) $\Delta F \cdot EG = I\Delta \cdot IE - \Delta E \cdot \rho + \rho^2$

Αλλά

(2) $\Delta E \leqslant 2R \Rightarrow -\Delta E \cdot \rho \geqslant -2R\rho$

Οπότε η (1) γίνεται

(3) $\Delta F \cdot EG \geq I\Delta \cdot IE - 2R\rho + \rho^2$

Η δύναμη του σημείου I ως προς τον κύκλο (0, R) δίνει

(4) $$I\Delta \cdot IE = R^2 - OI^2$$

Είναι όμως

(5) $$OI^2 = R(R - 2\rho)$$ **τύπος του Euler**

Οπότε η (3) λόγω των (4) και (5) δίνει

$$\Delta F \cdot EG \geqslant R^2 - R(R - 2\rho) - 2R\rho + \rho^2 \Rightarrow$$

$$\Delta F \cdot EG \geqslant \rho^2$$

΄Οπως εύκολα φαίνεται από την (2) η ισότητα ισχύει μόνον όταν η ΔΕ γίνει διάμετρος του κύκλου (0, R).

Παρατηρήσεις: 1. Στη σελ. 265 τ₄ (σχ. χρ. 87-87) υπάρχει λύση και απ' τον Ν. Κισκύρα.

2. Επειδή

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \Rightarrow \frac{1}{\rho_2} = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right)^2.$$

Από ανισότητα Lagrange-Swartz.

΄Εχουμε $\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right)^2 = \frac{1}{\rho_2}$ οπότε:

$$DF \cdot EG \geqslant \rho^2 \Rightarrow \frac{1}{3DF \cdot EG} \leqslant \frac{1}{3\rho^2} \leqslant \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2}.$$

(Π. Μαραγκουδάκης)

θ₃. Δίνεται τετράεδρο $A_1A_2A_3A_4$ και σημεία B_i $i = 1, 2, 3, 4$ πάνω στις ακμές του τέτοια ώστε

$$A_1B_1 \cdot B_1A_2 = A_2B_2 \cdot B_2A_3 = A_3B_3 \cdot B_3A_4 = A_4B_4 \cdot B_4A_1.$$

Δείξτε ότι τα B_i σημεία ανήκουν σε σφαίρα.

Λύση:

Επειδή $B_1A_1 \cdot B_1A_2 = B_2A_2 \cdot B_2A_3$ άρα τα σημεία B_1 και B_2 έχουν την ίδια δύναμη ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο στην έδρα $A_1A_2A_3$ κέντρου O_1 και συνεπώς απέχουν εξίσου από το κέντρο του δηλαδή $O_1B_1 = O_1B_2$. Εάν το O το περίκεντρο του τετραπλεύρου όπως είναι γνωστό η OO_1 είναι κάθετη στην έδρα $A_1A_2A_3$ και επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα O_1OB_1 και O_1OB_2 θα είναι ίσα και άρα $OB_1 = OB_2$. Ανάλογα εργαζόμαστε και δείχνονται ότι $OB_2 = OB_3$, $OB_3 = OB_4$ και $OB_4 = OB_1$ και επομένως τα R_1, R_2, R_3, R_4 βρίσκονται επί ομόκεντρης σφαίρας προς την περιγεγραμμένη στο τετράεδρο $A_1A_2A_3A_4$ και ακτίνας OB_1.

Α. Αθανασιάδης (**Κιλκίς**)

θ₅. Δίνεται ακολουθία πραγματικών (α_ν) με

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = B \quad \text{και} \quad \alpha_\nu + 1 = \frac{\alpha_\nu^2 + c}{\alpha_{\nu-1}}.$$

Να δείξετε ότι όλοι οι όροι της (α_ν) είναι ακέραιοι τότε και μόνο τότε όταν οι α, β, και $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + c}{\alpha\beta}$ είναι ακέραιοι.

Λύση:

Εδώ $\frac{\alpha_\nu^2 + c}{\alpha_{\nu-1}}$ ακέραιος, τότε αυτό, μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\alpha_\nu^2 + c}{\alpha_{\nu-1}} = \alpha_\nu\lambda - \alpha_{\nu-1}$ (1) όπου α_ν, $\alpha_{\nu-1}$ και λ ακέραιοι διότι από την (1) θα έχουμε ισοδυναμία

$$\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\lambda - c = \alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 \ (2).$$

Η (2) όμως έχει άπειρες ακέραιες λύσεις θεωρώντας το λ και c άγνωστους διότι σύμφωνα με γνωστή πρόταση: $\alpha x + \beta\psi = \gamma$ έχει άπειρες ακέραιες λύσεις αν Μ.Κ.Δ $(\alpha, \beta, \gamma) = 1 \wedge$ ΜΚΔ $(\alpha, \beta) = 1$. Στη (2) είναι

$$(\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}, 1, \alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2) = 1 \ \wedge \ (\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}, 1) = 1.$$

Από τη (2) προκύπτει εύκολα η ισοδυναμία

$$\alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu-1}^2 + c = \alpha_\nu\alpha_{\nu-1}\lambda \Leftrightarrow \frac{\alpha_\nu^2 + \alpha_{\nu+1} + c}{\alpha_\nu\alpha_{\nu-1}} = \lambda \quad (3)$$

Θέτουμε τώρα $\alpha_{\nu-1} = \alpha \wedge \alpha_\nu = \beta$ η (3) γίνεται:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + c}{\alpha\beta} = \lambda.$$

Α. Αθανασιάδης (**Κιλκίς**)

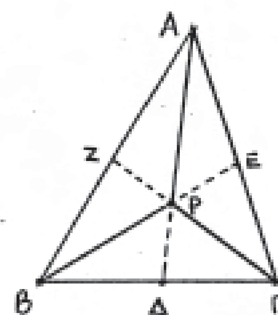
Αρκετά καλές λύσεις έχουν δώσει επίσης ο Γ. Νικητάκης και Γ. Δερμιτζάκης (ευθύ-αντίστροφο) που όμως είναι αρκετά μεγάλες μια και είναι πολύ αναλυτικές.

θ₄. α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε τα τρίγωνα ΑΡΒ, ΒΡΓ, ΓΡΑ να είναι ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Μ. Κασογλίδης (Πολ. Σχ. **Ξάνθης**)

Απόδειξη:

α΄ τρόπος: Αφού είναι



$$(\text{ΑΡΒ}) = (\text{ΒΡΓ}) = (\text{ΓΡΑ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}) \Rightarrow$$

το σημείο Ρ συμπίπτει με το σημείο τομής των διαμέσων ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ.

΄Εστω τώρα ότι τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ισόπλευρο και ας υποθέσουμε ότι ΒΓ ≠ ΓΑ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε

(1) $$\text{ΒΓ} < \text{ΓΑ} \Rightarrow$$

$$\text{ΑΔ} > \text{ΒΕ} \Rightarrow \frac{2}{3}\text{ΑΔ} > \frac{2}{3}\text{ΒΕ} \Rightarrow$$

(2) $$\text{ΑΕ} > \text{ΒΡ}$$

Τότε θα έχουμε

Περίμετρος $\hat{\text{ΒΡΓ}}$ = ΒΓ + ΓΡ + ΡΒ < λόγω της (1)

ΓΑ + ΓΡ + ΡΒ < λόγω της (2)

ΓΑ + ΓΡ + ΑΡ = περίμετρος $\hat{\text{ΓΡΑ}}$

'Ατοπο αφού από την υπόθεση

$$\text{περιμ. } \overset{\triangle}{ΒΡΓ} = \text{περιμ. } \overset{\triangle}{ΓΡΑ}$$

Στο άτοπο φθάσαμε υποθέτοντας ότι $ΒΓ \neq ΓΑ$. 'Αρα είναι

(3) $$ΒΓ = ΑΓ$$

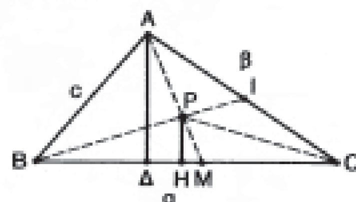
ομοίως αποδεικνύουμε ότι

(4) $$ΑΒ = ΒΓ$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισόπλευρο.

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εξωτερικό του, τέτοιο ώστε τα τρίγωνα ΑΡΒ, ΒΡΓ, ΓΡΑ να είναι ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη:



α' τρόπος: 'Εστω ότι το σημείο Ρ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν βρίσκεται το Β σε σχέση με την ΑΓ. 'Εστω ακόμη Κ σημείο τομής των ΑΓ και ΒΡ.

Από την υπόθεση δίνεται

$(ΑΡΒ) = (ΓΡΑ)$ αφαιρώντας το ΑΚΡ ⇒

$(ΑΚΒ) = (ΡΚΓ)$ προσθέτοντας το ΒΚΓ ⇒

(1) $$(ΑΒΓ) = (ΡΒΓ)$$

Η (1) μας λέει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΡΒΓ έχουν ίσα εμβαδά και επειδή έχουν κοινή βάση θα έχουν ίσα ύψη, που σημαίνει ότι

(2) $$ΒΓ \parallel ΑΡ$$

Ομοίως από την υπόθεση δίνεται

$(ΒΡΓ) = (ΓΡΑ)$ αφαιρώντας το ΡΚΓ προκύπτει

$(ΒΚΓ) = (ΚΡΑ)$ προσθέτοντας το ΑΒΚ προκύπτει

(3) $$(ΑΒΓ) = (ΑΒΡ)$$

Η (3) μας λέει ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΡ έχουν ίσα εμβαδά και επειδή έχουν κοινή βάση θα έχουν ίσα ύψη, που σημαίνει ότι

(4) $$ΑΒ \parallel ΓΡ$$

Από τις (2) και (4) προκύπτει ότι το ΑΒΓΡ είναι παραλληλόγραμμο. 'Εχουμε τώρα ότι τα ΑΡΒ και ΑΡΓ είναι και ισοπεριμετρικά ⇒

(5) $$ΑΡ + ΡΒ + ΒΑ = ΑΡ + ΡΓ + ΑΓ$$

και αφού το ΑΒΓΡ είναι παραλληλόγραμμο είναι

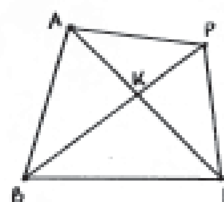
$$ΑΒ = ΓΡ$$

και από την (5) προκύπτει $ΒΡ = ΑΓ$ δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΡ έχει ίσες διαγώνιες, οπότε είναι ορθογώνιο.

'Αρα $\hat{Β} = 90°$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β' τρόπος: (Γ. Νικητάκης)

Λύση:



(α) Επειδή

$$(ΑΡΒ) = (ΒΡC) = (ΑΡC) \Rightarrow (ΒΡC) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ).$$

Εδώ ΡΗ, $ΑΔ \perp ΒΓ$ από τη σχέση:

$$(ΒΡC) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(ΒC)\cdot(ΡΗ) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(ΒΓ)\cdot(ΑΔ) \Rightarrow \frac{(ΡΗ)}{(ΑΔ)} = \frac{1}{3}$$

αλλά $$\frac{ΡΗ}{ΑΔ} = \frac{ΡΜ}{ΑΜ} \Rightarrow ΡΜ = \frac{1}{3}ΑΜ.$$

'Ομοια $ΡΙ = \frac{1}{3}ΒΙ$. 'Αρα το Ρ είναι το κέντρο βάρους του ΑΒC.

Από θεώρημα διαμέσων έχω: $$\begin{cases} α^2 + β^2 = 2μ_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \\ α^2 + c^2 = 2μ_β^2 + \dfrac{β^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$4(μ_c^2 - μ_β^2) = 3(β^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(μ_c - μ_β)(μ_c) - 3(β - c)(β + c) = 0 \qquad (Ι)$$

Είναι $ΡΑ + ΑΒ + ΒΡ = ΑΡ + ΡC + CΑ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}μ_α + c + \frac{2}{3}μ_β = \frac{2}{3}μ_α + \frac{2}{3}μ_c + β \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(μ_c - μ_β) = c - β \Rightarrow μ_c - μ_β = \frac{3}{2}(c - β) \quad (ΙΙ)$$

Η (Ι) βάσει της (ΙΙ) δίνει:

$$4\cdot\frac{3}{2}(c - β)(μ_c + μ_β) + 3(c - β)(β + c) = 0 \Rightarrow$$

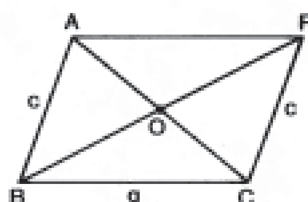
$$(c - β)[6(μ_c + μ_β) + 3(β + c)] = 0 \Rightarrow c = β$$

όμοια και $c = α$ τελικά $α = β = c$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΡ και CΡΑ έχουν την ίδια βάση ΑΡ και το ίδιο εμβαδό άρα $ΑΡ \parallel ΒC$. Τα τρίγωνα ΒΡC και CΡΑ έχουν την ίδια βάση ΡC και είναι ισο-

εμβαδικά. Άρα $PC \parallel AB$. Σχηματίζεται άρα το παραλληλόγραμμο APCB.

Από το παραλληλόγραμμο ABCP είναι φανερό ότι $(ABP) = (BPC)$ και ότι



$$AB + AP + BP = BP + BC + PC.$$

Άρα τα τρίγωνα ABP και BPC είναι ισοπεριμετρικά.

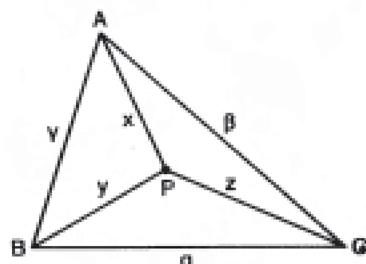
Επειδή τα τρίγωνα ABP και APC είναι ισοπεριμετρικά παίρνουμε:

$$AB + BP + AP = AP + AC + PC \Rightarrow BP = AC \Rightarrow$$

$$ABCP \text{ ορθογώνιο} \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

3ος τρόπος: Χ. Αθανασιάδης (**Θεσσαλονίκη**)

Είναι



$$AP + BP + AB = AP + CP + AC = BP + CP + BC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y + \gamma = x + z + \beta = y + z + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \gamma = z + \beta \wedge x + \gamma = z + \alpha \wedge x + \beta = y + \alpha \quad (1)$$

Παίρνω τα $A\hat{B}P$ και $A\hat{C}P$. Προφανώς έχουν την ίδια περίμετρο τ, κι επειδή είναι ισεμβαδικά από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \sqrt{\tau(\tau-\gamma)(\tau-y)(\tau-x)} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau-\beta)(\tau-z)(\tau-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau(\tau-\gamma)(\tau-y)(\tau-x) = \tau(\tau-\beta)(\tau-z)(\tau-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\tau-\gamma)(\tau-y) = (\tau-\beta)(\tau-z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y+\gamma}{2} - \gamma\right)\left(\frac{x+y+\gamma}{2} - y\right) =$$

$$= \left(\frac{x+z+\beta}{2} - \beta\right)\left(\frac{x+z+\beta}{2} - z\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y-\gamma)(x-y+\gamma) = (x+z-\beta)(x-z+\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - (y-\gamma)^2 = \cancel{x^2} - (z-\beta)^2 \Leftrightarrow (y-\gamma)^2 = (z-\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - \gamma = \pm(z-\beta) \Leftrightarrow y - \gamma = z - \beta \vee y - \gamma = \beta - z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + \beta = z + \gamma \vee y + z = \beta + \gamma.$$

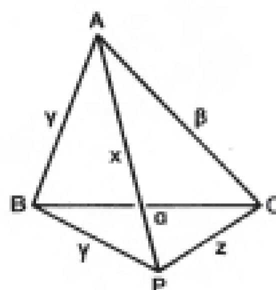
Αν προσέξουμε όμως το σχήμα, το $y + z = \beta + \gamma$ αποκλείεται διότι $y + z < \beta + \gamma$ (εφ. 6, σελ. 26, γεωμετ. Α΄ Λυκείου): Άρα $y + \beta = z + \gamma$. Απ' τις σχέσεις (1) έχουμε $y + \gamma = z + \beta$

$$y + \beta = z + \gamma \wedge y + \gamma = z + \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + \cancel{\beta} + \cancel{\gamma} = 2z + \cancel{\gamma} + \cancel{\beta} \Rightarrow 2y = 2z \Rightarrow y = z \Rightarrow \beta = \gamma$$

(ή αφαιρώντας κατά μέλη τις 2 ισότητες). Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι $\alpha = \beta$ κι επομένως

$$AB = BC = CA$$



Σύμφωνα με τα προηγούμενα απ' τα $A\hat{B}P$ και $B\hat{P}C$ έχουμε $\gamma + \alpha = x + z \vee \gamma + z = x + \alpha$. Το δεύτερο όμως απορρίπτεται διότι $x + \alpha > \gamma + z$ (άσκ. 9α σελ. 27 γεωμετρίας Α΄ Λυκείου). Άρα

$$\alpha + \gamma = x + z.$$

Απ' τις σχέσεις (1) όμως έχουμε $\alpha + z = x + \gamma$. Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$2\alpha + \cancel{z} + \cancel{\gamma} = 2x + \cancel{\gamma} + \cancel{z} \Rightarrow 2\alpha = 2x \Rightarrow \alpha = x,$$

και με αφαίρεση

$$\cancel{\alpha} + \gamma - \cancel{\alpha} - z = \cancel{x} + z - \cancel{x} - \gamma \Rightarrow 2\gamma = 2z \Rightarrow \gamma = z.$$

$$y + \gamma = z + \beta \overset{\gamma = z}{\Longrightarrow} \beta = y \quad (\gamma = z \wedge \beta = y) \Rightarrow$$

το ABPC είναι παραλληλόγραμμο και αφού $\alpha = x \Rightarrow$ το ABPC είναι ορθογώνιο $\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

* Καλή λύση έχει δοθεί και απ' τον Γ. Δερμιτζάκη (**Αθήνα**) αλλά ο σύνθετος τρόπος και το μακροσκελές της γραφής τη κάνουν μη δημοσιεύσιμη.

ΣΤΗΛΗ ΟΛ[redacted]

27η ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Θέμα (Γ. Τζήκας - **Σέρρες**) [ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ]

• Έστω f: [0, 1] → [0, 1] για την οποία ισχύει:
ι) $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$
ιι) $f(x + y) - f(x) = f(x) - f(x - y)$ για κάθε x, y τέτοια ώστε:

$$x \in [0, 1] \text{ και } [x - y, x + y] \subset [0, 1].$$

Να δείξετε ότι: $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Λύση

• Πρώτα-πρώτα, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ και $y = x$,

$[x - y, x + y] = [x - x, x + x] = [0, 2x] \subset [0, 1]$.

Συνεπώς η σχέση (ιι) δίνει $f(2x) - f(x) = f(x) - f(0)$

ή $$f(2x) = 2f(x) \quad (1).$$

Από την άλλη πλευρά, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$ και $y = 1 - x$,

$$[x - y, x + y] = [2x - 1, 1] \subset [0, 1].$$

Άρα ή σχέση (ιι) δίνει $f(1) - f(x) = f(x) - f(2x - 1)$

ή $$f(2x - 1) = 2f(x) - 1 \quad (2)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) - x$.

Είναι φανερό ότι $F([0, 1]) \subseteq [-1, 1]$, αφού:

$\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ και $-1 \leqslant -\chi \leqslant 0 \Rightarrow$

$$F(x) = f(x) - x \in [-1, 1].$$

Συνεπώς αν $M = \text{Sup}\,|F(x)| = \text{Sup}\,|f(x) - x|$,

τότε $0 \leqslant M \leqslant 1$ (αφού $\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant |F(x)| \leqslant 1$).

Θα αποδείξουμε ότι $M = 0$.

Πράγματι αν $M > 0$, τότε $\exists\, x_1 \in [0, 1]$,

$\frac{M}{2} < |F(x_1)| \leqslant M$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ τότε από (1) έχουμε: $|F(2x_1)| =$

$= |f(2x_1) - (fx_1)| = |2(f(x_1) - 2x_1| = 2|f(x_1) - x_1|$

$= 2|F(x_1)| > 2\frac{M}{2} = M$ ή $|F(2x_1)| > M$, το οποίο

είναι άτοπο (αφού: $2x_1 \in [0, 1] \Rightarrow |F(2x_1)| \leqslant M$).

β) Αν $\frac{1}{2} < x_1 \leqslant 1$ τότε από την (2) έχουμε:

$|F(2x_1 - 1)| = |f(2x_1 - 1) - (2x_1 - 1)| =$

$|2f(x_1) - 1 - 2x_1 + 1| = 2|f(x_1) - x_1| =$

$2|F(x_1)| > 2\frac{M}{2} = M$ ή $|F(2x_1 - 1)| > M$,

το οποίο είναι άτοπο (αφού: $2x_1 - 1 \in [0, 1] \Rightarrow$

$$|F(2x_1 - 1)| \leqslant M).$$

Επομένως τελικά, $M = 0 = \sup|F(x)|\ x \in [0, 1] \Rightarrow$

$\forall x \in [0, 1], |F(x)| = |f(x) - x| \leqslant M = 0 \Rightarrow$

$\forall x \in [0, 1], |F(x)| = |f(x) - x| = 0 \Rightarrow$

$\forall x \in [0, 1], f(x) - x = 0$ ή $f(x) = x$.

Θέμα (Γ. Τζήκας - **Σέρρες**) [ΕΣΣΔ]

• Να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων το σύστημα: $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 8$.

Λύση

• Είναι φανερό ότι: $\forall\ x, y, z, \in \mathbb{Z}, (x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 8) \Leftrightarrow (x + y + z = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 8 \wedge 3(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^3 + (x^3 + y^3 + z^3) \Leftrightarrow (x + y + z = 8 \wedge 3(x + y)(y + z)$

(Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Β. Ζώτος, Γ. Ωραιόπουλος, Β. Ντζιαχρήστος, Γ. Τυρλής).

$(z + x) = 8^3 - 8 = 8\,(8^2 - 1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \Leftrightarrow$

$(y + z = 8 - x \wedge (x + y)\,(8 - x)\,(z + x) = 8 \cdot 3 \cdot 7 = 168)$

$\Leftrightarrow (y + z = 8 - x \wedge (8 - x)\,[x^2 + (8 - x)x + yz] = 168$

$(y + z = 8 - x \wedge (8 - x)\,(x^2 + 8x - x^2 + yz) = 168)$

$$\Leftrightarrow (y + z = 8 - x \wedge yz = -8x + \frac{168}{8-x}\ )\ (1)$$

Το σύστημα (1) έχει ακέραιες λύσεις τότε ακριβώς, όταν:

ι) ο $8 - x = \omega \in \Delta\,(168) = \Delta\,(2^3 \cdot 3 \cdot 7)$

ιι) η ως προς t εξίσωση: $t^2 - (y + z)\,t + yz = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 - \omega t + [-8\,(8 - \omega) + \frac{168}{\omega}] = 0$$

με ρίζες τους $y, z \in \mathbb{Z}$, έχει διακρίνουσα $D = \omega^2 - 4$

$$[-8(8 - \omega) + \frac{168}{\omega}] = (\omega - 16)^2 - \frac{672}{\omega} = q^2$$

(όπου $q \in \mathbb{Z}$) και ο $\omega + |q|$ είναι άρτιος ακέραιος.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι το σύστημα (1) έχει λύσεις τις ($x = 8 - \omega$, $y = (\omega + |q|: 2$, $z = (\omega - |q|): 2$) και ($x = 8 - \omega$, $y = (\omega - |q|): 2$,

$$z = (\omega + |9|): (2) \text{ όπου } \omega \in \Delta\,(168) =$$

$= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 14, \pm 21, \pm 24, \pm 28, \pm 42, \pm 56, \pm 84, \pm 168\}$, $q^2 = (\omega - 16)^2$

$$-\frac{672}{\omega} \text{ με } q \in \mathbb{Z}, \text{ και } \omega + |q| \in \mathbb{Z}_2 =$$

$\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$. Έτσι λοιπόν έχουμε τις παρακάτω λύσεις:

ω	$D = q^2$	$\omega + \|q\|$	$x = 8 - \omega$	$y = (\omega \pm \|q\|):2$	$z = (\omega \pm \|q\|):2$
24	6^2	30	− 16	15	9
24	6^2	30	− 16	9	15
− 1	31^2	30	9	15	− 16
− 1	31^2	30	9	− 16	15
− 7	25^2	18	15	9	− 16
− 7	25^2	18	15	− 16	9

Λύσεις στα θέματα της 27ης Δ.Μ.Ο (Απ' τα προηγούμενα) χρόνια. Δείτε τεύχος 2 (σχ. χρονιά 86-87). Από τον Χ. Αθανασιάδη **Θεσ/νίκη.**

3ο Θέμα: (Κίνα) : Έστω Z_i ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο σημείο A_i, ω_i ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο P_i στο μιγαδικό επίπεδο. Αφού το $P_{\kappa+1}$ προκύπτει με στροφή του P_κ γύρω απ' το $A_{\kappa+1}$ κατά $-\frac{2\pi}{3}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{A_{\kappa+1} P_{\kappa+1}}$ προκύπτει από στροφή του $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A_{\kappa+1} P_\kappa}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{3}$ και αφού στα M', M απεικονίζονται οι $\omega_{\kappa+1} - z_{\kappa+1}$ αντίστοιχα θα έχουμε

$$\omega_{\kappa+1} - z_{\kappa+1} =$$

$$= (\omega_\kappa - z_{\kappa+1}) \left[\text{συν}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Θέτοντας $\quad \text{συν}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{ημ}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = A$

παίρνουμε $\quad \omega_{\kappa+1} - z_{\kappa+1} =$

$$= (\omega_\kappa - z_{\kappa+1})\,A \Leftrightarrow \omega_{\kappa+1} - A\omega_\kappa = (1 - A)\,z_{\kappa+1}$$

$$\forall \kappa \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ή
$$\omega_1 - A\omega_0 = (1 - A)\,z_1$$
$$\omega_2 - A\omega_1 = (1 - A)\,z_2$$
$$\vdots$$
$$\omega_{1986} - A\omega_{1985} = (1 - A)\,z_{1986})$$
$$\vdots$$

Εύκολα όμως απ' αυτές τις σχέσεις υπολογίζουμε τον ω_ν. Πράγματι επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$\omega_\nu = (1 - A)$$

$$(A^{\nu-1} z_1 + A^{\nu-2} z_2 + \ldots + A z_\nu + z_\nu) + A^\nu \omega_0 \quad (1)$$

Το A όμως είναι κυβική ρίζα της μονάδας άρα

$$A^{3k} = 1,\ A^2 = -A - 1.$$

Για $\nu = 1986$ και εφόσον $\omega_{1986} = \omega_0$ η (1) δίνει:

$$\omega_0 = (1 - A)$$

$$(A^{1985} z_1 + A^{1984} z_2 + \ldots + A z_{1985} + z_{1986}) +$$

$$+ A^{3 \cdot 662} \omega_0 \Leftrightarrow (1 - A)$$

$$(A^{1985}z_1 + A^{1984}z_2 + ... + Az_{1985} + z_{1986}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{3\cdot661+2}z_1 + A^{3\cdot661+1}z_2 + A^{3\cdot661}z_3 + ... +$$

$$+ Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2z_1 \cdot 662 + Az_2\, 662 + z_3 \cdot 662 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2z_1 + Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - z_1 - Az_1 + Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(-A) \Leftrightarrow$$

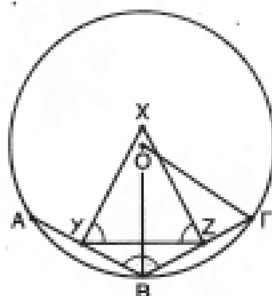
$$\Leftrightarrow z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

πράγμα που σημαίνει ότι το z_3 προκύπτει από στροφή του z_2 γύρω απ' το z_1 κατά γωνία $\frac{\pi}{2} = 60^0$, άρα το $A_1 \hat{A}_2 A_3$ είναι ισόπλευρο.

4ο Θέμα (Ισραήλ): Εύκολα βλέπουμε ότι το ΧΥΒΖ είναι εγγράψιμο ($Y \in AB$, $Z \in B\Gamma$, $X\hat{Y}Z = O\hat{B}\Gamma$, όπου Α, Β, Γ διαδοχικές κορυφές του κανονικού πολυγώνου), αφού

$$\hat{X} + A\hat{B}\Gamma = B\hat{O}\Gamma + O\hat{B}\Gamma + + O\hat{\Gamma}B = 180^0,$$

άρα $\quad Y\hat{B}X = Y\hat{Z}X = Y\hat{B}O,$



δηλ. το Χ κινείται στην προέκταση της ΒΟ. Θα βρω τη μέγιστη απόσταση ΧΟ. Είναι

$$XB \cdot YZ = BY \cdot R + + BZ \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XB = \frac{R(BY+BZ)}{AB} = \frac{R}{\alpha}\,(BY + BZ),$$

όπου $AB = \alpha$. Επομένως το ΧΒ γίνεται μέγιστο όταν το $BY + BZ$ γίνεται μέγιστο.

Αλλά $\quad YZ = \alpha, \quad Y\hat{B}Z = 2\phi = $ σταθ.

άρα ως γνωστόν το $BY + BZ$ γίνεται μέγιστο όταν

$$BY_0 = BZ_0, \quad \text{άρα} \quad BO \perp Y_0Z_0,$$

οπότε $\frac{\alpha/2}{BY_0} = \eta\mu\phi \Rightarrow 2BY_0 = \frac{\alpha}{\eta\mu\phi} = BY_0 + BZ_0$

και συνεπώς

$$XB_{\mu\epsilon\gamma.} = \frac{R}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\eta\mu\phi} = \frac{R}{\eta\mu\phi} = BX_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OX_0 = R\left(\frac{1}{\eta\mu\phi} - 1\right),$$

όπου $\quad \phi = O\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\nu}.$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι όλα τα (ν σε πλήθος) τμήματα $O\Delta_i$, $i = 1, 2, ..., \nu$ με $\Delta_i \in OA_i$ και

$$O\Delta_i = OX_0 = R\left(\frac{1}{\eta\mu\phi} - 1\right), \qquad \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\nu}.$$

5ο Θέμα (Αγγλία): Από την

$$f[xf(y)] \cdot f(y) = f(x + y)$$

για $y = 2$ είναι

$$f(x+2) = f[xf(2)] \cdot f(2) = 0,$$

άρα $\quad f(x) = 0 \ \forall x > 2.$

Έστω $x + y = 2$, $x, y > 0$, τότε

$$f[xf(2 - x)]\, f(y) = f(2) = 0$$

$$\text{όπου} \Rightarrow [f(y) \neq 0] \Rightarrow f[xf(2-x)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot f(2-x) \geqslant 2 \Rightarrow \phi(2-x) \geqslant \frac{2}{x}$$

ή αν βάλουμε το $2 - x$ όπου x,

$$f(x) \geqslant \frac{2}{2-x}\ (1)\ \forall x \in [0, 2].$$

Έστω $\quad x+y < 2.$

$$f[xf(y)]\, f(y) = f(x+y) \neq 0 \Rightarrow f[xf(y)] \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf(y) < 2 \Rightarrow f(y) < \frac{2}{x}$$

για $x + y < 2$, δηλ. $f(x) < \frac{2}{y}$ όταν $x+y < 2$.

Έστω $\quad x+y+\varepsilon = 2, \quad \varepsilon > 0,$

τότε $$f(x) < \frac{2}{2\text{-}x\text{-}\varepsilon} \qquad (2)$$

Εάν όμως $f(x) > \frac{2}{2-x}$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ όπως εύκολα αποδεικνύεται τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq \frac{2}{2\text{-}x\text{-}\varepsilon}, \qquad 2\text{-}x\text{-}\varepsilon > 0$$

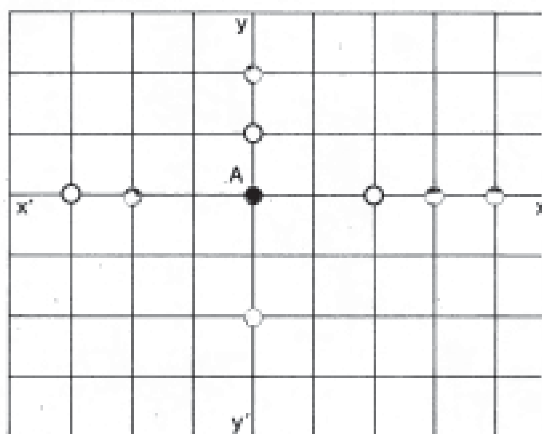
(διότι αρκεί να είναι $\varepsilon < 2-x - \frac{2}{f(x)}$), άτοπο ως προς τη (2).

Άρα $f(x) \le \frac{2}{2-x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2-x}$.

Δηλ. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ αν } x \in [2, +\infty) \\ \frac{2}{2-x}, \text{ αν } x \in [0,2) \end{cases}$

6ο Θέμα (Ανατ. Γερμανία): Θα αποδείξω την πρόταση επαγωγικά (ότι δηλαδή ∀ Ε μπορούμε να χρωματίσουμε τα σημεία του μ' αυτόν τον τρόπο).

Όταν τα σημεία είναι 1 ή 2, η πρόταση είναι φανερή. Έστω ότι ισχύει για πλήθος κ. Θεωρούμε κ+1 σημεία με ακέραιες συντεταγμένες και διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.



α) Κάποιος άξονας περιέχει περιττό πλήθος σημείων απ' τα κ+1, έστω ο xx'. Διαλέγουμε ένα σημείο του Α στην τύχη και θεωρούμε το χρωματισμό των υπόλοιπων κ σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής ώστε σε κάθε οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα η διαφορά των άσπρων απ' τα κόκκινα σημεία να είναι −2, 0 ή 1. Αφού όμως ο xx'' έχει άρτιου πλήθους σημεία απ' τα κ, περιέχει τόσα άσπρα όσα και κόκκινα σημεία. Επομένως ό,τι κι αν βάψουμε το Α η διαφορά των άσπρων απ' τα κόκκινα στον xx' (ας τη συμβολίσουμε Δxx') είναι 1 ή −1. Αν yy'' ο κάθετος άξονας στον xx' στο Α, τότε αν Δyy' = 1 (τα άσπρα είναι περισσότερα κατά 1) ή Δyy' = 0 βάφουμε το Α κόκκινο, ενώ το βάφουμε άσπρο αν Δyy' = 1 και η πρόταση αποδείχτηκε και για τον κ+1.

β) Όλοι οι άξονες έχουν άρτιο πλήθος σημείων (εννοώ τα αρχικά κ+1 σημεία).

Εξαιρούμαι τυχαία πάλι σημείο Α και θεωρούμε το χρωματισμό, σύμφωνα με την υπόθεση, των υπολοίπων κ. Έστω xx', yy' οι δυο άξονες που περνούν απ' το Α. Για κάθε άξονα $x_1 x_1'$, ≠ xx', yy' είναι $\Delta x_1 x_1' = 0$ αφού ο $x_1 x_1'$ έχει άρτιο πλήθος σημείων, ενώ

$$\Delta xx' = \pm 1, \qquad \Delta yy' = \pm 1.$$

Αλλά Δxx' = Δyy', διότι αν $x_i x_i'$ είναι οι οριζόντιοι, $y_i y_i'$ οι κάθετοι άξονες τότε

$$\sum_{i\geq 2} \Delta x_i x_i' = \sum_{i\geq 2} \Delta y_i y_i' \Rightarrow \Delta xx' = \Delta yy'.$$

Αν λοιπόν Δxx' = Δyy' = −1 (σχ. 1)

τότε βάφουμε το Α άσπρο, ενώ αν

$$\Delta xx' = \Delta yy' = 1,$$

το βάφουμε κόκκινο και η πρόταση ισχύει και για τον κ+1.

Άρα και για κάθε ν, δηλ. για οποιοδήποτε Ε.

28η ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Θέμα 5ο: (Χ. Αθανασιάδης - **Θεσ/νίκη**)*

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε στο επίπεδο ν σημεία μη συνευθειακά ανά 3 ώστε οι αποστάσεις ανά 2 να είναι άρρητες και τα εμβαδά όλων των τριγώνων να είναι ρητά.

Απόδειξη

Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και τα σημεία

$$A_i\,(x_i, y_i),\ i \in \{1, 2, \ldots, \nu\} = S$$

στο επίπεδο. Είναι

$$d(A_i A_j) = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \quad \forall i,\ j \in S,\ i \neq j$$

και $\pm 2\,(E_{A_iA_jA_\kappa}) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_\kappa & y_\kappa & 1 \end{vmatrix}$

για $i, j, \kappa \in S,\ i \neq j \neq \kappa \neq i$

Αν θέσουμε $x_i = i^2,\ y_i = i\ \forall i \in S$,

τότε $d(A_i A_j) = |i-j| \cdot \sqrt{(i+j)^2+1}$,

όπου προφανώς $\sqrt{(i+j)^2+1} \notin Q$

γιατί θα έπρεπε $i + j = 0$ άτοπο και

$$\pm 2(A_i A_j A_\kappa) = (i-j)\,(j-\kappa)\,(i-\kappa) \in Q^*$$

(ορίζουσα Vandermonde).

Οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται.

---

* συνέχεια απ' το προηγούμενο τεύχος

4η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Έγινε στις 19 Δεκέμβρη '87 στην Αθήνα η 4η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα με συμμετοχή 200 περίπου ατόμων απ' όλη την Ελλάδα, που είχαν διακριθεί στον Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό της 6ης Νοέμβρη '87. Έχει κιόλας γίνει ο 1ος και 2ος προπαρασκευαστικός γύρος και θα υπάρξει ο αντίστοιχος (6 Φεβρ. '88) και (12 Μάρτη '88) τελικός γύρος τον Απρίλη '88 με έγκαιρη γνωστοποίηση της ημερομηνίας προς τους προκριθέντες μαθητές. Ο 2ος προπαρασκευαστικός γύρος περιλαμβάνει ύλη Β' Λυκείου, ενώ ο 3ος τελικός γύρος περιλαμβάνει ύλη Γ' Λυκείου. Σ' αυτό το τεύχος δημοσιεύουμε:

- Τα θέματα της 4ης Εθνικής Ολυμπιάδας Μαθηματικών και τις λύσεις των βραβευθέντων μαθητών, ενώ:
- Τα θέματα του 2ου και 3ου προπαρασκευαστικού κύκλου και οι λύσεις τους (του 1ου είχαν δημοσιευτεί στο 3ο τεύχος).
- Τα ονόματα των βραβευθέντων μαθητών στον 1ο Πανελλήνιο Μαθηματικό διαγωνισμό καθώς και τα ονόματα των βραβευθέντων μαθητών στην 4η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών.
- Την Εθνική ομάδα που πήρε μέρος στην Κύπρο (5η Βαλκανιάδα) και 29η Διεθνή Ολυμπιάδα (Καμπέρα - Σίδνεϋ - Αυστραλία), θα δημοσιευτούν στο τεύχος (1) της επόμενης σχολικής χρονιάς.

Γ' Γυμνασίου

Θ1: α) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \beta\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)$$

έτσι ώστε η παράσταση να πάρει την απλούστερη μορφή.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{2x^2 - (3\alpha+\beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - (\alpha+3\beta)x + \alpha\beta + \beta^2}$$

Λύση:

α) $$\left(\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \beta\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha(\alpha+\beta) - 4\alpha\beta + \beta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right) :$$

$$: \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{-(\alpha-\beta)} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 4\alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha+\beta} : \frac{\alpha(\alpha-\beta) + \beta(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha+\beta} : \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta} : \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta} \cdot \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} = \alpha - \beta$$

β) $$\frac{2x^2 - (3\alpha+\beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - (\alpha+3\beta)x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3\alpha x - \beta x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - \alpha x - 3\beta x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2\alpha x - \alpha x - \beta x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - \alpha x - 2\beta x - \beta x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{2x(x-\alpha) + \alpha(\alpha-x) + \beta(\alpha-x)}{2x(x-\beta) + \alpha(\beta-x) + \beta(\beta-x)} =$$

$$= \frac{(\alpha-x)(-2x+\alpha+\beta)}{(\beta-x)(-2x+\alpha+\beta)} = \frac{\alpha-x}{\beta-x}$$

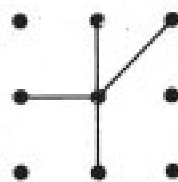
Θ2: Να φέρετε το μικρότερο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν σημεία του σχήματος έτσι, ώστε το νέο σχήμα που θα προκύψει να έχει ακριβώς

α) έναν άξονα συμμετρίας

β) δυο άξονες συμμετρίας

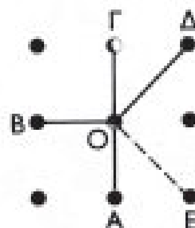
γ) τέσσερις άξονες συμμετρίας.

Να γίνει ξεχωριστό σχήμα για κάθε περίπτωση.

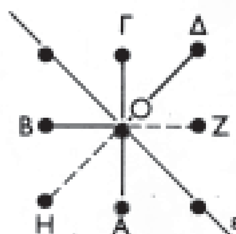


Λύση:

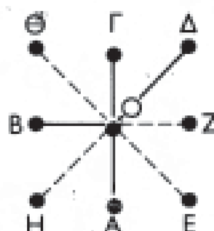
α) Στο σχήμα φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Έτσι το σχήμα αποκτά έναν άξονα συμμετρίας την ευθεία ΒΟ.



β) Στο σχήμα φέρνουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα, τα ΟΖ, ΟΗ. Έτσι το σχήμα αποκτά δυο άξονες συμμετρίας, τις ευθείες ΔΗ και ε.



γ) Στο σχήμα φέρνουμε 4 ευθύγραμμα τμήματα, τα ΟΕ, ΟΗ, ΟΒ, ΟΖ. Έτσι το σχήμα αποκτά 4 άξονες συμμετρίας τις ευθείες ΘΕ, ΔΗ, ΒΖ, ΑΓ.



Θ3: Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$p(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3, \quad q(x) = x^2 - 2x - 3,$

$R(x) = -x^2 - 5x + \alpha$

α) Να ορίσετε το α έτσι ώστε το πολυώνυμο R(x) να διαιρείται από το $x - 2$. β) Να αναλύσετε σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώμυμα P(x), Q(x), R(x). γ) Να δείξετε ότι η παράσταση $-x^2 + x + \frac{P(x)}{Q(x)} + 15$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

α) Αφού το πολυώνυμο $R(x) = -x^2 - 5x + \alpha$, διαιρείται από το $x - 2$, τότε το R(2) θα είναι ίσο με το 0, όπως ξέρουμε: Δηλαδή:

$R(2) = -2^2 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 10 + 4 \Leftrightarrow \alpha = 14$

Άρα το R(x) διαιρείται από το $x - 2$, όταν $\alpha = 14$.

β) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3 = x^3(x-3) + (x-3) =$
$= (x-3)(x^3+1) = (x-3(x+1)(x^2-x+1) \quad (1)$

$Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \quad (2)$

$R(x) = -x^2 - 5x + 14$

Το πολυώνυμο αυτό θα το αναλύσουμε σε γινόμενο παραγόντων

$R(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) =$
$= -(x+7)(x-2) = (x+7)(2-x)$

γ) $-x^2 + x + \frac{P(x)}{Q(x)} + 15 \overset{(1)(2)}{=}$

$\overset{(1)(2)}{=} -x^2 + x + \frac{(x-3)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-3)(x+1)} + 15 =$

$= -x^2 + x + x^2 - x + 1 + 15 = 16 = 4^2$

Θ4: α) Αν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ $\beta \neq \pm\gamma$ να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\beta^3+\gamma^3}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^3-\gamma^3}{\beta-\gamma}$.

β) Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \kappa$, $\alpha \neq 0$ να βρεθεί η παράσταση

$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$

σαν έκφραση του κ.

Λύση:

α) $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad (1)$

$$\frac{\beta^3+\gamma^3}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^3-\gamma^3}{\beta-\gamma} = \frac{(\beta^3+\gamma^3)(\beta-\gamma) + (\beta^3-\gamma^3)(\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{\beta^4 - \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 - \gamma^4 + \beta^4 + \beta^3\gamma - \beta\gamma^3 - \gamma^4}{\beta^2-\gamma^2} =$$

$$= \frac{2(\beta^4+\gamma^4)}{\beta^2-\gamma^2} = \frac{2(\beta^2+\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)}{\beta^2-\gamma^2} \overset{(1)}{=} 2\alpha^2$$

β) $\alpha = \frac{1}{\alpha} = \kappa \quad (1)$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 \quad (2)$$

$$x + \frac{1}{\alpha} = \kappa \Leftrightarrow \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2\right]^2 = (\kappa^2)^2 \Leftrightarrow \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2\right)^2 = \kappa^4 \Leftrightarrow$$

$$= \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} + 4 + 2 + 4\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2} = \kappa^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\left[\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 - 2\right] \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4(\kappa^2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\kappa^2 + 8 \Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 4\kappa^2 + 2$$

Οι λύσεις έχουν δοθεί απ' τον βραβευθέντα μαθητή Μαργαριτόπουλο Θωμά του **4ου γυμνασίου Βέροιας.**

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Έστω ότι $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ και

$$\sqrt{1987 + \alpha} + \sqrt{1987 + \beta} = 2\sqrt{1987 + \gamma}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \geqslant \gamma$.

Λύση:

$$\sqrt{1987 + \alpha} + \sqrt{1987 + \beta} = 2\sqrt{1987 + \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1987+\alpha}+\sqrt{1987+\beta}\right)^2=\left(2\sqrt{1987+\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 1987+(\alpha+\beta)=4\,(1987+\gamma)-$$
$$-2\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)}\quad :2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1987+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\,(1987+\gamma)-$$
$$-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\cdot 1987+2\gamma-1987-$$
$$-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\gamma+1987-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$\alpha>0,\ \beta>0\ (\gamma>0) \Rightarrow$ (με Ανισότητα των Μέσων ή Ανισότητα του Couchy) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(1987+\alpha)+(\beta+1987)}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

που λέει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{αν}\quad a_1, a_2 \dots a_\nu > a_n \\ \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_\nu}{\nu}\geqslant\sqrt{a_1a_2\dots a_\nu}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha>0\\1987>0\end{array}\right\}\Rightarrow 1987+\alpha>0 \qquad \left.\begin{array}{l}\beta>0\\1987>0\end{array}\right\}\Rightarrow 1987+\beta>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 1987+\alpha+1987+\beta}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 1987+(\alpha+\beta)}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1987+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)}-1987 \qquad (2)$$

$$(1),\ (2)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\gamma$$

Γ. Μιχάι **(5ο Λύκειο Αιγάλεω)**

Θ2: Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ στη βάση ΒΓ και σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$. Να αποδειχθεί ότι ΑΔ = ΑΕ.

Λύση:

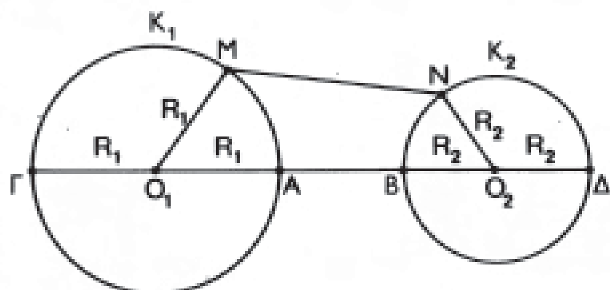
Απόδειξη: Φέρνω τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$, που τέμνει το ΒΓ στο Ξ και σχηματίζονται οι γωνίες $B\hat{A}\Xi = \Xi\hat{A}\Delta = x$ αλλά και $E\hat{\Delta}\Gamma = x$. 'Αρα η γωνία $A\hat{\Xi}\Delta = x + \hat{B}$ (εξωτερική του τριγώνου ΑΞΒ) και η γωνία $A\hat{E}\Delta = x + \hat{\Gamma}$ (εξωτερική του τριγώνου ΔΕΓ). 'Ομως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές) και συνεπώς $A\hat{\Xi}\Delta = A\hat{E}\Delta$.



Η γωνία $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}\Gamma - E\hat{\Delta}\Gamma \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = x + \hat{\Gamma} + x - \Delta$ (όπου $A\hat{\Delta}\Gamma = x + \hat{\Gamma} + x$ σαν εξωτερική στο $A\hat{\Delta}\Gamma$). 'Αρα, $A\hat{\Delta}E = x + \hat{\Gamma} = A\hat{E}\Delta \Rightarrow A\hat{\Delta}E$ ισοσκελές τρίγωνο $\Rightarrow$ ΑΔ = ΑΕ.

Α. Ματέκοβιτς **(Λύκειο Ζωγράφου)**

Θ3: Δυο κύκλοι (O_1, R_1), (O_2, R_2) βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου. Να βρεθεί ότι: α) το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων, β) το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων.



Απόδειξη: 1) Παίρνουμε δυο τυχαία σημεία $M \in K_1(O_1, R_1)$ και $N \in K_2(O_2, R_2)$.

Φέρνουμε επίσης την ευθεία O_1O_2 (ενώνει τα κέντρα των δυο κύκλων) που τέμνει το K_1 στο Α και το K_2 στο Β (Α, Β είναι εσωτερικά σημεία του ευθ. τμήματος O_1O_2). Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε θέση των Μ και Ν, η τεθλασμένη γραμμή O_1MNO_2 περιβάλλει το τμήμα O_1O_2 και συνεπώς:

$$O_1M + MN + NO_2 \geqslant O_1O_2 \Leftrightarrow R_1 + MN + R_1 + AB + R_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow MN \geqslant AB.$$

'Αρα το ελάχιστο μήκος του ευθ. τμήματος ΜΝ που συνδέει σημεία των δυο κύκλων είναι ίσο με το μήκος του ΑΒ, όπου ΑΒ βρίσκεται στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα του K_1 και K_2 και $A \in K_1$, $B \in K_2$ αλλά $O_1, O_2 \in AB$.

2) Με τα παραπάνω δεδομένα βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε σημεία Μ και Ν (που τα ορίσαμε προηγουμένως), η τε-

θλασμένη γραμμή MO_1O_2N περιβάλλει το τμήμα MN και άρα:

$MO_1 + O_1O_2 + O_2N \geq MN \Leftrightarrow R_1 + O_1O_2 + R_2 \geq MN$ (1)

Αν προεκτείνουμε την O_1O_2 μέχρι να τμήσει το K_1 δεύτερη φορά στο Γ και το K_2 στο Δ (Γ, Δ εξωτερικά σημεία του O_1O_2) θα έχουμε ότι: $\Gamma\Delta = R_1 + O_1O_2 + R_2$ (2)

Από την (1) και (2) $\Rightarrow \Gamma\Delta \geq MN$.

Επομένως, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος του MN είναι ίση με το μήκος ΓΔ. Και άρα, το μεγαλύτερο ευθ. τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων K_1, K_2 είναι αυτό που περνάει από τα κέντρα των δυο κύκλων και έχει άκρα τα $\Gamma \in K_1$ και $\Delta \in K_2$ ε.ω. $\Gamma, \Delta \in O_1O_2$ (τμήμα).

Α. Ματέκοβιτς **(Λύκειο Ζωγράφου)**

Θ4: Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\kappa^2 + 2\lambda$, $\lambda^2 + 2\kappa$ να είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

Λύση: Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \kappa^2 + 2\lambda = x^2 \Rightarrow 2\lambda = x^2 - \kappa^2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x^2 - \kappa^2}{2} \\ \lambda^2 + 2\kappa = y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - \kappa^2}{2}\right)^2 + 2\kappa = y^2 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 2x^2\kappa^2 + \kappa^4}{4} + 2\kappa = y^2 \mid 4 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x^4 - 2x^2\kappa^2 + \kappa^4 + 8\kappa = 4y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2(x^2)(\kappa^2) + (\kappa^4 + 8\kappa) = (2y)^2 \\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

για να έχουμε ένα τετράγωνο πρέπει:

$$(\kappa^2)^2 = \kappa^4 + 8\kappa \Leftrightarrow \kappa^4 = \kappa^4 + 8\kappa \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \kappa = 0$ μα από την υπόθεση $\kappa \neq 0$.

Άρα δεν υπάρχουν κ και λ φυσικοί θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\kappa^2 + 2\lambda$ και $\lambda^2 + 2\kappa$ να είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

Γ. Μιχάι **(5ο Λύκειο Αιγάλεω)**

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Δίνεται ότι $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ και

$$x + y = 2\alpha - 4, \quad xy = \alpha^2 - 3\alpha + 5.$$

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $x^2 + y^2$;

Λύση: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy =$

$$= 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 - 2\alpha^2 + 6\alpha - 10 = 2\alpha^2 - 10\alpha + 6.$$

Όπως είναι γνωστό η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι συμβιβαστό το σύστημα

$x + y = S$, $xy = p$ είναι η $S^2 \geq 4p$,

άρα στην περίπτωσή μας η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η

$$(2\alpha - 4)^2 \geq 4(\alpha^2 - 3\alpha + 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 \geq 4\alpha^2 - 12\alpha + 20 \Leftrightarrow 4\alpha \leq -4 \Leftrightarrow \alpha \leq -1$$

Επομένως ζητάμε να βρούμε το $\min f(\alpha)$ $\alpha \in (-\infty, -1]$ όπου $f(\alpha) = 2\alpha^2 - 10\alpha + 6$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, άρα το $\min f(\alpha)$ $\alpha \in (-\infty, -1]$ είναι το

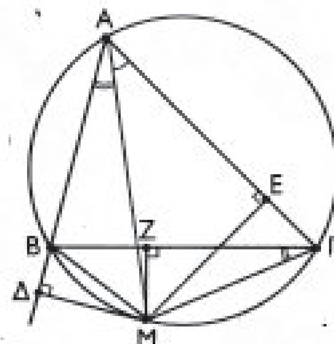
$$f(-1) = 2 + 10 + 6 = 18 \quad (\text{για } x = y = -3).$$

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Θ2: Δίνεται ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O, R). Αν M είναι σημείο του τόξου ΒΓ και αν Δ, Ε, Ζ είναι οι πόδες των καθέτων που άγονται από το σημείο M επί των ευθειών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(B\Gamma)^2}{(MZ)^2} \geq B\,\frac{R\,U_\alpha}{(M\Delta)\cdot(ME)}$$

όπου U_α είναι το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.



Λύση:

Κατ' αρχήν θα δείξω ότι:

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} + \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} \qquad (1)$$

Είναι

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ} + \overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} + \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}}$$

Αλλά $M\hat{B}\Gamma = M\hat{A}\Gamma \Rightarrow M\overset{\triangle}{B}Z \sim M\overset{\triangle}{A}E \Rightarrow \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{ME}}$ (2)

και $M\hat{\Gamma}B = M\hat{A}B \Rightarrow M\overset{\triangle}{\Gamma}Z \sim M\overset{\triangle}{A}\Delta \Rightarrow \dfrac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} = \dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{M\Delta}}$ (3)

(τα τρίγωνα είναι και ορθογώνια).

Ώστε

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} + \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} \overset{(2),(3)}{=\!=} \frac{\overline{AE}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{M\Delta}} =$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma} - \overline{E\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB} + \overline{B\Delta}}{\overline{M\Delta}} = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} - \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{B\Delta}}{\overline{M\Delta}} =$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} \quad \text{αφού } \Delta\hat{B}M = A\hat{\Gamma}M$$

διότι το ΑΒΜΓ είναι εγγράψιμο, οπότε

$$M\hat{E}\Gamma \sim M\hat{\Delta}B \Rightarrow \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{B\Delta}}{\overline{M\Delta}}.$$

Ώστε η (1) αποδείχτηκε (κατά τη διάρκεια της απόδειξης θεώρησα τις φορές των μοναδιαίων διανυσμάτων τέτοιες ώστε τα $\overline{AB}, \overline{A\Gamma}, \overline{B\Gamma}, \overline{M\Delta}, \overline{ME}, \overline{MZ}$ να είναι θετικά). Επομένως η (1) γράφεται και

$$\frac{B\Gamma}{MZ} = \frac{AB}{M\Delta} + \frac{A\Gamma}{ME} \qquad (4)$$

(όπου ΒΓ, ΜΖ, κ.λπ. τα μέτρα των τμημάτων).

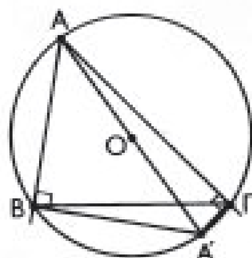
$$(4) \Rightarrow \frac{B\Gamma^2}{MZ^2} = \left(\frac{AB}{M\Delta} + \frac{A\Gamma}{ME}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{AB}{M\Delta} \cdot \frac{A\Gamma}{ME} =$$

$$= \frac{4 \cdot AB \cdot A\Gamma}{M\Delta \cdot ME} = \frac{4 \cdot 2RU_\alpha}{M\Delta \cdot ME} = \frac{8RU_\alpha}{M\Delta \cdot ME}$$

αφού $(x+y)^2 \geq 4xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ και ως γνωστόν

$$AB \cdot A\Gamma = \beta\gamma = 2RU_\alpha$$

σε κάθε τρίγωνο.



Διευκρίνιση: Στη λύση όπως φάνηκε δεν ήταν αναγκαία η χρήση αλγεβρικών τιμών. Μένει ακόμα να δειχτεί ότι τυχαίο σημείο Μ του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ προβάλλεται σε μια από τις ΑΒ, ΑΓ σε εσωτερικό σημείο και στην άλλη σε εξωτερικό (στην προηγούμενη απόδειξη υπέθεσα πως το Μ προβάλλεται σε εσωτερικό σημείο της ΑΓ).

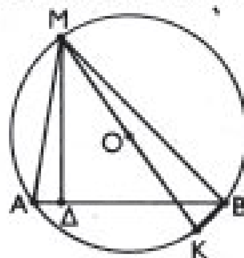
Έστω λοιπόν Α΄ το αντιδιαμετρικό του Α, και έστω Α΄ ∈ ΒΓ. Τότε αν $M \in \widehat{BA'}$ τότε το ίχνος του Μ στην ΑΓ είναι εσωτερικό της σημείο, της ΑΒ εξωτερικό. Αντίθετα αν $M \in \widehat{A'\Gamma}$ και η πρόταση αποδείχτηκε.

Είναι επίσης φανερή αν $A' \in \widehat{B\Gamma}$.

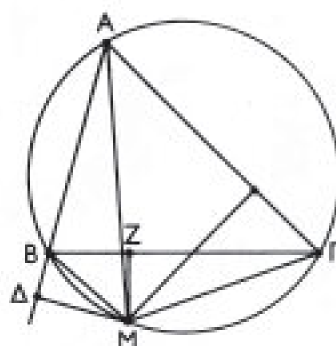
Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

2η λύση: Για την απόδειξη της ζητουμένης ανισοτικής σχέσης θα χρησιμοποιήσω την παρακάτω πρόταση.

Η απόσταση ΜΔ, ενός σημείου Μ του κύκλου (Ο, R) από μια τυχαία χορδή ΑΒ του κύκλου (Ο, R) είναι ίση με $\dfrac{MA \cdot MB}{2R}$



Απόδειξη: Τα τρίγωνα $M\hat{A}\Delta$ και $M\hat{K}B$ είναι όμοια (γιατί $\hat{\Delta} = \hat{B} = 1$ και $\hat{A} = \hat{K}$) επομένως: $(M\Delta) = \dfrac{(MA)\cdot(MB)}{2R}$.



Στο τετράπλευρο ΑΒΜΓ ισχύει το θεώρημα του Πτολεμαίου δηλαδή

$$(B\Gamma)\cdot(MA) = (AB)\cdot(M\Gamma) + (BM)\cdot(A\Gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha \cdot (MA) = \gamma \cdot (M\Gamma) + (BM)\cdot\beta \Rightarrow$$

$$[\alpha \cdot (MA)]^2 = [\gamma \cdot (M\Gamma) + (BM)\cdot\beta]^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \cdot (MA)^2 = \gamma^2 \cdot (M\Gamma)^2 + (BM)^2 \cdot \beta^2 + 2\beta\gamma \cdot (BM)(\Gamma M) \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \cdot (MA)^2 - 4\beta\gamma \cdot (BM)(\Gamma M) = [\gamma \cdot (M\Gamma) - (BM)\cdot\beta]^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \cdot (MA)^2 - 4\beta\gamma \cdot (BM)(\Gamma M) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \cdot (MA)^2 \geq 4\beta\gamma \cdot (BM)(\Gamma M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{(MB)(M\Gamma)} \geq 4\frac{\beta\gamma}{(MA)^2} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{(MB)(M\Gamma)} \geq 8\frac{\frac{\beta\gamma}{2}}{(MA)^2}$$

Επειδή ισχύει $\beta\gamma = 2RU_\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{(MB)(M\Gamma)} \geq 8\frac{R\cdot U_\alpha}{(MA)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{(MB)(M\Gamma)} \geq \frac{8RU_\alpha}{(MA)^2(MB)(M\Gamma)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2\alpha^2}{(MB)^2(M\Gamma)^2} \geq 8\frac{4R^2RU_\alpha}{(MA)^2(MB)(M\Gamma)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\left(\frac{(MB)\cdot(MA)}{2R}\right)^2} \geq 8\frac{RU_\alpha}{\left(\frac{MA\cdot MB}{2R}\right)\left(\frac{MA\cdot M\Gamma}{2R}\right)} \Rightarrow$$

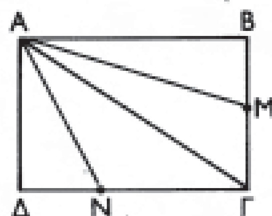
(Βλέπε θεώρημα στην αρχή)

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{(MZ)^2} \geq 8\frac{RU_\alpha}{(M\Delta)(ME)} \Rightarrow \frac{(B\Gamma)^2}{(MZ)^2} \geq 8\frac{RU_\alpha}{(M\Delta)(ME)}$$

Α. Οικονόμου **(35ο Λύκειο Αθήνας)** - Ειδικό βραβείο Γεωμετρίας

Θ3: Οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{(MB)}{(M\Gamma)} + \frac{(N\Delta)}{(N\Gamma)} > 1.$$



Λύση: Από το 1ο θεώρημα των διχοτόμων (και αφού προσθέσουμε κατά μέλη) έχουμε:

$$\frac{MB}{M\Gamma} + \frac{N\Delta}{N\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} + \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB + A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB + B\Gamma}{A\Gamma} > 1$$

γιατί οι ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ είναι πλευρές τριγώνου ή εφόσον

$$AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2, \quad \left(\text{επίσης } \frac{MB}{M\Gamma} + \frac{NB}{N\Gamma} \leq \sqrt{2}\right)$$

$$AB + B\Gamma > A\Gamma \Leftrightarrow AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \cdot B\Gamma > A\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot B\Gamma > 0 \quad \text{αληθές.}$$

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Θ4: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

i) Αν $\alpha, \beta \in A$, τότε $\sqrt{\alpha\beta} \in A$

$1 \in A$ και $2 \in A$.

Να αποδειχτεί ότι: $\sqrt[2^{1453}]{2^{1821}} \in A$.

Λύση: i) $\alpha \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in A$.

Πράγματι $\alpha \in A \wedge 1 \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot 1} \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in A$

ii) $\alpha \in A \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{2^\nu}} \in A \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$

Για $\nu = 1$ προκύπτει $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha} \in A$ αληθής (πρόταση 1).

Έστω πως ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλ. $^{\frac{1}{2^\kappa}} \in A$. Τότε από την πρόταση (1) παίρνουμε:

$$\sqrt{\alpha^{\frac{1}{2^\kappa}}} \in A \Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{1}{2^\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{2^\kappa \cdot 2}} \in A \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{2^{\kappa+1}}} \in A$$

και η πρόταση ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$, άρα η (2) αποδείχτηκε.

3) $2^{\frac{1}{2^\nu}} \in A \ \forall\ \nu \in \mathbb{N}^*$ (ισχύει λόγω της (2) αφού $2 \in A$).

4) $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+1}{2^{\nu+1}}} \in A \quad \forall\ \kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$

Έχουμε $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ και από την πρόταση (3) $2^{\frac{1}{2^\nu}} \in A$.

Άρα και

$$\left(2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \cdot 2^{\frac{1}{2^\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow \left(2^{\frac{\kappa+1}{2^\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{\kappa+1}{2^{\nu+1}}} \in A$$

και η (4) αποδείχτηκε.

5) $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+\lambda}{2^{\nu+\lambda}}} \in A \quad \forall\ \kappa, \nu, \lambda \in \mathbb{N}^*$ (ή $\lambda = 0$).

Για $\lambda = 0$ ισχύει όπως και για $\lambda = 1$ (πρόταση (4)).

Έστω πως ισχύει για $\lambda = \mu \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή

$$2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+\mu}{2^{\nu+\mu}}} \in A.$$

Αν τώρα για κάποιους $\kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ θα δείξω ότι $2^{\frac{\kappa+\mu+1}{2^{\nu+\mu+1}}} \in A$.

Πράγματι αν $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ τότε σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής $2^{\frac{\kappa+\mu}{2^{\nu+\mu}}} \in A$, οπότε σύμφωνα με την (4) $2^{\frac{\kappa+\mu+1}{2^{\nu+\mu+1}}} \in A$ και η (5) αποδείχτηκε.

Θα δείξω τώρα ότι $2^{\frac{1821}{2^{1453}}} \in A$.

Σύμφωνα με την (3) ισχύει $2^{\frac{1}{2^{542}}} \in A$. Σύμφωνα με την (5) για $\lambda = 909$,

$$2^{\left(\frac{1+909}{2^{542+909}}\right)} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{910}{2^{1451}}} \in A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{2 \cdot 910}{2 \cdot 2^{1451}}} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{1820}{2^{1452}}} \in A$$

άρα σύμφωνα με την (4) $2^{\frac{1821}{2^{1453}}} \in A$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : R \to R$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$2f(x + y + xy) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) + f(xy),$$

$\forall x, y \in R$ όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha^2 - \alpha \neq \beta^2 - \beta$.

Λύση:

Στη συνθήκη $2f(x + y + xy) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) + f(xy)$,

$$\forall x, y \in P \qquad (1)$$

θέτω $x = y = 0$ και έχω

$$2f(0 + 0 + 0 \cdot 0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(0) + f(0 \cdot 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot (\alpha + \beta - 1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ ή } \alpha + \beta - 1 = 0$$

Αν όμως

$\alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$ ή $\alpha^2 - \alpha \neq \beta^2 - \beta$ (2)

γίνεται:

$$\alpha^2 - \alpha \neq \beta(\beta - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq (1 - \alpha) \cdot (1 - \alpha - 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq (1 - \alpha) \cdot (-\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq \alpha^2 - \alpha.$$

άτοπο. Συνεπώς $f(0) = 0$.

Έστω τώρα ότι υπάρχει $x_0 \in R$ με $f(x_0) \neq 0$.

Στην (1) θέτω $x = x_0$ και $y = 0$ και έχω:

$$2f(x_0 + 0 + 0) = \alpha \cdot f(x_0) + \beta \cdot f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) + 0 + 0 \qquad [f(0) = 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) \Rightarrow \alpha = 2 \qquad [f(x_0) \neq 0].$$

Θέτω πάλι στην (1) $x = 0$, $y = x_0$ και παίρνω

$$f(0) = 0$$

$$2f(0 + x_0 + 0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(x_0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \beta \cdot f(x_0) \Rightarrow \beta = 2.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί

$$\alpha = \beta = 2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \beta^2 - \beta.$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in R$ με $f(x_0) \neq 0$ και η μόνη συνάρτηση $f: R \to R$ που ικανοποιεί τις (1), (2) είναι η

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in R.$$

Γ. Ιβρισιμπζής **(3ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

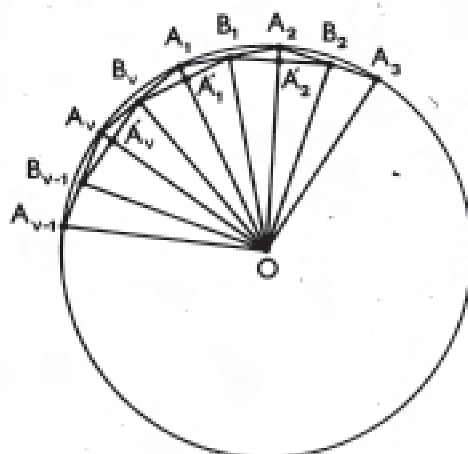
Θ2: Δίνεται κανονικό 1987-γωνο στο επίπεδο με κορυφές $A_1, A_2, \ldots, A_{1987}$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τέτοιων ώστε:

$$|\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}}| \leq 1987.$$

Λύση:

Για κανονικό ν-γωνο, γνωρίζω ότι:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{O}$$



Απόδειξη:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} = 2\vec{OB_1}$$
$$\vec{OA_2} + \vec{OA_3} = 2\vec{OB_2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\vec{OA_\nu} + \vec{OA_1} = 2\vec{OB_\nu}$$

$$2(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu}) = 2(\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu} \quad (1)$$

Και επίσης, κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu} = \vec{OA_1'} + \vec{OA_2'} + \ldots + \vec{OA_\nu'} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2)

$$\Rightarrow \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{OA_1'} + \vec{OA_2'} + \ldots + \vec{OA_\nu'} \quad (3)$$

Επειδή το $A_1A_2 \ldots A_\nu$ είναι κανονικό ν-γωνο και Ο το κέντρο του, το A_1' κείται πάνω στην A_1. Άρα

$$\vec{OA_1'} = \lambda\vec{OA_1} \quad \text{με} \quad \lambda < 1.$$

Άρα από (3) $\Rightarrow$

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \lambda\vec{OA_1} + \lambda\vec{OA_2} + \ldots + \lambda\vec{OA_\nu} \Rightarrow$$

$$(1 - \lambda)(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu}) = \vec{O}$$

Επειδή όμως $\lambda \neq 1$ είναι:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{O}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση του 1987-γώνου, αν Μ σημείο του γεωμετρικού τόπου, είναι:

$$\vec{MA_1} = \vec{MO} + \vec{OA_1}$$
$$\vec{MA_2} = \vec{MO} + \vec{OA_2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\vec{MA_{1987}} = \vec{MO} + \vec{OA_{1987}}$$

$$\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots \vec{MA_{1987}} = 1987 \cdot \vec{MO} + (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots \vec{OA_{1987}})$$

$$\Rightarrow \vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}} = 1987\vec{MO} + \vec{O} \Rightarrow$$

$$\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}} = 1987\vec{MO}$$

Για το σημείο Μ ισχύει

$$|\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}}| \leq 1987 \Leftrightarrow$$

$$|1987\vec{MO}| \leq 1987 \Leftrightarrow$$

$$1987|\vec{MO}| \leq 1987 \qquad |\vec{MO}| \leq 1$$

Επομένως το Μ ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Ο, το κέντρο του 1987-γωνου, και ακτίνα 1.

Λόγω ισοδυναμιών, κάθε σημείο του κυκλικού αυτού δίσκου ανήκει στον τόπο.

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου Ο και ακτίνας 1.

Ν. Παπασπύρου **(7ο Λύκειο Αθήνας)**

Θ3: Έστω Α είναι η×η πίνακας πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = A$, όπου I ο μοναδιαίος η×η πίνακας. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $A^{3\nu}$, όπου $\nu \in Z$ παίρνει μόνο δυο δυνατές τιμές και να βρεθούν οι τιμές αυτές.

Λύση:

Υπολογίζω τον πίνακα A^3

$$A^3 = A^2 \cdot A \Leftrightarrow \text{ και αφού } A^2 + I = A \Leftrightarrow A^2 = A - I$$

$$A^3 = (A - I) \cdot A \Leftrightarrow A^3 = A^2 - A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^3 = (A - I) - A \Leftrightarrow A^3 = A - I - A \Leftrightarrow A^3 = -I$$

$$\text{Επειδή } (-I)(-I) = -[I(-I)] = -(-I) = I$$

$$\text{συμπεραίνω ότι } (-I)^{-1} = -I$$

$$\text{Άρα } (A^3)^{-1} = A^{-3} = (-I)^{-1} = -I$$

Επομένως, αν $\nu \in Z$ με $\nu > 0$ τότε:

$$A^{3\nu} = (A^3)^\nu = (-I)^\nu = \begin{cases} I & \nu = 2\rho, \ \rho \in N \\ -I & \nu = 2\rho + 1, \ \rho \in N \end{cases}$$

Αν $\nu \in Z$ με $\nu < 0$ τότε $\mu = -\nu > 0$

και $A^{3\nu} = A^{-3\mu} = (A^3)^{-\mu} = (-I)^{-\mu} = [(-I)^{-1}]^\mu = (-I)^\mu =$

$$= \begin{cases} I & \mu = 2\rho, \ \rho \in N \Rightarrow -\nu = 2\rho \Rightarrow \nu = -2\rho \\ -I & \mu = 2\rho + 1, \ \rho \in N \Rightarrow -\nu = 2\rho + 1 \Rightarrow \nu = -2\rho - 1 \end{cases}$$

Αν $\nu = 0$ τότε εξ ορισμού $A^{3\nu} = A^0 = I$

Επομένως, συνοψίζοντας

$$\forall \nu \in Z \quad A^{3\nu} = \begin{cases} I & \nu = 2\rho, \ \rho \in Z \\ -I & \nu = 2\rho + 1, \ \rho \in Z \end{cases}$$

Δηλαδή, ο πίνακας $A^{3\nu}$ μπορεί να πάρει μόνο δυο τιμές, τις I και − I.

Ν. Παπασπύρου **(7ο Λύκειο Αθήνας)**

Θ4: Έστω $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 - 2$ για $\nu = 1, 2, \ldots$

α) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$

β) Να υπολογιστεί το

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right)$$

Λύση:

α) Είναι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu-2}^2 = \alpha_\nu^2(\alpha_{\nu-1}^2 - 2)^2 - 2 =$

$\alpha_{\nu-1}^4 - 4\alpha_{\nu-1}^2 + 2 = \alpha_{\nu-1}^2(\alpha_{\nu-1}^2 - 4) + 2.$

Αλλά

$$\alpha_\nu^2 - 4 = \alpha_{\nu-1}^2(\alpha_{\nu-1}^2 - 4) = \ldots = \alpha_{\nu-1}^2\alpha_{\nu-2}^2\ldots\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 4)$$

Άρα

$$\alpha_{\nu+1}^2 = 21\prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2 + 2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right)^2 = 21 + \frac{2}{(\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu)^2}$$

Τότε $\lim\left(\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right)^2 = 21 \Rightarrow \lim\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} = \sqrt{21}.$

β) Θέτουμε $\beta_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} = \dfrac{\alpha_\nu^2 - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} =$

$$= \frac{\alpha_\nu}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} = \beta_{\nu-1} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} =$$

$$= \frac{\alpha_{\nu+1}^2 - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} - \frac{\alpha_\nu - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} -$$

$$- \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu} =$$

$$= \ldots = \alpha_{1-2}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right) = \beta_\nu$$

Τότε $\lim\left(\alpha_1 - 2\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right)\right) = \sqrt{21}$

ή $\lim 2\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\right) = \dfrac{1}{2}(5 - \sqrt{21}).$

[redacted]

4ης Εθνικής Ολυμπιάδας 1988

Γ΄ Γυμνασίου

Πρώτο βραβείο

1) Αθηνά Μαρκοπούλου, 1ο Γυμνάσιο Μελισσίων, 2) Θωμάς Μαργαριτόπουλος, 4ο Γυμνάσιο Βεροίας

Δεύτερο βραβείο

1) Ανδρέας Γουλές, 2ο Γυμνάσιο Αθήνας 2) Ανδρέας Αργυρίου, 35ο Γυμνάσιο Αθήνας.

Τρίτο βραβείο

1) Κυριάκος Χουρδάκης, Αμερικάνικο Κολλέγιο Αθηνών, 2) Χρήστος Αδαμάρας, Κολλέγιο Ανατόλια, 3) Δημήτριος Δημόπουλος, 1ο Γυμνάσιο Λειβαδιάς, 4) Θεόδωρος Ευγενίου, Γυμνάσιο Ν. Μουδανιών, 5) Αικατερίνη Βάρσου, 2ο Γυμνάσιο Αθήνας, 6) Δημήτριος Μουρατίδης, 2ο Κάτω Τούμπα Θεσ/νίκης.

Έπαινοι

1) Γεώργιος Μάτσος, 4ο Γυμνάσιο Βέροιας, 2) Βασίλειος Αγγελόπουλος, 7ο Γυμνάσιο Πάτρας, 3) Αντώνιος Μπιλίρης, 2ο Γυμνάσιο Καλύμνου, 4) Μάρθα Σταθάκη, 2ο Γυμνάσιο Χανίων, 5) Αγγελίνα Κουρουμπαλή, Κολλέγιο Αθηνών, 6) Πασχάλης Αναστασόπουλος, 6ο Γυμν. Θεσ/νίκης, 7) Απόστολος Κακκάβας, Γυμνάσιο Ν. Πεντέλης, 8) Νικόλαος Μόσχος, Γυμνάσιο Ν. Χαλκηδόνας, 9) Λυδία Τσιούκα, Γυμνάσιο Σοφάδων Καρδίτσας, 10) Νικόλαος Αλεξόπουλος, 6ο Γυμνάσιο Λαμίας, 11) Ευαγγελία Καρδάτου, Γυμνάσιο Πολυχνίτου Λέσβου.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρώτο βραβείο

1) Αθηνά Ματέκοβιτς, 2ο Λύκειο Ζωγράφου, 2) Γεώργιος Μιχάϊ 5ο Λύκειο Αιγάλεω.

Δεύτερο βραβείο

1) Δημήτρης Σταθόπουλος, 1ο Λύκειο Σερρών.

Τρίτο βραβείο

1) Μιχαήλ Λουλάκης, 9ο Λύκειο Περιστερίου, 2) Μαρία Καραπατάκη, 2ο Λύκειο Χανίων, 3) Ανδρέας Σταλίδης, 1ο Λύκειο Καλαμαριάς Θεσ/νίκης, 4) Ελευθέριος Τιάκας, 1ο Λύκειο Άνω Τούμπας Θεσ/νίκης, 5) Κων/νος Λεριάδης, 2ο Λύκειο Ηλιούπολης, 6) Γεώργιος Καρακώστας 1ο Λύκειο Κορίνθου 7) Αργυρώ Χριστοφοράκη Εν. Πολυκ. Λύκειο Αιγάλεω.

Έπαινος

1) Σταμάτιος Κούρτης, 13ο Λύκειο Αθήνας, 2) Φοίβος Ζούκης, Σχολή Μωραΐτη.

Β΄ Λυκείου

Πρώτο Βραβείο

1) Χρήστος Αθανασιάδης, 1ο Λύκειο Κάτω Τούμπα Θεσ/νίκης, Ειδικό Βραβείο Γεωμετρίας.

Δεύτερο βραβείο

1) Ευάγγελος Μουρούκος, Λύκειο Κοντοπεύκου Αττικής.

Τρίτο βραβείο

1) Αντώνιος Οικονόμου, 35ο Λύκειο Αθηνών και Ειδικό Βραβείο Γεωμετρίας.

Έπαινος

1) Δημήτρης Μαυροειδής, 5ο Λύκειο Χανίων, 2) Γεώργιος Παπουτσής, Γερμανική Σχολή Θεσ/νίκης, 3) Αλέξαν-

δρος Λαμπρινίδης, 2ο Λ. Κομοτινής.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρώτο βραβείο

1) Ιωάννης Ιβρισιμτζής, 3ο Λ. Χαριλάου Θεσ/νίκης, 2) Δημήτριος Κοντοκώστας, 1ο Λ. Τρικάλων.

Δεύτερο βραβείο

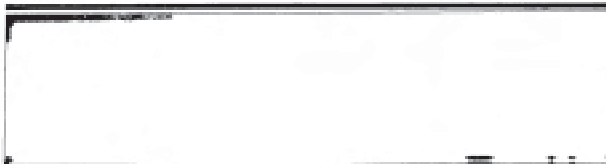
1) Νικόλαος Παπασπύρου, 7ο Λ. Αθηνών, 2) Σωκράτης Βαμβάκος, Γερμ. Σχολή Αθηνών, 3) Στέφανος Παντέλης, 1ο Λ. Σερρών, 4) Νικόλαος Διαμάντης, Πειρ. Λ. Παν/μίου Πατρών.

Τρίτο βραβείο

1) Ηλίας Κακιόπουλος, 2ο Λ. Καρδίτσας.

Έπαινος

1) Αντώνιος Παπαντωνάκης, 2ο Λ. Χανίων, 2) Δημήτριος Τραπέρας, 4ο Λ. Ιωαννίνων, 3) Παναγιώτης Μπαζιώτας, 2ο Λ. Γρεβενών.



Εγκαινιάζουμε μια νέα στήλη σε θέματα Ολυμπιάδων από τους μαθητές της Ελληνικής ομάδας και περιμένουμε λύσεις για δημοσίευση. Σ' αυτό το τεύχος προτείνει ο Χ. Ταμβάκης*

1) Ένα τετράπλευρο έχει την ιδιότητα: το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου στο εσωτερικό του από τις πλευρές του είναι σταθερό. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

2) Αν $(x_1 + x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 \dots + (x_n + x_1)^2 = 4$

να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$$

3) Να βρείτε το

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)$$

4) Να λύσετε τη Διοφαντική εξίσωση: $\alpha\beta = \alpha^\nu + \beta$, όπου ν ορισμένος θετικός ακέραιος.

5) Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α,Β εκτός αυτής και προς το ίδιο μέρος της. Να βρείτε σημείο Ρ της (ε) με την ιδιότητα

α) το άθροισμα $PA^2 + PB^2$ είναι ελάχιστο

β) η (ε) αποκόβει από τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΡ χορδή μήκους ΑΒ.

γ) ο λόγος $\frac{PA}{PB}$ είναι ελάχιστος.

6) Έστω κ περιττός ακέραιος. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι σύνθετοι της μορφής $\nu^2 + \kappa\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

7) Ορίζουμε $\{x\} = x - [x]$. Να βρείτε το $\left\{\frac{1985!}{1987}\right\}$

Μπορείτε να κάνετε γενίκευση;

8) Θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ ($\nu \geq 7$) που είναι αύξουσα αριθμητική πρόοδος. Ορίζουμε την εξής πράξη: η ακολουθία των ν αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ αντικαθιστάται από την ακολουθία ν-1 αριθμών $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$.
Εν εφαρμόσουμε αυτή τη πράξη ν-1 φορές αρχίζοντας με την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ καταλήγουμε σε έναν αριθμό. Αν ο αριθμός αυτός είναι ο 1984, να προσδιορίσετε πλήρως την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$.

9) Να αποδείξετε ότι αν $x, y, z, t \in \mathbb{R}+$ και

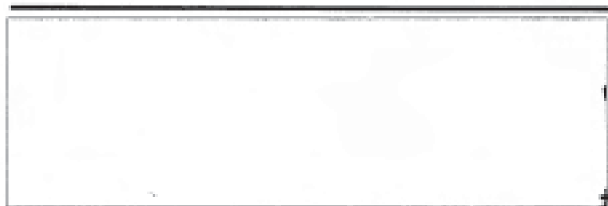
$$xyz + xzt + xyt + yzt \leq 4,$$

τότε

$$x + y + z + t \geq 4\,xyzt.$$

10) Το περίκεντρο Ο ενός τετραέδρου ΑΒΓΔ βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓΔ. Οι ευθείες ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις έδρες ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Αν $\frac{AO}{AA_1} = \frac{BO}{BB_1} = \frac{\Gamma O}{\Gamma\Gamma_1} = \frac{3}{4}$, να δείξετε ότι το τετράεδρο είναι ισοεδρικό.

11) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, *ενώ* η ακολουθία $(\eta\mu\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
Να δείξετε ότι $\omega = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Στην 28η Δ.Μ.Ο. πήραν μέρος 42 χώρες και κάθε μια από αυτές πρότεινε διάφορα προβλήματα. Η χώρα μας πρότεινε 4.

Μετά το τέλος της Ολυμπιάδας οι διοργανωτές, δεν έδωσαν στις αποστολές τα προταθέντα θέματα.

Γνωστό μαθηματικό περιοδικό του Καναδά δημοσίευσε μια επιλογή από 53 θέματα, ανάμεσα στα οποία και τα 4 ελληνικά.

Αυτή την επιλογή παρουσιάζουμε εδώ, με την ίδια σειρά.

* Φοιτητής στο Α΄ έτος του Πανεπιστημίου Αθήνας Βαλκανιονίκης (Αθήνα) και Ολυμπιονίκης του 1987 (Κούβα).

ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ

1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ακέραιοι και ρ θετικός ακέραιος μικρότερος του ν. Θέτουμε:

$S_1 = x_1 + x_1 + ... + x_\rho$, $T_1 = x_{\rho+1} + x_{\rho+2} + ... + x_\nu$,

$S_2 = x_2 + x_3 + ... + x_{\rho+1}$, $T_2 = x_{\rho+2} + x_{\rho+3} + ... + x_1$,

.

.

.

$S_\nu = x_\nu + x_1 + ... + x_{\rho-1}$, $T_\nu = x_\rho + x_{\rho+1} + ... + x_{\nu-1}$

(όπου μετά τον x_ν βρίσκεται ο x_1).

Έστω τώρα m(α, β) το πλήθος των αριθμών i για τους οποίους ο S_i δίνει υπόλοιπο α και ο T_i δίνει υπόλοιπο β, αν διαιρεθούν με το 3, όπου $0 \leqslant \alpha, \beta < 3$.

Να δείξετε ότι οι αριθμοί m(1, 2) και m(2, 1) είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 3.

2. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ είναι θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4\,(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)\,(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1)$$

και ότι το ίσον ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

3. Ένα τέλειο ανακάτεμα μιας δεσμίδας χαρτιών που έχουν διάταξη 1, 2, 3, ..., 2ν την κάνει ν + 1, 1, ν + 2, 2, ..., ν − 1, 2ν δηλαδή τα χαρτιά που αρχικά είχαν τις ν πρώτες θέσεις, μετακινούνται στις θέσεις 2, 4, 6, ..., 2ν ενώ τα υπόλοιπα ν χαρτιά στην αρχική διάταξη, παίρνουν τις θέσεις 1, 3, 5, ..., 2ν − 1.

Να ορίσετε τον αριθμό ν, ώστε μετά από ν τέλεια ανακατέματα, αρχίζοντας από τη διάταξη 1, 2, ..., 2ν να ξαναγυρίσουμε σ' αυτήν.

4. Έστω K_1, K_2, K_3 τρεις κύκλοι με κέντρα O_1, O_2, O_3 αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο P. Έστω ότι οι κύκλοι K_1, K_2 τέμνονται στο σημείο A, οι K_2, K_3 τέμνονται στο σημείο B και οι K_3, K_1 στο σημείο C. Έστω X σημείο του K_1. Συνδέουμε το X με το A και η XA τέμνει τον K_2 στο Ψ, ενώ η XC τέμνει τον K_3 στο Z.

i) Να δείξετε ότι τα Z, B, Ψ είναι συνευθειακά.

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου XCZ είναι μικρότερο ή ίσο από το τετραπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $O_1O_2O_3$.

ΒΕΛΓΙΟ

1. Αν f: (0, ∞) → ℝ είναι μια συνάρτηση με την ιδιότητα

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

να δείξετε ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$u: [1, \infty) \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$u\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right) = f(x), \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

2. Να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε ο αριθμός ν! να λήγει σε 1987 μηδενικά.

ΓΑΛΛΙΑ

1. Έστω $r_1, r_2, ..., r_\nu$ πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε:

$$0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_\nu < 1.$$

Να δείξετε ότι:

$$(1 - r_\nu)^2 \left[\frac{r_1}{(1 - r_1^2)^2} + \left[\frac{r_2^2}{(1 - r_2^3)^2} + ... + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{r_\nu^\nu}{(1 - r_\nu^{\nu+1})^2}\right] < 1.$$

2. Έστω τριγ. ΑΒΓ. Για κάθε σημείο Μ του τμήματος ΒΓ ορίζουμε Β', Γ' τις ορθές προβολές του Μ στις ευθείες ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να βρεθούν τα σημεία Μ, για τα οποία το μήκος του Β'Γ' γίνεται ελάχιστο.

3. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 9 θετικοί αριθμοί. Έστω:

$S_1 = \alpha_1\beta_2\gamma_3$, $S_2 = \alpha_2\beta_3\gamma_1$, $S_3 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$

$T_1 = \alpha_1\beta_3\gamma_2$, $T_2 = \alpha_2\beta_1\gamma_3$, $T_3 = \alpha_3\beta_2\gamma_1$

Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$\{S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3\}$$

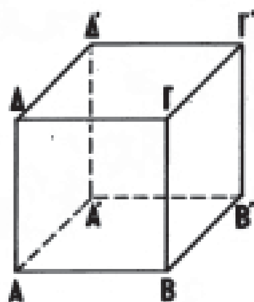
έχει το πολύ δυο στοιχεία.

Να δείξετε ότι $S_1 + S_2 + S_3 = T_1 + T_2 + T_3$.

4. Έστω ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ένα παραλληλεπίπεδο (Σχ. 1). Να δείξετε ότι:

ΑΒ' + ΑΔ' + ΑΓ ⩽ ΑΒ + ΑΔ + ΑΑ' + ΑΓ'.

Πότε ισχύει το ίσον;



ΜΕΓΑΛΗ ΒΡΕΤΑΝΙΑ

1. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει όλες τις ρίζες πραγματικές, τότε $\alpha\beta < 0$.

2. Οι αριθμοί $d(\nu, m)$ όπου ν, m ακέραιοι και $0 \leqslant m \leqslant \nu$, ορίζονται από τις σχέσεις:

$$d(\nu, 0) = d(\nu, \nu) = 1 \quad \text{για κάθε } \nu \geqslant 0 \text{ και}$$

$$m \cdot d(\nu, m) = m \cdot d(\nu - 1, m) + (2\nu - m) \cdot d(\nu - 1, m - 1) \quad \text{για } 0 < m < \nu.$$

Να δείξετε ότι οι αριθμοί $d(\nu, m)$ είναι ακέραιοι.

3. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο πραγματικό αριθμό c που έχει την ιδιότητα: Για κάθε ακολουθία $\{X_i\}$ θετικών αριθμών, τέτοιων ώστε:
$X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu \leqslant X_{\nu+1}$, για $\nu = 1, 2, 3, \ldots$
είναι

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \ldots + \sqrt{X_\nu} \leqslant c\sqrt{X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu}$$

για $\nu = 1, 2, 3, \ldots$
[Ο c είναι ανεξάρτητος από τους X_i και τον ν].

4. Να προσδιοριστεί, με απόδειξη, σημείο P στο εσωτερικό οξυγωνίου τριγώνου ABC, για το οποίο το άθροισμα $(BL)^2 + (CM)^2 + (AN)^2$ γίνεται ελάχιστο, όπου L, M, N τα ίχνη των καθέτων από το P στις BC, CA, AB αντίστοιχα.

5. Να δείξετε ότι αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει:
$x^2 + y^2 + z^2 = 2$, τότε $x + y + z \leqslant xyz + 2$.

ΕΛΛΑΔΑ

1. Θεωρούμε το κανονικό 1987-γωνο $A_1A_2\ldots A_{1987}$ με κέντρο O. Να δείξετε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων που ανήκουν σε κάθε κατάλληλο υποσύνολο του

$$M = \{OA_j : j = 1, 2, \ldots, 1987\}$$

είναι μη μηδενικό.

Δ. Κοντογιάννης

2. Να λυθεί η εξίσωση $28^x = 19^y + 87^z$, όπου $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Θ. Μπόλης

3. Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABC αν δίνονται η πλευρά του $\alpha = BC$, η ακτίνα R του περιγεγραμμένου του κύκλου ($2R \geqslant \alpha$) και η διαφορά $c^{-1} - b^{-1}$, όπου $c = AB$ και $b = AC$.

Δ. Κοντογιάννης

4. Να δείξετε ότι αν α, b, c είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου και αν $2r = \alpha + b + c$, τότε

$$\frac{\alpha^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+\alpha} + \frac{c^n}{\alpha+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot r^{n-1},$$

$n \geqslant 1$.

Γ. Τζίντζιφας

ΟΛΛΑΝΔΙΑ

1. Αν δίνονται 5 πραγματικοί αριθμοί u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, να δείξετε ότι μπορούμε πάντοτε να βρούμε 5 πραγματικούς αριθμούς v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 που να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(i) $u_i - v_i$ είναι ακέραιος για κάθε i.

(ii) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 4} (v_i - v_j)^2 < 4.$

2. Έστω P σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου ABC. Φέρουμε από το P ευθείες l, m και n κάθετες στις AP, BP και CP αντίστοιχα. Να δείξετε ότι αν η l τέμνει την ευθεία BC στο Q, η m τέμνει την ευθεία AC στο R, και η n τέμνει την ευθεία AB στο S, τότε τα σημεία Q, R και S είναι συνευθειακά.

ΟΥΓΓΑΡΙΑ

1. Υπάρχει σύνολο $\mathbb{M}$ στο συνήθη Ευκλείδειο χώρο, τέτοιο ώστε για κάθε επίπεδο σ, η τομή

$$\mathbb{M} \cap \sigma$$

να είναι σύνολο πεπερασμένο και μη κενό;

2. (i) Ας υποθέσουμε ότι Μ.Κ.Δ. $(m, k) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k$ τέτοιοι ώστε κάθε γινόμενο $\alpha_i b_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, k$) να δίνει διαφορετικό υπόλοιπο, διαιρούμενο με mk.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι Μ.Κ.Δ. $(m, k) < 1$. Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k$ πρέπει να υπάρχουν δυο

γινόμενα $a_i b_j$ και $a_s b_t$ $((i, j) \neq (s, t))$ που να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με mk.

ΙΣΛΑΝΔΙΑ

1. Έστω S_1 και S_2 δυο σφαίρες με διαφορετικές ακτίνες, που εφάπτονται εξωτερικά. Οι σφαίρες βρίσκονται στο εσωτερικό κώνου C, και κάθε σφαίρα εφάπτεται του κώνου κατά έναν πλήρη κύκλο. Στο εσωτερικό του κώνουν υπάρχουν n στερεές σφαίρες τοποθετημένες σ' ένα δακτύλιο με τέτοιο τρόποο ώστε κάθε στερεά σφαίρα εφάπτεται του κώνου C, και στις σφαίρες S_1 και S_2 εξωτερικά, όπως και στις δυο γειτονικές στερεές σφαίρες. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του n;

2. Πέντε διαφορετικοί αριθμοί επιλέγονται διαδοχικά και κατά τυχαίο τρόπο από το σύνολο

$$\{1, 2, ..., n\}.$$

Δείξτε ότι τόσο η πιθανότητα να σχηματίζουν οι τρεις πρώτοι αριθμοί αριθμητική πρόοδο, όσο και η πιθανότητα να σχηματίζουν και οι πέντε αριθμοί αριθμητική πρόοδο (και στις δυο περιπτώσεις με κατάλληλη διάταξη των αριθμών), είναι μεγαλύτερη από $\dfrac{6}{(n-2)^3}$.

ΜΑΡΟΚΟ

1. Έστω $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε: $\eta\mu\theta_1 + \eta\mu\theta_2 + ... + \eta\mu\theta_n = 0$.

Δείξτε ότι:

$$|\eta\mu\theta_1 + 2\eta\mu\theta_2 + ... + n \cdot \eta\mu\theta_n| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right],$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος του x.

2. Έστω C σταθερός κύκλος στο επίπεδο και l σταθερή ευθεία που τέμνει τον C. Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ είναι καθορισμένα σημεία της l τέτοια ώστε να υπάρχει κάποιο πολύγωνο $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ εγγεγραμμένο στον C για το οποίο το P_i θα ανήκει στο τμήμα A_iA_{i+1} για $i < 2n$ και το P_{2n} θα ανήκει στο $A_{2n}A_1$. Να δείξετε ότι αν $V_1, V_2, ..., V_{2n}$ είναι εγγεγραμμένο στον C πολύγωνο, για το οποίο το P_i ανήκει στο τμήμα V_iV_{i+1} για $i < 2n$, τότε το P_{2n} θα ανήκει στο τμήμα $V_{2n}V_1$.

ΠΟΛΩΝΙΑ

1. Να βρεθεί ο αριθμός των διαμερισμών του συνόλου $\{1, 2, ..., n\}$ σε τρία υποσύνολα A_1, A_2, A_3, μερικά απ' τα οποία μπορεί να είναι κενά, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(i) αφού τα στοιχεία καθενός υποσυνόλου διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη, κάθε δυο διαδοχικά στοιχεία καθενός υποσυνόλου να μην είναι ισοϋπόλοιπα mod2.

(ii) αν τα A_1, A_2, A_3 είναι μη κενά, τότε σε ακριβώς ένα απ' αυτά ο ελάχιστος αριθμός είναι άρτιος.

Σημείωση: Ένας **διαμερισμός** καθορίζεται από μια οικογένεια συνόλων A_1, A_2, A_3 τέτοιων ώστε:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, ..., n\} \quad \text{και}$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \varnothing$$

άλλη διάταξη των συνόλων, π.χ. A_2, A_3, A_1 δίνει τον **ίδιο** διαμερισμό με την A_1, A_2, A_3.

2. Έστω P, Q, R πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, τέτοια ώστε $P^4 + Q^4 = R^2$. Να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί p, q, r και πολυώνυμο S, ώστε να είναι

$$P = p \cdot S, \quad Q = q \cdot S \quad \text{και} \quad R = r \cdot S^2.$$

3. Έστω F μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του, που απεικονίζει κλειστά ορθογώνια σε κλειστά ορθογώνια. Δείξτε ότι η F απεικονίζει τετράγωνα σε τετράγωνα. Η συνέχεια της f δεν προϋποτίθεται.

ΡΟΥΜΑΝΙΑ

1. Δείξτε ότι οι αριθμοί 1, 2, ..., 1987 μπορούν να χρωματιστούν με 4 χρώματα, έτσι ώστε όλοι οι όροι κάθε αριθμητικής προόδου με 10 όρους να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

2. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και C ενός τριγώνου ABC τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα B′ και C′ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η ευθεία B′C′ τέμνει τον εγγεγραμμένο στο ABC κύκλο.

3. Για κάθε ακέραιο $r \geqslant 1$, να προσδιοριστεί ο ελάχιστος ακέραιος $h(r) \geqslant 1$, τέτοιος ώστε για κάθε διαμερισμό του συνόλου $\{1, 2, ..., h(r)\}$ σε r τάξεις να υπάρχουν ακέραιοι

$$a \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant y \leqslant h(r)$$

ώστε οι αριθμοί $a + x$, $a + y$ και $a + x + y$ να ανήκουν στην ίδια τάξη.

ΙΣΠΑΝΙΑ

1. Να προσδιορίσετε, με απόδειξη, τις ακέραιες

λύσεις της εξίσωσης:

$$3z^2 = 2x^3 + 385x^2 + 256x - 58195.$$

2. Γνωρίζοντας ότι α_{11}, α_{22} είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι οι x_1, x_2, α_{12}, b_1, b_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}\overline{\alpha_{12}}$$

(όπου $\overline{z}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του z), θεωρήστε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\overline{x_1}\ (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) = b_1$$
$$\overline{x_2}\ (\overline{\alpha_{12}}\,x_1 + \alpha_{22}x_2) = b_2$$

(i) Να βρείτε συνθήκη (-ες), ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

(ii) Να βρείτε συνθήκη (-ες), ώστε το πρωτεύον όρισμα του x_1 να υπερβαίνει το πρωτεύον όρισμα του χ_2 κατά 90°.

Η.Π.Α.

1. Έστω $r > 1$ πραγματικός αριθμός και n ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος του r. Θεωρούμε τυχαίο πραγματικό αριθμό x με

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{n}{r-1}.$$

Θα καλούμε ανάπτυγμα του x με βάση r, κάθε παράσταση του x που έχει τη μορφή:

$$x = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^3} + \dots,$$

όπου οι α_i είναι ακέραιοι με $0 \leqslant \alpha_i < r$. Υποθέτουμε ότι κάθε αριθμός a του διαστήματος

$$\left[0, \frac{n}{r-1}\right]$$

έχει τουλάχιστον ένα ανάπτυγμα με βάση r. Δείξτε ότι, αν ο r δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει αριθμός p του διαστήματος $\left[0, \frac{n}{r-1}\right]$, ο οποίος έχει άπειρα το πλήθος διαφορετικά αναπτύγματα με βάση r.

2. Οι κλίμακες ενός δεκαδικού αριθμού $d_1 d_2 \dots d_n$ είναι οι ομάδες των ψηφίων του με το μέγιστο αριθμό ψηφίων, κατά αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη (εδώ κάθε d_i είναι ένα ψηφίο και επιτρέπεται να είναι $d_1 = 0$). Έτσι ο αριθμός 024379 έχει τρεις κλίμακες: 024, 43 και 379. Να προσδιοριστεί ο μέσος αριθμός κλιμάκων για ένα δεκαδικό αριθμό στο σύνολο

$$\{d_1 d_2 \dots d_n \mid d_k \neq d_{k+1},\ k = 1, 2, \dots, n-1\}$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

3. Σ' ένα πάρτυ στο οποίο παρευρίσκονται n ζευγάρια, κάθε άτομο παίρνει ανά πάσα στιγμή μέρος σε κάποια ομάδα που συζητά (από δω και στο εξής θα τη λέμε «παρέα»). Ένα άτομο και ο (η) σύζυγός του δεν είναι ποτέ στην ίδια «παρέα» αλλά κάθε άλλο ζευγάρι ατόμων παίρνει μέρος στην ίδια παρέα ακριβώς μια φορά. Να δείξετε ότι: Αν ο ολικός αριθμός των «παρέων» που σχηματίστηκαν κατά τη διάρκεια του πάρτυ είναι k και αν $n \geqslant 4$, τότε $k \geqslant 2n$.

ΒΙΕΤΝΑΜ

1. Μπορεί μια αυλή σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $m \times n$ να καλυφθεί με πλακάκια αποτελούμενα από τετράγωνα 1×1 σχήματος L αν

(a) $m \times n = 1985 \times 1987$

(b) $m \times n = 1987 \times 1989$.

2. Έστω $\{\alpha_k\}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοιων ώστε

$$\alpha_1 \geqslant 1 \text{ και } \alpha_{k+1} - \alpha_k \geqslant 1 \ (k = 1, 2, \dots).$$

Δείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k+1} \cdot \sqrt[1987]{\alpha_k}} < 1987, \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1.$$

3. Υποθέτουμε ότι οι $\{\alpha_k\}$ και $\{b_k\}$ είναι δυο ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε:

(i) $\alpha_k < b_k$ και

(ii) $\text{συν}\alpha_k x + \text{συν}b_k x \geqslant -\frac{1}{k}$,

για όλους τους πραγματικούς x και για κάθε $k = 1, 2, \dots$

Δείξτε ότι το $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{b_k}$ υπάρχει και βρείτε το.

ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑΚΗ ΔΗΜΟΚΡ. ΓΕΡΜΑΝΙΑΣ

1. Πόσες «λέξεις» με n ψηφία μπορούν να σχηματιστούν από το «αλφάβητο» {0, 1, 2, 3, 4}, αν τα γειτονικά ψηφία πρέπει να διαφέρουν ακριβώς κατά ένα (1);

2. Έστω S ένα σύνολο με n στοιχεία. Συμβολίζουμε με $P_n(k)$ τον αριθμό όλων των μεταθέσεων του S που έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 \cdot P_n(k) = n!$$

ΓΙΟΥΓΚΟΣΛΑΒΙΑ

2. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός k ώστε για κά-

θε $a \in [0, 1]$ και για κάθε φυσικό n, η ανισότητα

$$a^k (1-a)^n < \frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{είναι έγκυρη.}$$

2. Να δείξετε ότι για κάθε $k = 2, 3, 4, \ldots$ υπάρχει ένας άρρητος αριθμός r τέτοιος ώστε

$$[r^m] \equiv -1 \pmod{k},$$

για κάθε φυσικό m, όπου με [x] συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x.

ΑΝ. ΓΕΡΜΑΝΙΑ

1. Σε ένα τουρνουά σκακιού με $\nu \geqslant 5$ παίκτες ήδη έχουν παιχθεί $\left[\frac{\nu^2}{4}\right] + 2$ αγώνες. ([x] το ακέραιο μέρος του x).

(α) Να δείξετε ότι υπάρχουν 5 παίκτες α, β, c, d, e, που έχουν παίξει τα παρακάτω παιχνίδια:

$$\alpha\beta,\ \alpha c,\ \beta c,\ \alpha d,\ \alpha e,\ de.$$

(β) Ισχύει αυτό αν έχουν παιχθεί μόνο $\left[\frac{\nu^2}{4}\right] + 1$ αγώνες;

ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ

1. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy θεωρούμε σημείο A(1, 0) και τον κύκλο C_1 με κέντρο $O_1(-2, 0)$ και ακτίνα 3.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός c, ώστε για κάθε σημείο X εξωτερικό του C_1, να ισχύει

$$\overline{OX} - 1 \geqslant c \min\left\{\overline{AX}, \overline{AX}^2\right\}.$$

Να υπολογίσετε τον ελάχιστο c.

2. Έστω $S \subset [0, 1]$ ένα σύνολο με 5 σημεία, με $\{0, 1\} \subset S$. Έστω $f: [0, 1] \to [0, 1]$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση που είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $I \subset [0, 1]$ με άκρα (αλλά όχι εσωτερικά σημεία) στο S. Θέλουμε να υπολογίσουμε, χωρίς τη βοήθεια Η/Υ, τα ακρότατα της συνάρτησης

$$g(x, t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)}$$

για $[x - t, x + t] \subset [0, 1]$

Ποιος είναι ο αριθμός των ζευγών (x, t) για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την g(x, t);

3. Υπάρχει δευτεροβάθμιο πολυώνυμο P(x, y) έτσι ώστε κάθε μη αρνητικός ακέραιος ν να είναι ίσος με P(k, m) για ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (k, m) μη αρνητικών ακεραίων;

Για τα παρακάτω θέματα, η χώρα που τα πρότεινε δεν είναι γνωστή.

1. Δίνεται ότι

$$x = -2272,\ y = 10^3 + 10^2 c + 10b + a$$

και $z = 1$ και ότι οι x, y z ικανοποιούν την εξίσωση $ax + by + cx = 1$, όπου οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι με $a < b < c$. Να βρεθεί ο y.

2. Έστω PQ ένα ευθύγραμμο τμήμα με σταθερό μήκος αλλά μεταβλητή θέση στην πλευρά BC ενός τριγώνου ABC, με τη σειρά BPQC, και έστω ότι οι παράλληλες από τα P, Q στις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις AC, AB στα P_1, Q_1 και P_2, Q_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων PQQ_1P_1 και PQQ_2P_2 είναι ανεξάρτητο από τη θέση του PQ στη BC.

3. Έστω l και l΄ δυο ευθείες στον 3-διάστατο χώρο και έστω A, B, C τρία σημεία της l, τέτοια ώστε το B να είναι μέσο του AC. Αν a, b, c είναι οι αποστάσεις των A, B, C από την l΄ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$b \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}},$$

με την ισότητα να ισχύει αν οι l και l΄ είναι παράλληλες.

4. Να υπολογιστεί το $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$

όπου οι a_k είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος

$$(1 - \sqrt{2}\,x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k.$$

Τις ασκήσεις μετέφρασαν, ο συνάδελφος Δ. Κοντογιάννης και ο βραβευμένος μαθητής απ' την Εθνική Ολυμπιάδα '88 Β. Μαυρούκος.

ΘΕΜΑΤΑ 29ης Ι.Μ.Ο. (ΙΟΥΛΙΟΣ 1988)

* 1 (Βουλγαρία 1). Μια ακολουθία ακεραίων, ορίζεται από τη σχέση

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}\ (n > 1) = \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1.$$

Να δείξετε ότι $2^K/\alpha_n$, τότε και μόνο τότε όταν $2^K/n$.

2 (Βουλγαρία 2). Έστω

$$\alpha_n = [\sqrt{(n+1)^2 + n^2}],\ n = 1, 2, \ldots$$

όπου [x] είναι το ακέραιο μέρος του x. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι m, ώστε

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m > 1$$

ii) Υπάρχουν άπειροι θετικοί αριθμοί m, ώστε

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = 1$$

* 3 (Βουλγαρία 3). Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρείτε τον αριθμό των περιττών συντελεστών του πολυωνύμου $u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$.

* 4 (Καναδάς 1). Το τριγ. ABC είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών A, B, C επανατέμνουν τον κύκλο στα σημεία A΄, B΄, C΄ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγ. A΄B΄Γ΄ ≥ του εμβαδού του ABC.

5 (Κούβα 1). Έστω κ θετικός και M_κ το σύνολο όλων των ακεραίων μεταξύ του $2\kappa^2 + \kappa$ και $2\kappa^2 + 3\kappa$. Είναι δυνατό να διαμερισθεί το σύνολο M_κ σε δύο υποσύνολα A, B τέτοια ώστε $\sum_{x\in A} x^2 = \sum_{x\in B} x^2$;

* 6 (Τσεχοσλοβακία 1). Τα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας ($n \geq 2$) αριθμούνται με τους αριθμούς 1, 2, ..., n^2 ώστε κάθε αριθμούς από αυτούς να εμφανίζεται. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο γειτονικά τετράγωνα (με κοινή πλευρά) τέτοια ώστε οι αριθμοί τους να διαφέρουν κατά n τουλάχιστον.

** 7 (Τσεχοσλοβακία 2). Έστω n ένας άρτιος, θετικός ακέραιος και έστω $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ σύνολα με n στοιχεία το καθένα και τέτοια ώστε κάθε δύο από αυτά έχουν ακριβώς ένα κοινό στοιχείο και κάθε στοιχείο της ένωσης του ανήκει, σε δύο τουλάχιστον από αυτά τα σύνολα. Για ποια n μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχεία της ένωσης τους, έναν από τους αριθμούς 0, 1 με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένα από τα σύνολα να έχει ακριβώς $\frac{n}{2}$ στοιχεία που αντιστοιχούν στο 0.

* 8 (Τσεχοσλοβακία 3). Έστω ABCD ένα τετράεδρο και K, L τα μέσα των ακμών AB, CD αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι κάθε επίπεδο που περιέχει την ευθεία KL διαιρεί το τετράεδρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

9 (Γαλλία 1). Αν α_0 θετικός πραγματικός αριθμός, θεωρούμε την ακολουθία $\{\alpha_n\}$ με

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - 1}{n + 1} \quad \text{για } n \geq 0$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός α, τέτοιος ώστε

i) Για κάθε πραγματικό $\alpha_0 \geq \alpha$, η ακολουθία $\{\alpha_n\} \to +\infty$

ii) Για κάθε πραγματικό $\alpha_0 < \alpha$, η ακολουθία $\{\alpha_n\} \to 0$.

* 10 (Γαλλία 2). Έστω α η μεγαλύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Να αποδειχθεί ότι ο 17 διαιρεί τους $[\alpha^{1788}]$, $[\alpha^{1988}]$ ([x] το ακέραιο μέρος του x).

* 11 (Γαλλία 3). Έστω $u_1, u_2, \ldots u_m$ επίπεδα διανύσματα με άθροισμα το μηδενικό διάνυσμα, που καθένα έχει μήκος ≤ 1. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να διατάξουμε τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots u_m$ σε καινούργια ακολουθία $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m$ έτσι ώστε κάθε μερικό άθροισμα

$$\upsilon_1,\ \upsilon_1 + \upsilon_2,\ \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3,\ \ldots,\ \upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_m$$

να έχει μήκος μικρότερο ή ίσο από το $\sqrt{5}$.

12 (Γαλλία 4). Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν περισσότερες από 27 ημιευθείες που ξεκινούν από το ίδιο σημείο του 3 — διαστάτου χώρου, έτσι ώστε η γωνία μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους από αυτές να είναι $\leq \frac{\pi}{4}$.

13 (Γαλλία 5). Έστω T τρίγωνο με εγγεγραμμένο κύκλο C. Ένα τετράγωνο πλευράς α είναι περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο C. Να αποδειχθεί ότι το ολικό μήκος των μερών των πλευρών του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου T, είναι τουλάχιστον 2α.

** 14 (Δ. Γερμανία 1). Έστω α, b θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $ab + 1 / \alpha^2 + b^2$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{ab + 1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

15 (Δ. Γερμανία 2). Έστω $1 \leq \kappa \leq n$. Θεωρούμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες θετικών ακεραίων με άθροισμα 1. Να υπολογισθεί ο ολικός αριθμός T(n, κ) των όρων όλων των ακολουθιών που είναι ίσοι με το κ.

16 (Δ. Γερμανία 3). Αν το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, τότε η τιμή του

$$f(n) = \left[n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2} \right]$$

διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, εκτός από τους αριθμούς της μορφής $3n^2 - 2n$.

17 (Δ. Γερμανία 4). Αν το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, τότε η τιμή του

$$f(n) = \left[n + \sqrt{3n} + \frac{1}{2} \right]$$

διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, εκτός από τους αριθμούς της μορφής $\left[\frac{n^2 + 2n}{3} \right]$

* 18 (Α. Γερμανία 1) ΄Εστω $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geqslant 2$. Μια συλλογή $F = \{A_1, A_2, ..., A_t\}$ υποσυνόλων $A_i \subseteq N$, $i = 1, 2, ..., t$ λέγεται διαχωρίζουσα, αν για κάθε ζεύγος $\{x, y\} \subseteq N$, υπάρχει ένα σύνολο $A_i \in F$ τέτοιο ώστε $A_i \cap \{x, y\}$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο. Η F λέγεται καλύπτουσα αν κάθε στοιχείο του N περιέχεται σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα της F. Ποια είναι η μικρότερη τιμή f(n) του t, ώστε να υπάρχει μια συλλογή $F = \{A_1, ... A_t\}$ που να είναι ταυτόχρονα διαχωρίζουσα και καλύπτουσα;

19 (Αν. Γερμανία 2). ΄Εστω $Z_{m,n}$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (i, j) με $i \in \{1, 2, ..., m\}$ και $j \in \{1, 2, ..., n\}$. ΄Εστω ακόμα $a_{m,n}$ ο αριθμός των υποσυνόλων του $Z_{m,n}$ που δεν περιέχουν διατεταγμένα ζεύγη της μορφής

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2) \text{ με } |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους m, κ ισχύει $a^2_{m,2k} \leqslant a_{m,2k-1}a_{m,2k+1}$.

* 20 (Αν. Γερμανίας 3). Ο μηχανισμός ενός θησαυροφυλακίου αποτελείται από 3 τροχούς, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να βρίσκεται σε 8 διαφορετικές θέσεις. Λόγω ατέλειας του μηχανισμού η πόρτα ανοίγει αν οποιοιδήποτε 2 από τους 3 τροχούς βρεθούν στη σωστή θέση. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμών συνδυασμών οι οποίοι πρέπει να δοκιμαστούν για να είμαστε σίγουροι ότι το θησαυροφυλάκιο θα ανοίξει;

21 (Ελλάδα 1). ΄Εστω AB, CD δύο κάθετες χορδές ενός κύκλους με κέντρο O και ακτίνα τ. ΄Εστω ακόμα X, Ψ, Z, W τα 4 μέρη στα οποία χωρίζεται ο κύκλος κατά κυκλική σειρά. Να βρεθεί το max και το min της παράστασης

$$\frac{A(X) + A(Z)}{A(\Psi) + A(W)}$$

όπου A (υ) το εμβαδό του υ.

(Γ. Τζιντζίφας)

* 22 (Ελλάδα 2). Σε τρίγωνο ABC παίρνουμε σημεία $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$ και $F \in KL$. Αν $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ και E τα εμβαδά των τριγώνων AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN και ABC αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$E \geqslant 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{1/2}$$

(Δ. Κοντογιάννης)

** 23 (Ελλάδα 3). Σ' ορθογώνιο τρίγωνο ABC φέρνουμε το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα και την ευθεία που συνδέει τα έγκεντρα των τριγώνων ABD, ACD και που τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία K, L αντίστοιχα. Αν E, E_1 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ABC και AKL αντίστοιχα, να δείξετε ότι $E/E_1 \geqslant 2$.

(Δ. Κοντογιάννης)

24 (Ελλάδα 4). Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι $x_1, x_2, ..., x_{29}$ ένας τουλάχιστον από τους οποίους είναι μεγαλύτερος από τον 1988, έτσι ώστε

$$x_1^2 + x^2 + ... + x_{29}^2 = 29x_1x_2 ... x_{29}$$

(Θ. Μπόλης)

25 (Χ. Κόγκ 1). Να βρείτε όλες τις τιμές της συνάρτησης

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3} \right] + [3x] + [4x]$$

όταν $0 \leqslant x \leqslant 100$.

26 (Χ. Κογκ 2). Ο κύκλος $x^2 + y^2 = \tau^2$ τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A(τ, ο), B(− τ, ο), C(ο, τ), D(ο, − τ). ΄Εστω P = (κ, υ) και Q = (− κ, υ) δύο σημεία της περιφέρειας του κύκλου. ΄Εστω N το σημείο τομής της PQ με τον άξονα των y και M το ίχνος της κάθετης από το P προς τον άξονα των x. Αν το τ^2 είναι περιττός, $\kappa = \rho^m > q^n = \upsilon$, όπου ρ, q πρώτοι αριθμοί και m, n φυσικοί, να δειχθεί ότι |AM| = 1, |BM| = 9, |DM| = 8, |PQ| 8.

27 (Χ. Κογκ 3). Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 + \rho x^2 + qx + \tau = 0$$

είναι όλες πραγματικές και θετικές. Να βρεθεί μια σχέση μεταξύ των ρ, q, τ που να δίνει μιαν αναγκαία συνθήκη, ώστε οι ρίζες να είναι τα συνημίτονα των γωνιών ενός τριγώνου.

28 (Χ. Κογκ 4). Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον φυσικό αριθμό n, ώστε η εξίσωση

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0,$$

να έχει μια πραγματική ρίζα.

29 (Χ. Κογκ 5). Να εκφράσετε τον αριθμό 1988 σαν άθροισμα θετικών ακεραίων που το γινόμενο τους είναι μέγιστο.

30 (Χ. Κογκ 6). Σε κάθε τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές είναι σημεία ομοκυκλικά.

* 31 (Ουγγ. 1). Για τιμές του n υπάρχει η $n \times n$ πίνακας με στοιχεία − 1, 0 ή 1 τέτοιος ώστε όλα τα 2n αθροίσματα των γραμμών και στηλών να είναι διαφορετικά.

32 (Ουγγ. 2). Στην επιφάνεια μιας σφαίρας δίνονται n σημεία. Να δειχθεί ότι μπορούμε να χωρίσουμε την επιφάνεια σε n ισοδύναμες περιοχές, έτσι ώστε κάθε μια από αυτές να περιέχει ακριβώς ένα από τα δοσμένα σημεία.

33 (Ουγγ. 3). Σ' ένα test πολλαπλών επιλογών υπήρχαν 4 ερωτήσεις και 3 δυνατές απαντήσεις για κάθε ερώτηση. Μια ομάδα μαθητών εξετάσθηκε και για κάθε 3 από αυτούς υπήρχε μια ερώτηση στην οποία 3 μαθητές απάντησαν διαφορετικά. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός μαθητών που εξετάσθηκαν;

* 34 (Ισλαν. 1). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Τρεις ευθείες L_A, L_B και L_C που περνούν από τα A, B, C αντίστοιχα, κατασκευάζονται με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω H το ίχνος του ύψους από το A και S_A ο κύκλος με διάμετρο AH. O S_A τέμνει τις AB, AC στα M, N αντίστοιχα ($M \neq A$, $N \neq A$). Τότε L_A είναι κάθετη από το A στην MN. Ανάλογα κατασκευάζονται οι ευθείες Λ_B, L_C. Να δείξετε ότι οι ευθείες L_A, L_B, L_C περνούν από το ίδιο σημείο.

35 (Ισλαν. 2). Μια ακολουθία αριθμών α_n, $n = 1, 2, \ldots$ ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και για κάθε} \quad n \geqslant 2, \quad \alpha_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right)\alpha_{n-1}$$

Να δειχθεί ότι $\sum\limits_{\kappa \in A}^{n} \alpha_n < 1$, για κάθε $n \geqslant 1$.

36 (Ινδον. 1). i) Έστω ABC ένα τρίγωνο με $AB = 12$, $AC = 16$. Έστω M το μέσο της BC και E, F σημεία των AC, AB αντίστοιχα, ώστε οι ευθείες EF AM να τέμνονται στο G. Αν $AE = 2 \cdot AF$, να βρείτε το λόγο EG/GF.

ii) Έστω E σημείο εξωτερικό ενός κύκλου και έστω δύο χορδές EAB, EDC τέμνονται κατά γωνία 40°. Αν $AB = BC = CD$ να υπολογίσετε τη γωνία ACD.

37 (Ινδον. 2). i) 4 μπάλες ακτίνας 1 εφάπτονται. 3 βρίσκονται στο πάτωμα και η τέταρτη πάνω από αυτές. Ένα τετράεδρο που κάθε ακμή τους έχει μήκος s είναι περιγεγραμμένο στις μπάλες. Να υπολογίσετε την τιμή του s.

ii) Αν ABCD και EFHG είναι απέναντι έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με $\Delta\hat{H}C = 45°$ και $F\hat{H}B = 60°$, να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας BHD.

38 (Ινδον. 3). i) Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbb{N}$ αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν διαιρεί το πολυώνυμο $x^{2\kappa} + 1 + (x+1)^{2\kappa}$.

ii) Αν ρ, q, r είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

να βρεθεί το άθροισμα $\rho^3 + q^3 + r^3$.

iii) Αν r είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης των αριθμών 1059, 1417 και 2312 με έναν αριθμό $\alpha > 1$, να βρεθεί η τιμή του $d - r$.

iv) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του θετικού περιττού αριθμού n για τον οποίο το γινόμενο των αριθμών $2^{1/7}$, $2^{3/7}$, ..., $2^{2n+1/7}$ είναι μικρότερο του 1000.

39 (Ινδον. 4). i) Έστω

$$g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $g(x^{12})$ με το $g(x)$.

ii) Έστω $\kappa > 0$ και f μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x^2+1)^{\sqrt{x}} = \kappa \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+.$$

Να βρεθεί η τιμή του $\quad f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)^{\sqrt{12/y}}$ όπου $y > 0$.

iii) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad f(1) = 1.$$

Να βρεθεί ο αριθμός των ακεραίων n που ικανοποιούν τη σχέση $f(n) = n$.

40 (Ινδον. 5). i) Θεωρούμε κύκλο K με διάμετρο AB. Ακόμα ένα κύκλο L πο εφάπτεται στην AB και τον K και ένα κύκλο M που εφάπτεται στους κύκλους La, L και στην AB. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των κύκλων K και M.

ii) Στο τρίγωνο ABC είναι $AB = AC$ και $C\hat{A}B = 80°$. Αν τα D, E, F είναι σημεία των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα και $CE = CD$, $BF = BD$ να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{D}F$.

41 (Ινδον. 6). i) Να υπολογίσετε το κ, αν $k =$

$$\frac{(11+6\sqrt{2})\sqrt{11-6\sqrt{2}} - (11-6\sqrt{2})\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}+2}) - (\sqrt{\sqrt{5}+1})}$$

ii) Για κάθε θετικό αριθμό x, έστω

$$k = \frac{(x+1/x)^6 - (x^6+1/x^6) - 2}{(x+1/x)^3 + (x^3+1/x^3)}$$

Να υπολογίσετε το ελάχιστο του κ.

** 42 (Ιρλανδία 1). Να δείξετε ότι το σύναλο λύσεων της ανισώσεως

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{\kappa}{x-\kappa} \geqslant \frac{5}{4}$$

είναι η ένωση ξένων διαστημάτων, που το άθροισμα των μηκών τους είναι 1988.

43 (Ιρλανδία 2). Να βρείτε τα τρίγωνα του επιπέδου που οι πλευρές τους έχουν μήκη ακέραιους αριθμούς και οι ακτίνες των εγγεγραμμένων τους κύκλων έχουν μήκος 1.

44 (Ιρλανδία 3). Έστω $-1 < x < 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{\kappa=0}^{6} \frac{1-x^2}{1 - 2x\,\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{7}\right) + \kappa^2} = \frac{7(1+x)^7}{(1-x^7)}$$

Να επαληθεύσετε ότι

$$\text{στεμ}^2\frac{\pi}{7} + \text{στεμ}^2\frac{2\pi}{7} + \text{στεμ}^2\frac{3\pi}{7} = 8$$

45 (Ιρλανδία 4). Το g(n) ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο

$$g(1) = 0, \quad g(2) = 1$$

και $\quad g(n+2) = g(n) + g(n+1) + 1 \quad (n \geqslant 1)$.

Αν $\nu > 5$, όπου ν πρώτος αριθμός, να δείξετε ότι

$$n/g(n)\,(g(n)+1).$$

46 (Ισραήλ 1). Οι $A_1, A_2, \ldots, A_{29}$ είναι 29 διαφορετικές ακολουθίες θετικών ακεραίων. Για $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 29$ και

κάθε φυσικός αριθμός κ, ορίζουμε $N_i(x) = 0$ αριθμός των στοιχείων της ακολουθίας A_i που δεν ξεπερνούν το x και $N_{ij}(x) = 0$ αριθμός των στοιχείων της τομής $A_i \cap A_j$ που δεν ξεπερνούν το x. Είναι γνωστό, ότι για κάθε $1 \leqslant i \leqslant 29$ και κάθε φυσικό αριθμό x ισχύει

$$N_i(x) \geqslant \frac{x}{e}, \quad \text{όπου} \quad e = 2.71828...$$

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος

$$i, j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 29)$$

τέτοιο ώστε $\quad N_{ij}(1988) > 200$

* 47 (Ισραήλ 2). Στο κυρτό 5-γωνο ABCDE είναι BC = CD = DE και κάθε διαγώνιος είναι παράλληλη σε μια πλευρά (AC // DE, BD // AE κλπ.). Να δείξετε ότι το 5-γωνο είναι κανονικό.

** 48 (Λουξεμβούργο 1). Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες R και r (R > r) και κέντρο O. Ένα σταθερό σημείο ρ βρίσκεται στο μικρό κύκλο και μια μεταβλητή χορδή PA ανήκει στο μικρό κύκλο. Τα σημεία B, C ανήκουν στον μεγάλο κύκλο, τα B, P, C είναι συνευθειακά και $BC \perp AP$.

i) Για ποια τιμή (ες) της $O\hat{P}A$ το άθροισμα

$$BC^2 + CA^2 + AB^2$$

έχει ακρότατα;

ii) Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις των μέσων U της AB και V της AC, όταν η $O\hat{P}A$ μεταβάλλεται;

* 49 (Μεξικό 1). Έστω $f: Z_+ \to Z_+$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(n) + f(m)) = m + n$, για κάθε $m \in Z_+$, $n \in Z_+$. Να βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του f(1988).

50 (Μεξικό 2). Να δείξετε ότι οι αριθμοί A, B, C είναι ίσοι, όπου

A = ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να καλύψουμε ένα $2 \times n$ ορθογώνιο με 2×1 ορθογώνια.

B = ο αριθμός

$$C = \begin{cases} \binom{m}{0} + \binom{m+1}{2} + ... + \binom{2m}{2m}, & \text{αν } n = 2m \\ \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{3} + \binom{m+3}{5} + ... + \binom{2m+1}{2m+1}, & \text{αν } n = 2m+1 \end{cases}$$

51 (Μογγολία 1). Ο θετικός ακέραιος n έχει την ιδιότητα:

Σε κάθε σύνολο ν ακεραίων από τους 1, 2, ..., 1988 υπάρχουν 29 στοιχεία του που αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Να δείξετε ότι $n > 1788$.

52 (Μογγολία 2). Έστω ABCD ένα τετράπλευρο, A΄BCD΄ το συμμετρικό του ως προς τη BC, A΄΄B΄CD΄ το συμμετρικό του A΄BCD΄ ως προς τη CD΄ και A΄΄B΄΄C΄D΄ το συμμετρικό του A΄΄B΄CD΄ στην D΄A΄΄. Αν οι ευθείες AA΄΄, BB΄΄ είναι παράλληλες να δείξετε ότι το ABCD είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

53 (Μογγολία 3). Θεωρούμε n σημεία $A_1, A_2, ..., A_n$ όχι συνευθειακά ανά τρία. Να δείξετε ότι το n-γωνο $A_1A_2...A_n$ είναι εγγράψιμο, αν και μόνο αν

$$A_1A_2 \cdot A_3A_n ... A_{n-1}A_n + A_2A_3 \cdot A_4A_n \cdot$$

$$... A_{n-1}A_n \cdot A_1A_4 + ... +$$

$$A_{n-1}A_{n-2} \cdot A_1A_n ... \cdot A_{n-3}A_n =$$

$$A_1A_{n-1} \cdot A_2A_n ... A_{n-2}A_n$$

* 54 (Μογγολία). Να βρείτε τον ελάχιστο φυσικό n που έχει την ιδιότητα: Αν το σύνολο {1, 2, ..., n} διαμεριστεί με οποιοδήποτε τρόπο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε το ένα από τα σύνολα περιέχει 3 διαφορετικούς αριθμούς τέτοιους ώστε, το γινόμενο των δύο να είναι ίσο με τον τρίτο.

55 (Μογγολία 5). Έστω $\quad \alpha_i > 0, \beta_i > 0$

για $\quad 1 \leqslant i \leqslant n \ (n > 1)$

και $\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \pi$

Να δείξετε ότι: $\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\upsilon\nu\beta_i}{\eta\mu\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma\varphi\alpha_i$

56 (Ολλανδία 1). Θεωρούμε στο επίπεδο 1988 σημεία, που ανά 4 δεν είναι συγγραμμικά. Τα σημεία ενός υποσυνόλου με 1788 στοιχεία τα χρωματίζουμε μπλε και τα υπόλοιπα 200 κόκκινα. Να δείξετε ότι υπάρχει μια ευθεία του επιπέδου, σε καθένα από τα ημιεπίπεδα της οποίας υπάρχουν 894 μπλε και 100 κόκκινα σημεία.

57 (Ολλανδία 2). Έστω S το σύνολο των ακολουθιών

$$\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 7, \alpha_i = 0 \text{ ή } 1\}.$$

Η απόσταση δύο στοιχείων $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ ορίζεται σαν

$$\sum_{i=1}^{7} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Έστω T υποσύνολο του S στο οποίο κάθε δύο στοιχεία του έχουν απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3. Να δείξετε ότι το T περιέχει τουλάχιστον 16 στοιχεία. Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός τέτοιου συνόλου με 16 στοιχεία.

58. (Πολωνία 1). Έστω P κυρτό επίπεδο πολύγωνο και P΄ το κυρτό πολύγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών του P. Αν ν ακέραιος $\geqslant 3$, να βρείτε ακριβή φράγματα για το λόγο (εμβαδό P΄) : (εμβαδό P).

59 (Πολωνία 2). Στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε σημείο O και πεπερασμένο σύνολο τμημάτων που το άθροισμα των μηκών τους είναι 1988.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα επίπεδο που τέμνεται από στοιχεία του A και η απόσταση του O από αυτό δεν ξεπερνά το 574.

60 (Πολωνία 3). Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{10}$ ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι υπάρχει μια μη μηδενική ακολουθία $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ τέτοια ώστε όλοι οι x_i να ανήκουν στο σύνολο {− 1, 0, 1} και ο αριθμός $\sum_{i=1}^{10} x_i\alpha_i$ να διαιρείται με τον 1001.

* 61 (Πολωνία 4). 49 σπουδαστές επιλύουν 3 προβλήματα. Η βαθμολογία για κάθε πρόβλημα είναι ένας ακέραιος αριθμός μεταξύ 0 έως 7. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυό φοιτητές A, B τέτοιοι ώστε, για κάθε πρόβλημα ο A

έχει βαθμολογία τουλάχιστον τόσους βαθμούς, όσους και ο B.

62 (Κίνα 1). Έστω $x = p, y = q, z = r, \omega = s$ η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

$$x + \alpha_i y + \alpha_i^2 z + \alpha_i^3 \omega = \alpha_i^4, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Να εκφράσετε τη λύση του παρακάτω συστήματος

$$x + \alpha_i^2 y + \alpha_i^4 z + \alpha_i^6 \omega = \alpha_i^8, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

συναρτήσει των p, q r, s.

* 63 (Κίνα 2). Έστω ρ το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων μεγαλύτερων του 2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι ακέραιοι $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{\rho} x_i^2 - \frac{4}{4\rho + 1}\left(\sum_{i=1}^{\rho} x_i\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

είτε υπάρχουν μόνο δύο τιμές του ρ, για τις οποίες υπάρχουν ακέραιοι που ικανοποιούν την (1).

64 (Κίνα 3). Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους x, που είναι τέτοιοι ώστε το γινόμενο των ψηφίων τους να είναι $x^2 - 10x - 22$.

65 (Κίνα 4). Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} \ (n \geqslant 1), \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. του 1960ου και 1988ου όρου της ακολουθίας.

66 (Κίνα 5). Έστω C ένας κύβος με ακμές που έχουν μήκος 2. Κατασκευάζουμε ένα στερεό με 14 έδρες κόβοντας πλησίον κάθε κορυφής τον κύβο, ώστε οι νέες έδρες να είναι κάθετες στις διαγώνιες του κύβου και ίσες.

Αν οι 14 έδρες του στερεού είναι ισοδύναμες, να υπολογίσετε το εμβαδό τους.

67 (Κίνα 6). Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων κ και n, έστω $S_\kappa(n)$ το άθροισμα των ψηφίων του n γραμμένου στο σύστημα αρίθμησης με βάση κ. Να δείξετε ότι υπάρχουν το πολύ δυο πρώτοι $\rho \leqslant 20.000$ για τους οποίους ο $S_{31}(\rho)$ είναι σύνθετος.

68 (Σιγκαπούρη 1). Σε μια ομάδα n ατόμων καθένας γνωρίζει ακριβώς 3 άλλους. Τα άτομα είναι καθισμένα σε ένα στρογγυλό τραπέζι. Θα λέμε ότι τα άτομα κάθονται «τέλεια», αν καθένας γνωρίζει τους δυο διπλανούς τους. Να δείξετε ότι αν υπάρχει μια «τέλεια» τοποθέτηση S των ατόμων της ομάδας, τότε υπάρχει και άλλη «τέλεια» τοποθέτηση S των ατόμων της ομάδας, που δεν προκύπτει από την S με στροφή ή αξονική συμμετρία.

69 (Σιγκαπούρη 2). Έστω Q το έγκεντρο του τριγώνου ABC. Να δείξετε ότι για κάθε σημείο P είναι

$$a(PA)^2 + b(PB)^2 + C(PC)^2 =$$
$$a(QA)^2 + b(QB)^2 + C(QC)^2 + (a + b + c)(QP)^2,$$

όπου $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

70 (Ισπανία 1). Αν r, R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι

$$\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2} + \eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{A}{2} \leqslant \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

71 (Ισπανία 2). Έστω $A_1A_2A_3A_4$ τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο με πλευρές

$$\alpha_1 = A_1A_2, \quad \alpha_2 = A_2A_3, \quad \alpha_3 = A_3A_4, \quad \alpha_4 = A_4A_1.$$

Οι αντίστοιχοι κύκλοι με κέντρα I_i και ακτίνες ρ_i εφάπτονται σε κάθε πλευρά α_i και στις πλευρές α_{i+1}, α_{i-1} (προεκτεινόμενες) ($\alpha_0 = \alpha_4$).

Να δείξετε ότι: $$\prod_{i=1}^{4}\frac{\alpha_i}{\rho_i} = 4\,(\sigma\tau\varepsilon\mu A_1 + \sigma\tau\varepsilon\mu A_2)^2.$$

72 (Ισπανία 3). Θεωρούμε h + 1 σκακιέρες. Αριθμούμε τα τετράγωνα κάθε σκακιέρας από 1 ως 64 με τέτοιο τρόπο, ώστε αν οι περίμετροι από δύο οποιεσδήποτε σκακιέρες της συλλογής μας τοποθετηθούν με οποιονδήποτε τρόπο η μια πάνω στην άλλη, δυο τετράγωνα που έχουν την ίδια θέση, να μην έχουν τον ίδιο αριθμό. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του h;

73 (Σουηδία 1). Ένα παιχνίδι για δύο παίκτες παίζεται με 9 κουτιά τοποθετημένα σε ένα 3×3 τετράγωνο και με άσπρες και μαύρες πέτρες. Σε κάθε κίνηση ο παίκτης τοποθετεί 3 πέτρες, όχι απαραίτητα του ίδιου χρώματος, σε 3 κουτιά σε μια οριζόντια ή κατακόρυφη γραμμή. Κάθε κουτί δεν περιέχει πέτρες διαφορετικού χρώματος: αν, για παράδειγμα ένας παίκτης τοποθετεί μιαν άσπρη πέτρα σε ένα κουτί που περιέχει μαύρες πέτρες, η άσπρη πέτρα και μια από τις μαύρες, αφαιρούνται από το κουτί.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν το κεντρικό κουτί και τα κουτιά που είναι τοποθετημένα στις κορυφές περιέχουν μια μαύρη πέτρα και τα υπόλοιπα είναι άδεια.

Σε μια φάση του παιχνιδιού x κουτιά περιέχουν μια μαύρη πέτρα, ενώ τα υπόλοιπα είναι άδεια. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του x.

74 (Σουηδία 2). Έστω $\{\alpha_k\}_1^\infty$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\alpha_k - 2\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \geqslant 0 \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\kappa}\alpha_j \leqslant 1$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$

Να δείξετε ότι $$0 \leqslant (\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa+1}) \leqslant \frac{2}{\kappa^2},$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$

75 (Σουηδία 3). Ένα απειροσύνολο S ακεραίων περιέχει το O και είναι τέτοιο ώστε η διαφορά δύο διαδοχικών αριθμών δεν ξεπερνά ένα δοσμένο σταθερό αριθμό. Θεωρούμε την παρακάτω διαδικασία:

Παίρνουμε ένα σύνολο ακεραίων X και κατασκευάζουμε ένα νέο σύνολο που περιέχει όλους τους αριθμούς $x \pm s$, όπου $x \in X$ και $s \in S$.

Αρχίζοντας από το $S_0 = \{0\}$ κατασκευάζουμε διαδοχικά τα σύνολα $S_1, S_2, S_3, \ldots$ εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία. Να δείξετε ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων δεν θα παίρνουμε πια νέα σύνολα, δηλ. $S_\kappa = S_{\kappa_0}$, για $\kappa \geqslant \kappa_0$.

76 (Αγγλία 1). Ένας θετικός ακέραιος θα λέμε ότι είναι ένας «διπλός αριθμός» αν η ψηφιακή του παράσταση αποτελείται από ένα «μπλοκ» ψηφίων, που δεν αρχίζει από 0 και ακολουθείται από ένα ίδιο μπλοκ. Έτσι π.χ. ο 360360 είναι ένας διπλός αριθμός, ενώ ο 36036 δεν είναι. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι διπλοί αριθμοί που είναι τέλεια τετράγωνα.

** 77 (Αγγλία 2). Έστω $f: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ μια συνάρτηση για την οποία

$$f(1) = 1, f(3) = 3, \quad f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$

$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.

Να ορίσετε με απόδειξη το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι $\leqslant 1988$, για τους οποίους $f(n) = n$.

78 (Αγγλία 3). Θέλουμε να διαμερίσουμε το σύνολο των θετικών αριθμών σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A και B που να έχουν τις ιδιότητες:

i) $1 \in A$,

ii) Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του A που να έχουν άθροισμα της μορφής $2^k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) και

iii) Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του B που να έχουν άθροισμα αυτής της μορφής.

Να δείξετε ότι η διαμέριση αυτή μπορεί να γίνει με ένα μόνο τρόπο και να προσδιορίσετε το υποσύνολο στο οποίο ανήκουν οι αριθμοί 1987, 1988, 1989.

79 (Αγγλία 4). Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο και L ευθεία στο επίπεδο του. Αν u, υ, ω τα μήκη των αποστάσεων των A, B, C από την L αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$u^2\text{εφ}A + \upsilon^2\text{εφ}B + \omega^2\text{εφ}C \geqslant 2\Delta$$

(Δ το εμβαδό του ABC). Πότε ισχύει το ίσο;

80 (Αγγλία 5). Μια ακολουθία ακεραίων (a_n) ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ και

$$-\frac{1}{2} < a_{\nu+1} - \frac{a_\nu^2}{a_{\nu-1}} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{για} \quad \nu \geqslant 2$$

Να δείξετε ότι ο a_ν είναι περιττός για κάθε $\nu > 1$.

81 (ΗΠΑ 1). Υπάρχουν $n \geqslant 3$ κενές θέσεις σε ένα εργοστάσιο, που αριθμούνται από 1 έως n κατά φθίνουσα τάξη αμοιβής. Υπάρχουν n αιτήσεις για εργασία αριθμημένες από 1 έως n κατά φθίνουσα τάξη ικανότητας (προσόντων). Η αίτηση i είναι κατάλληλη για τη δουλειά j, αν και μόνο αν $i \geqslant j$.

Οι αιτήσεις έφθασαν κατά τυχαία τάξη. Καθένας έχει προσληφθεί στην υψηλότερα βαθμολογημένη εργασία, για την οποία αυτός ή αυτή είναι ικανοί, και για την οποία έχει το υψηλότερο επίπεδο από οποιαδήποτε άλλη εργασία που έχει επιλέξει. (Με βάση αυτούς τους κανονισμούς η εργασία 1 έχει ήδη καλυφθεί και έχει αποπερατωθεί η διαδικασία πρόσληψης). Να δείξετε ότι οι αιτήσεις, n και $n-1$ έχουν την ίδια πιθανότητα πρόσληψης.

82 (ΗΠΑ 2). Το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο στο C. Το σημείο P βρίσκεται στο τμήμα AC και τα τρίγωνα PBA, PBC έχουν ίσους εγγεγραμμένους κύκλους. Να εκφράσετε το μήκος $x = PC$ συναρτήση των $a = BC$, $b = CA$ και $C = AB$.

83 (ΗΠΑ 3). Ένα πλήθος φωτεινών σημάτων είναι τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις κατά μήκος μιας σιδηροδρομικής γραμμής μονής κατεύθυνσης και είναι αριθμημένα κατά σειρά 1, 2, ..., N ($N \geqslant 2$). Για λόγους ασφαλείας, ένα τρένο δεν επιτρέπεται να περάσει ένα σήμα αν κάθε άλλο τρένο κινείται κατά μήκος της σιδηροτροχιάς που βρίσκεται μεταξύ του σήματος αυτού και του επομένου. Όμως δεν υπάρχει όριο για τον αριθμό των τρένων που μπορούν να σταθμεύσουν σε ένα σήμα, το ένα πίσω από το άλλο (υποθέτουμε ότι τα τρένα έχουν μηδενικό μήκος).

Μια σειρά από K μεταφορικά τρένα πρέπει να οδηγηθούν από το σήμα 1 στο σήμα N. Κάθε τρένο κινείται με διαφορετική, αλλά σταθερή ταχύτητα, όταν κινείται και δεν είναι μπλοκαρισμένο για λόγους ασφαλείας.

Να δείξετε ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία τα τρένα είναι τοποθετημένα, ο ίδιος χρόνος θα περάσει μεταξύ της αναχώρησης του πρώτου τρένου από το σήμα 1 και της άφιξης του τελευταίου τρένου στο σήμα N.

84 (ΕΣΣΔ 1). Θεωρούμε σημείο M στην πλευρά AC του τριγώνου ABC με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ABM, BMC να είναι ίσες. Να δείξετε ότι $BM^2 = \Delta\, \text{σφ}\dfrac{B}{2}$ (Δ το εμβαδό του ABC).

85 (ΕΣΣΔ 2). Γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, άρτιο πλήθος ατόμων συζητά. Μετά από ένα διάλειμα ξανακάθονται στο κυκλικό τραπέζι με διαφορετική σειρά. Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα τέτοια ώστε ο αριθμός των ατόμων που βρίσκονται μεταξύ τους πριν και μετά το διάλειμα είναι ο ίδιος.

86 (ΕΣΣΔ 3). Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ έχει ακέραια λύση διαφορετική από την $x = y = z = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta y^2 + cz^2 = 1$ έχει μια ρητή λύση.

87 (ΕΣΣΔ 4). Γράφουμε στη σειρά κατά αύξουσα τάξη όλους του ανάγωγους ρητούς αριθμούς, που το γινόμενο του αριθμητή και του παρονομαστή τους είναι μικρότερο από 1988. Να δείξετε ότι για κάθε δυο γειτονικά κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\gamma}{\varepsilon}$ με $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\gamma}{\varepsilon}$ ισχύει η σχέση $\beta c - ad = 1$.

88 (ΕΣΣΔ 5). Θεωρούμε 5 κύκλους, από τους οποίους 6 κύκλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του σταθερού 7ου και καθένας εφάπτεται στον 7ο και στους δύο διπλανούς του. Αν τα σημεία επαφής των 6 κύκλων με τον 7ο είναι κατά σειρά τα $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ να δείξετε ότι

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$$

89 (Βιετνάμ 1). Κάθε σύνολο M σημείων του επιπέδου, θα λέμε ότι ανήκει στο M* σύνολο, αν και μόνο αν $xx^* + yy^* \leqslant 1$, όπου $(x^*, y^*) \in M^*$ και $(x, y) \in M$. Να βρείτε τα τρίγωνα Y που είναι τέτοια ώστε, το Y* και ένα το συμμετρικό του Y ως προς την αρχή των συντεταγμένων.

90 (Βιετναμ 2). Υπάρχει αριθμός $\alpha (0 < \alpha < 1)$ τέτοιος ώστε να υπάρχει μια ακολουθία $\{\alpha_n\}$ θετικών ακεραίων για την οποία ισχύει

$$1 + \alpha_{n+1} \leq \alpha_n + \frac{\alpha}{n} \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

91 (Βιετνάμ 3). Ένα κανονικό 14-γωνο με πλευρά α είναι εγγεγραμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Να δείξετε ότι

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha} > \sqrt{3 \text{ συν} \frac{\pi}{7}}.$$

92 (Βιετνάμ 4). Έστω $\rho \geq 2$ φυσικός. Να δείξετε ότι υπάρχει ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{i \sqrt[\rho]{i+1}} > \rho.$$

93 (Βιετνάμ 5) Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ βαθμού $\leq n$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

94 (Βιετνάμ 6). Έστω $n + 1$ $(n \geq 1)$ θετικοί ακέραιοι που δημιουργούνται αν πάρουμε το γινόμενο n πρώτων αριθμών (ένας πρώτος μπορεί να ληφθεί περισσότερες φορές ή ακόμα να μην ληφθεί στα γινόμενα). Να δείξετε ότι ανάμεσα στους $n + 1$ αυτούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε μερικούς αριθμούς που το γινόμενο τους είναι τέλειο τετράγωνο.

Παρατηρήσεις: Όσες ασκήσεις έχουν * επιλέχθηκαν σαν υποψήφια θέματα. Όσες έχουν ** τέθηκαν στην 19η Δ.Μ.Ο. με βάση το αποτέλεσμα ψηφοφορίας που έγινε ανάμεσα στους αρχηγούς των αποστολών. Τη μετάφραση έκαναν οι συνάδελφοι Θ. Μπόλης - Δ. Κοντογιάννης.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΙΛΕΞΑΜΕ

Κεσογλίδης

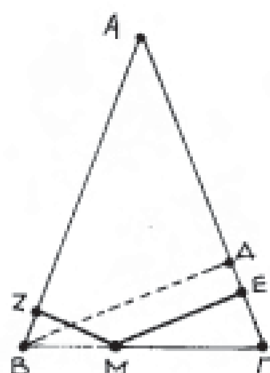
Άσκηση 1, τεύχος 4, Απρ. 1988, σελ. 211 (Ευκλείδης Β)

Ένα τετράπλευρο έχει την ιδιότητα: το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου στο εσωτερικό του από τις πλευρές του είναι σταθερό. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε γνωστές τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν για κάθε σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι σταθερό, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και αντίστροφα.

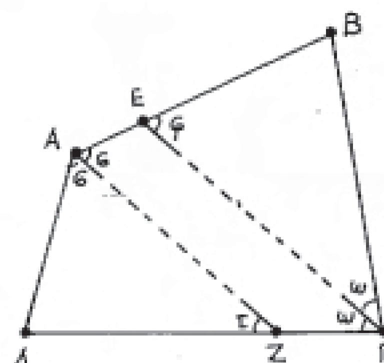


Σχ. 1

(ii) Αν σε ένα τετράπλευρο οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών είναι παράλληλες, τότε οι άλλες δύο γωνίες του είναι ίσες.

Δηλαδή, αν ΑΖ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Γ αντίστοιχα, τότε

$$AZ \parallel \Gamma E \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{\Delta}$$



Σχ. 2

Έστω τώρα ΑΒΓΔ το τετράπλευρο της άσκησης και Μ ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό αυτού. Από την υπόθεση έχουμε:

(1) $\quad MA_1 + MB_1 + M\Gamma_1 + M\Delta_1 = \text{σταθ.}$

Από το σημείο Μ φέρνουμε ευθεία (ε) τέμνουσα τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΕ = ΑΖ, τότε σύμφωνα με το

ο 49ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιτροπή Διαγωνισμών

Έγινε με συμμετοχή μεγαλύτερη από κάθε άλλη φορά ο 49ος Π.Μ.Δ. που διοργανώνει κάθε χρόνο η ΕΜΕ. Η ΕΜΕ ευχαριστεί τους συναδέλφους και τις διευθύνσεις της Μέσης Εκπαίδευσης για τη βοήθειά τους στην πραγμάτωση του διαγωνισμού.

Τα θέματα που η επιτροπή διαγωνισμού επρότεινε ήταν τα παρακάτω:

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Να βρεθεί στην απλούστερη μορφή η παράσταση:

$$A = \frac{x^2+2\sqrt{2}\cdot x+2}{4x+5} : \frac{x^2-2}{16x^2+40x+25}$$

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ = 50 cm. Έστω Γ ένα σημείο του ημικυκλίου που απέχει από το Α 40cm και Ε η προβολή του Γ στην ΑΒ. Πάνω στην κάθετη ευθεία από το Γ στο επίπεδο του ημικυκλίου να πάρετε τμήμα ΓΔ = ΓΕ και να κατασκευάσετε το τετράεδρο ΔΓΑΒ.

α) Να υπολογιστούν οι ακμές του τετραέδρου.

β) Πόσος είναι ο όγκος αυτού του τετραέδρου;

γ) Μπορείτε να συγκρίνετε το άθροισμα των τετραγώνων των δύο απέναντι ακμών με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων απέναντι ακμών (ΔΑ, ΒΓ και ΔΒ, ΑΓ και ΔΓ, ΑΒ).

ΘΕΜΑ 3ο: Αν υποθέσουμε ότι: $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $x = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $y = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$ και $z = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ να αποδειχθεί ότι $y = \frac{2xz}{x+z}$

ΘΕΜΑ 4ο: Οι πόλεις Άλφα και Βήτα συνδέονται με γραμμή λεωφορείου. Από κάθε πόλη ξεκινούν ταυτόχρονα λεωφορεία κάθε μία ώρα, ολόκληρο το 24/ωρο και το ταξίδι ανάμεσα στις δύο πόλεις διαρκεί 8 ώρες ακριβώς. Ένα λεωφορείο που ξεκινά από την πόλη Άλφα, πόσα λεωφορεία της ίδιας γραμμής θα συναντήσει μέχρι να φτάσει στην πόλη Βήτα;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

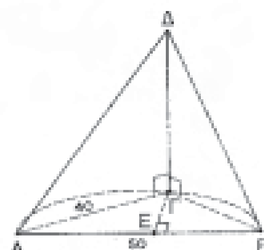
1ο: $A = \frac{(x+\sqrt{2})^2}{4x+5} : \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(4x+5)^2} =$

$\frac{(x+\sqrt{2})^2}{4x+5} \cdot \frac{(4x+5)^2}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} =$

$\frac{(x+\sqrt{2})(4x+5)}{x-\sqrt{2}}$

2ο: α) $\Gamma B = \sqrt{AB^2 - A\Gamma^2} = \sqrt{50^2-40^2} = 30cm$

$E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2}(AB)(\Gamma E) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Gamma B)$ ή $50\cdot(\Gamma E) = 40\cdot 30$



$\Gamma E = \frac{40\cdot 30}{5} = 24cm = \Gamma\Delta$

$A\Delta = \sqrt{A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2} = \sqrt{40^2+24^2} = \sqrt{2176}$

$B\Delta = \sqrt{B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2} = \sqrt{30^2+24^2} = \sqrt{1476}$

β) $\sqrt{2} = \frac{1}{3}(AB\Gamma)\ (\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{40\cdot 30}{2}\cdot 24 = 4800cm^3$

γ) $A\Delta^2 + B\Gamma^2 = 2176 + 30^2 = 3076$

$B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 50^2 + 24^2 = 3076$

3ο: $\frac{2xz}{x+z} = \frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}} =$

$= \frac{\frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}} = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2+\beta\cdot(\alpha+\gamma)+\gamma^2} =$

$= \frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2+\frac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma}\cdot(\alpha+\gamma)+\gamma^2} = \frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)^2} =$

$= \frac{2\alpha\gamma}{(\alpha+\gamma)\cdot(\alpha+\gamma)} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = y$

4ο:



Τη διαδρομή ΑΒ τη χωρίζουμε σε 8 ίσα διαστήματα, που καθένα αντιπροσωπεύει το διάστημα που διανύ-

ουν τα λεωφορεία σε 1 ώρα. Είναι φανερό ότι το λεωφορείο που ξεκινά από την Α θα συναντά λεωφορεία στα σημεία: Α, $Α_1$, $Α_2$.... $Α_7$, Β, καθώς και στα σημεία: $Β_1$, $Β_2$, $Β_3$...$Β_8$ δηλαδή θα συναντήσει $9+8=17$ λεωφορεία.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο: Αν α,β,γ ακέραιοι αριθμοί με $α+β+γ=0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $2α^4+2β^4+2γ^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

Θέμα 2ο: Δίνονται στο επίπεδο

1 σημείο
και άλλα 2 σημεία
και άλλα 3 σημεία απ' ευθείας
και άλλα 4 σημεία απ' ευθείας
και άλλα 5 σημεία απ' ευθείας
⋮
και άλλα 10 σημεία απ' ευθείας
και άλλα 11 σημεία σκόρπια.
Πόσες ευθείες ορίζουν όλα τα σημεία;

Θέμα 3ο: Τα 24 γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου τα βάζουμε στην τύχη σε 4 διαφορετικά κουτιά. Χρησιμοποιούμε τα γράμματα ενός κουτιού και σχηματίζουμε όλες τις δυνατές λέξεις με τρία διαφορετικά γράμματα (π.χ. αν σε κάποιο κουτί υπάρχουν τα γράμματα Α,Χ,Ω,Τ,Κ... τις λέξεις ΩΧΑ, ΧΑΩ, ΧΤΚ, κ.λ.π.). Ν' αποδειχτεί ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα κουτί από το οποίο μπορούμε να σχηματίσουμε τουλάχιστο 120 λέξεις τριών γραμμάτων.

Θέμα 4ο: Έστω ΑΒΓΔΕΖ ένα κυρτό εξάγωνο με περίμετρο π. Να δείξετε ότι $π > \frac{2}{3}(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο. Είναι:
$α^4+β^4+γ^4 = α^2(β+γ)^2+β^2(γ+α)^2+γ^2(α+β)^2 =$
$=2(α^2β^2+β^2γ^2+γ^2α^2)+2αβγ(α+β+γ) =$
$(α^2+β^2+γ^2)^2-α^4-β^4-γ^4$.
Άρα $2(α^4+β^4+γ^4)=(α^2+β^2+γ^2)^2$.

2ο. Αν όλα τα $1+2+3+...+11=66$ σημεία ήταν σκόρπια, θα καθόριζαν $\frac{66(66-1)}{2}=33.65=2145$

Αν τα 3 συνευθειακά ήταν σκόρπια θα καθόριζαν $\frac{3\cdot2}{2}=3$. Τώρα καθορίζουν 1, δηλ. $\boxed{2}$ λιγότερες.

Όμοια τα 4 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{4\cdot3}{2}-1=\boxed{5}$ λιγότερες

Όμοια τα 5 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{5\cdot4}{2}-1=\boxed{9}$ λιγότερες

Όμοια τα 6 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{6\cdot5}{2}-1=\boxed{14}$ λιγότερες

Όμοια τα 7 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{7\cdot6}{2}-1=\boxed{20}$ λιγότερες

Όμοια τα 8 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{8\cdot7}{2}-1=\boxed{27}$ λιγότερες

Όμοια τα 9 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{9\cdot8}{2}-1=\boxed{35}$ λιγότερες

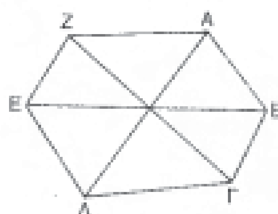
Όμοια τα 10 συνευθειακά σημεία καθορίζουν $\frac{10\cdot9}{2}-1=\boxed{44}$ λιγότερες

Συνολικά $2+5+9+14+20+27+35+44=156$ λιγότερες ευθείες.
Άρα συνολικά καθορίζονται $2145-156=1989$ ευθείες.

3ο. Σε κάποιο κουτί θα υπάρχουν 6 τουλάχιστον γράμματα, οπότε ο αριθμός των λέξεων θα είναι $\binom{6}{3}=4\cdot5=20$ τουλάχιστον.

Επειδή όμως από 3 γράμματα μπορεί να κατασκευασθούν έξι (6) συνολικά λέξεις, ο αριθμός των λέξεων θα είναι $6\cdot20=120$.

4ο. Προφανώς: $ΑΔ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ$ ή
$ΑΔ<ΔΕ+ΕΖ+ΖΑ$
$2ΑΔ<π$. Όμοια $2ΒΕ<π$, $2ΓΖ<π$ δηλ.



$3π>2(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ)$ ή $π>\frac{2}{3}(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ)$

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο και Κ,Λ σημεία των πλευρών του ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{ΑΚ}{ΚΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΓ}=\frac{ΒΛ}{ΛΓ}$.
Να δείξετε ότι η ΚΛ είναι παράλληλη σε μια διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ.

Θέμα 2ο. Έστω ΑΔ η εσωτερική και ΑΕ η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Αν $ΑΓ>ΑΒ$ και $ΑΓ-ΑΒ=\frac{1}{2}ΒΓ$, να δείξετε ότι

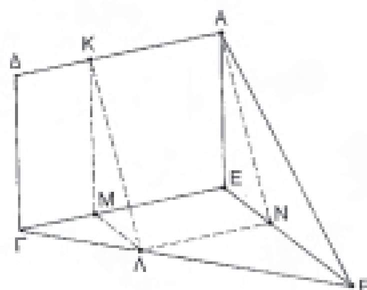
$\frac{B\Delta^2}{BE^2} < \frac{1}{4}$.

Θέμα 3ο. Αν α πραγματικός μη μηδενικός αριθμός, να λύσετε την εξίσωση:
$x^4 - 4\alpha x^3 + 2\alpha^2x^2 + 4\alpha^3x + \alpha^4 = 0$ $(\alpha \neq 0)$.

Θέμα 4ο. ΑΝ α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} + \sqrt{\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma} \geq \sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΔΓΕ. Αν Ε ≡ Β, η πρόταση είναι προφανής. Έστω λοιπόν Ε ≠ Β. Φέρνουμε ΚΜ ∥ ΔΓ (σχ.1), οπότε
$\frac{AK}{K\Delta} = \frac{EM}{M\Gamma} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma}$, άρα ΜΛ ∥ ΕΔ.
Φέρνουμε ΛΝ ∥ ΑΔ. Τότε το ΑΚΛΝ είναι παραλληλόγραμμο και $\frac{BN}{NE} = \frac{B\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{AE}$, άρα η ΑΝ είναι διχοτόμος της $\hat{EAB}$.



2ο. Είναι γνωστό ότι $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ και $EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$.

Τότε $\frac{B\Delta^2}{BE^2} = \left(\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 = \frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2} = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2} < \frac{1}{4}$

3ο. Παρατηρούμε ότι
$x^4 - 4\alpha x^3 + 2\alpha^2x^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4 = (x^2 - 2\alpha x - \alpha^2)^2 = 0$ (1)

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες

$x_{1,2} = \frac{2\alpha \pm \sqrt{8\alpha^2}}{2} = \alpha \pm \alpha\sqrt{2}$

Παρατήρηση: Υπάρχουν και άλλοι τρόποι επίλυσης της εξίσωσης αυτής. Π.χ. αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με α^2x^2 και θέσουμε $\frac{x}{\alpha} - \frac{\alpha}{x} = y$. Άλλος τρόπος είναι να θέσουμε $x = y + \alpha$ κ.λπ.

4. Παρατηρούμε ότι $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta>0$, $\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma>0$, $\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma>0$ και υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:
$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma +$
$+ 2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)} \geq \alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$ ή
$2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)} \geq$
$\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-2\beta^2$. Υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο μετά τις πράξεις θα πάρουμε.

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta\gamma^2$
$= (\alpha\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma)^2 \geq 0$.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο. Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των ευθειών ΑΖ και ΔΕ. Να υπολογισθούν οι αριθμοί κ και λ που ορίζονται από τις σχέσεις $\vec{\Delta O} = \kappa\,\vec{\Delta E}$ και $\vec{AO} = \lambda\,\vec{AZ}$.

Θέμα 2ο. Έστω * μία διμελής πράξη ορισμένη στο σύνολο Z των ακεραίων αριθμών και τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in Z$ υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y έτσι ώστε $x * y = \alpha$. Ν' αποδειχτεί ότι η πράξη * δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $\alpha * \beta = -(\beta * \alpha)$ και (ii) $\alpha * (\beta * \gamma) = \alpha * (\beta * \gamma)$ (για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in Z$).

Θέμα 3ο. Σ' ένα μαθηματικό διαγωνισμό λαβαίνουν μέρος συνολικά 1989 μαθητές από τις τάξεις Γ' Γυμνασίου, Α' Λυκείου, Β' Λυκείου και Γ' Λυκείου και από κάθε τάξη υπάρχουν τουλάχιστον 490 μαθητές. Πόσες είναι οι δυνατές συνθέσεις κατά τάξη του συνόλου των μαθητών που λαβαίνουν μέρος στο διαγωνισμό; (π.χ. μία δυνατή σύνθεση είναι η εξής: 519 από Γ' Γυμνασίου και 490 μαθητές από κάθε τάξη του Λυκείου).

Θέμα 4ο. Έστω α και β πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες επί των α και β ούτως ώστε για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y, αν $\alpha x + \beta[x] = \alpha y + \beta[y]$, τότε $x = y$. ([x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο. Προφανώς $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ αφού τότε η
$\alpha x + \beta[x] = \alpha y + \beta[y]$ (1)
θα ισχύει για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
α) **$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.** Τότε η (1) δίνει
$\beta[x] = \beta[y]$ ή $[x] = [y]$ (2)
Όμως από τη (2) δε συνεπάγεται ότι $x = y$.
β) **$\alpha \neq 0$, $\beta = 0$.** Τότε η (1) δίνει $\alpha x = \alpha y$ ή $\boxed{x = y}$.
γ) **$\alpha\beta \neq 0$:** Τότε η (1) γράφεται:
$\alpha\big([x] + (x)\big) + \beta[x] = \alpha([y] + (y)\big) + \beta[y]$ ή
$(\alpha+\beta)([x] - [y]) = \alpha\big((y) - (y)\big)$ (3), όπου
$0 \leq (x),(y) < 1$.
Η (3) γράφεται $(1 + \frac{\beta}{\alpha})([x] - [y] = (y) - (x)$ (4)
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
γ_1) **$\alpha\beta > 0$:** Τότε $1 + \frac{\beta}{\alpha} > 1$, οπότε το α' μέλος της (4) θα είναι 0 είτε **απολύτως** μεγαλύτερο του 1 (αφού [x], [y] ακέραιοι), ενώ το β' μέλος 0 ή μικρότερο του 1 απολύτως. Θα πρέπει λοιπόν $[x] = [y]$ και $(x) = (y)$, δηλ. **x = y.**

γ₂) **$\alpha\beta<0$:** Τότε $1+\frac{\beta}{\alpha}<1$.

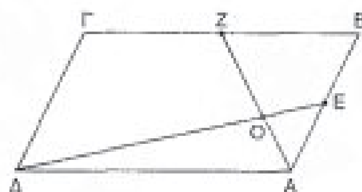
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

γ₂₁) **$1+\frac{\beta}{\alpha}\le-1$:** Τότε όπως και στην περίπτωση γ1, θα πρέπει $x=y$.

γ₂₂) **$-1<1+\frac{\beta}{\alpha}<1$:** Τότε όπως είναι φανερό η (4) μπορεί να ισχύει και για $x\neq y$. Ώστε $(\beta=0,\ \alpha\neq0)$ ή $(\alpha\beta>0)$ ή $(\alpha\beta<0,\ \frac{\beta}{\alpha}<-2)$.

2ο. Αν υποθέσουμε ότι η $*$ έχει ταυτόχρονα τις ιδιότητες (i) και (ii), τότε
$(\alpha*\beta)*\gamma=-(\gamma*(\alpha*\beta))=-((\gamma*\alpha)*\beta)=\beta*(\gamma*\alpha)=$
$=(\beta*\gamma)*\alpha=-(\alpha*(\beta*\gamma))=-((\alpha*\beta)*\gamma)$, οπότε
$(\alpha*\beta)*\gamma=0$.
Αλλά αφού $\alpha*\beta=\kappa\in Z$, τότε $\kappa*\gamma=0$ για κάθε $\kappa\in Z$ και κάθε $\gamma\in Z$, άτοπο.

1ο. Έστω $\vec{\Delta A}=\vec{\alpha}$, $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$ (σχ.1).
Τότε $\vec{\Gamma B}=\vec{\alpha}$, $\vec{AB}=\vec{\beta}$, $\vec{\Gamma Z}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}$,



$\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{\beta}$, $\vec{BZ}=(-\frac{1}{2})\vec{\alpha}$, $\vec{\Delta E}=\vec{\Delta A}+\vec{AE}$
$=\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$, $\vec{AZ}=\vec{AB}+\vec{BZ}=\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$.

Ακόμα έχουμε $\vec{\Delta O}=\kappa\,\vec{\Delta E}$, $\vec{AO}=\lambda\,\vec{AZ}$. Όμως
$\vec{\Delta O}=\vec{\Delta A}+\vec{AO}\Rightarrow\kappa(\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta})=$
$\vec{\alpha}+\lambda(\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\alpha})\Rightarrow$
$\Rightarrow\vec{\alpha}(\kappa+\frac{1}{2}\lambda-1)+\vec{\beta}(\frac{1}{2}\kappa-\lambda)=\vec{0}$
Και αφού τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά θα έχουμε:

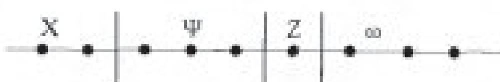
$$\left.\begin{matrix}\kappa+\frac{1}{2}\lambda-1=0\\ \frac{1}{2}\kappa-\lambda=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2\kappa+\lambda=2\\ \kappa-2\lambda=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}5\lambda=2\\ \kappa=2\lambda\end{matrix}\right\}\ \text{δηλ. } \kappa=\frac{4}{5},\ \lambda=\frac{2}{5}.$$

3ο. Έστω x,y,z,ω οι μαθητές των τάξεων Γ' Γυμνασίου και Α',Β',Γ' Λυκείου αντίστοιχα. Τότε $x+y+z+\omega=1989$, όπου $x,y,z,\omega\ge490$. Ο αριθμός των λύσεων του συστήματος αυτού είναι ο αριθμός των δυνατών συνθέσεων. Για τη λύση χρησιμοποιούμε την εξής μέθοδο:

Θέτουμε: $X=x-489\ge1$
$\Psi=y-489\ge1$
$Z=z-489\ge1$
$\Omega=\omega-489\ge1$

Θα είναι $X+\Psi+Z+\Omega=33$, όπου $X,\Psi,Z,\Omega\ge1$ (1)
Ο αριθμός των λύσεων του (1) μπορεί να βρεθεί με τον εξής τρόπο: Σε μια ευθεία τοποθετούμε 33 σημεία στη σειρά. Μπορούμε να πάρουμε μια λύση βάζοντας 3 κάθετες γραμμές ανάμεσα στα σημεία. Σε κάθε τέτοια κατασκευή αντιστοιχεί 1 λύση. π.χ. Χ το πρώτο τμήμα,



Ψ το δεύτερο κ.λ.π. Οι χώροι ανάμεσα στα 33 σημεία είναι 32, άρα ο αριθμός των λύσεων θα είναι

$$\binom{32}{3}=\frac{32\cdot31\cdot30}{1\cdot2\cdot3}=4960.$$

Από τους μαθητές που πήραν μέρος στον Π.Μ.Δ. θα επιλεγούν οι μαθητές που είχαν την καλύτερη επίδοση και θα διαγωνισθούν πάλι στην 6η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα, που θα γίνει στην Αθήνα στις 16-12-89, για να επιλεγούν αυτοί που θα συμμετάσχουν στην 7η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα και στην 31 Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.



Η 30^{η} ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
Μια ελληνική επιτυχία

Επιτροπή Διαγωνισμών

Στο Μπραουνσβάιχ της Ο.Δ. της Γερμανίας που είναι η γεννέτειρα του μεγάλου μαθηματικού Κ.Φ Γκάους έγινε από 11 έως 24 Ιούλη η 30η Δ.Μ.Ο. Σ' αυτήν πήραν μέρος 50 χώρες, ανάμεσα στις οποίες και η Ελλάδα.

Την Ελληνική ομάδα αποτελούσαν οι μαθητές:

Αθανασιάδης	Χρ.	Θεσ/νίκη	Γ' Λυκείου
Παπουτσής	Γ.	Θεσ/νίκη	Γ' Λυκείου
Συμεωνίδης	Πρ.	Θεσ/νίκη	Γ' Λυκείου
Σταθόπουλος	Δ.	Αθήνα	Β' Λυκείου
Οικονόμου	Α.	Αθήνα	Γ' Λυκείου
Μουρούκος	Β.	Αθήνα	Γ' Λυκείου

που επελέγησαν μετά από επτά (7) συνολικά διαγωνισμούς. Συνοδοί ορίσθηκαν ο πρόεδρος της ΕΜΕ συνάδελφος Θ. Μπόλης και ο συνάδελφος Δ. Κοντογιάννης. Εξάλλου η ΕΜΕ με εξόδα της έστειλε παρατηρητή το συνάδελφο Χ. Αχτσαλωτίδη.

Τα αποτελέσματα της 30ης Δ.Μ.Ο. μπορεί να χαρακτηρισθούν πολύ θετικά για τη χώρα μας, σε πείσμα όσων συνειδητά ή ασυνείδητα επιδιώκαν την υποβάθμιση της μαθηματικής μας παιδείας. Πράγματι η Ελληνική ομάδα συγκέντρωσε 122 βαθμούς και πήραμε 1 αργυρό μετάλιο (Χ. Αθανασιάδης), 3 χάλκινα και 2 εύφημες μνείες και κατέλαβε την 20 θέση, μαζί με την Αγγλία. Αν μάλιστα λάβουμε υπ' όψη ότι η ηλικία των Ελλήνων μαθητών ήταν πολύ μικρότερη από την ηλικία των Άγγλων και των περισσοτέρων μαθητών που συμμετείχαν στην 30η Δ.Μ.Ο. τότε τα αποτέλεσμα αυτό ισοδυναμεί με άθλο. Αλλά και τα αποτελέσματα των έξη (6) τελευταίων χρόνων που η ΕΜΕ έχει την ευθύνη της προετοιμασίας των ομάδων μας δείχνουν, πως η χώρα μας είναι μια αστείρευτη πηγή αυθεντικών μαθηματικών ταλέντων.

Θα αναφέρουμε ακόμα, κάτι που όλοι οι συνάδελφοι γνωρίζουν: Μέχρι τώρα το ΥΠΕΠΘ δεν έδωσε καμιά ουσιαστική βοήθεια στους μαθητές αυτούς. Αρκετά χρόνια τώρα η ΕΜΕ προτείνει στο ΥΠΕΠΘ την ανάγκη να εισάγονται χωρίς εξετάσεις και να δίνεται υποτροφία στους μαθητές που η ΕΜΕ επιλέγει για τις Ολυμπιακές μας ομάδες. Δυστυχώς η εισήγηση της ΕΜΕ δεν ελήφθη υπ' όψιν. Ας δούμε όμως τα αποτελέσματα που έφεραν οι μαθητές μας στις Πανελλαδικές εξετάσεις: Ο Χ. Αθανασιάδης πέρασε δεύτερος (2ος) στο Μαθηματικό τμήμα του Α.Π. Θεσ/νίκης, αλλά προτίμησε να σπουδάσει στο περίφημο Αμερικανικό ίδρυμα M.I.T. το οποίο του έδωσε πλήρη υποτροφία.

Οι Δ. Παπουτσής, Π. Συμεωνίδης προτίμησαν Γερμανικά Πανεπιστήμια.

Τέλος οι μαθητές Α. Οικονόμου και Ε. Μουρούκος, πέτυχαν αντίστοιχα τη δεύτερη (2η) και πρώτη (1η) θέση στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου της Αθήνας. Από τα παραπάνω φαίνεται, ότι οι μαθητές της Ολυμπιακής μας ομάδας δεν είχαν ανάγκη κάποια ευεργετική διάταξη του ΥΠΕΠΘ για να εισαχθούν στο πανεπιστήμιο. Αντίθετα η πολιτεία έχει χρέος να εξασφαλίζει την παραμονή των μαθητών αυτών στην χώρα μας και να μην παρατηρείται, κάθε χρόνο το ίδιο φαινόμενο, δηλαδή η διαρροή μαθηματικών ταλέντων σε Αμερικάνικα και Ευρωπαϊκά πανεπιστήμια.

Τελειώνοντας ευχόμαστε σε όλους τους μαθητές μας που συμμετείχαν στους διαγωνισμούς και τα μαθήματα της ΕΜΕ καλή επιτυχία και πάντα διακρίσεις, για την προκοπή τη δική τους και της χώρας μας.

Τέλος αναφέρουμε ότι από τις ασκήσεις που πρότεινε η Ελλάδα μια (αυτή του Θ. Μπόλη) επιλέχθηκε από την επιτροπή στην ομάδα των 21 ασκήσεων από τις οποίες τελικά επιλέχθηκαν τα θέματα της 30ης Δ.Μ.Ο. που είναι τα παρακάτω.

Πρώτη μέρα

1. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{1,2,...,1989\}$ μπορεί να εκφρασθεί σαν ένωση διαφορετικών υποσυνόλων $A_i (i=1,2,\ldots,117)$ τέτοιων ώστε

i) κάθε A_i να έχει 17 στοιχεία

ii) το άθροισμα των στοιχείων κάθε A_i είναι το ίδιο, για $i=1,2,\ldots,17$.

2. Εστω ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τον περιγεγραμένο κύκλο του ΑΒΓ στο A_1. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία B_1, Γ_1. Εστω το σημείο της τομής του AA_1 με τις

διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών των Β και Γ αντίστοιχα. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τα B_o Γ_o. Να δείξετε ότι:

i) Το εμβαδό του εξαγώνου $A\Gamma_1 BA_1 \Gamma B_1$ είναι διπλάσιο από το εμβαδό του τριγώνου $A_o B_o \Gamma_o$.

ii) $(A_oB_o\Gamma_o) \geq 4(AB\Gamma)$

3. Εστω ν και k ακέραιοι θετικοί αριθμοί. Εστω S σύνολο n σημείων του επιπέδου, τέτοιο ώστε:

i) τα σημεία του S ανά 3 δεν είναι συνευθειακά

ii) για κάθε σημείο P του S υπάρχουν τουλάχιστο τα σημεία τα S που ισαπέχουν από το P. Να δείξετε ότι

$$K < \frac{1}{2} + \sqrt{w}$$

Δεύτερη μέρα

---

4. Ενα κυρτό τετράπλευρο ABCD έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α. Οι πλευρές AB,AD και AC ικανοποιούν τη σχέση AB = AD + BC

6. Υπάρχει ένα σημείο P στο εσωτερικό του τετραπλεύρου με απόσταση h από την ευθεία CD τέτοιο ώστε AP = h + AD, BP = h + BC

Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{\sqrt{h}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{AD}} + \dfrac{2}{\sqrt{BC}}$

5. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν n διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι κανένας από τους οποίους δεν είναι ακέραια δύναμη πρώτου αριθμού.

6. Μια μετάθεση $X_1, X_2, \ldots, X_{2\nu}$ των στοιχείων του συνόλου $\{1,2\ldots Z_n\}$ όπου ν είναι γενικός ακέραιος θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα P αν $|Xi - Xi+_1| = n$, για τουλάχιστον ένα i, όπου $i \in \{1,2,\ldots,2n-1\}$. Να δείξετε ότι για κάθε n υπάρχουν περισσότερες μεταθέσεις που έχουν την ιδιότητα P από εκείνες που δεν την έχουν.

Σημ. Οι απαντήσεις των θεμάτων της 6ης Β.Μ.Ο. και της 30ης Δ.Μ.Ο. θα δημοσιευθούν στο επόμενο τεύχος. Περιμένουμε λοιπόν λύσεις σας.

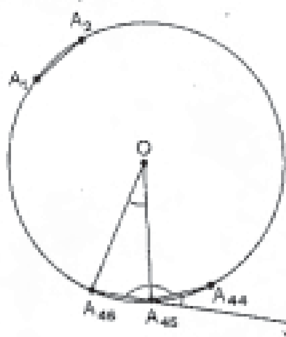
Διαγωνισμοί — Ολυμπιάδες

Επιμέλεια: Δημήτρης Κοντογιάννης

Λύσεις θεμάτων Γ' Γυμνασίου της 6ης Ε. Μ. Ολυμπιάδας

Θέμα 1ο:
$\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=4$, $\alpha_5=7$, $\alpha_6=11$, $\alpha_7=18$, $\alpha_8=29$, $\alpha_9=47$ $\underline{\alpha_{10}=76}$

Θέμα 2:
Γράφτηκε στο περιοδικό μας λανθασμένο από τον «τυπογραφικό δαίμονα».



Το σωστό είναι $\dfrac{2-\left(\dfrac{x+y}{3}\right)-1}{\left(\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{2y-x}{3}\right)^2+4}$

Για να είναι μέγιστο πρέπει $\dfrac{x+y}{3}-1=0$ και

$$\frac{x-3}{2}+\frac{2y-x}{3}=0$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε: $\boxed{\begin{matrix}x=1\\ y=2\end{matrix}}$

Θέμα 3:
$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots=\overset{\frown}{A_{45}A_{46}}\cdots=\dfrac{360^\circ}{72}=5^\circ$

Επίκεντρα γωνία $=A_{45}\hat{O}A_{46}=\underline{5^\circ}$

Εγγεγρ. γων. $A_{44}\hat{A}_{45}A_{46}=\dfrac{1}{2}$ (μεγάλου τόξου $A_{44}\cdots A_1\cdots A_{46})=\dfrac{1}{2}(360^\circ-10^\circ)=\underline{175^\circ}$

Εξ. γωνία: $A_{44}A_{45}x=180^\circ-175^\circ=\underline{5^\circ}$

Πλήθος διαγωνίων $=\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}=\dfrac{72\cdot 69}{2}=\underline{2268}$

Θέμα 4ο:
Η εξίσωση $x^2-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda-1}x+2\lambda+2=0$ για $x=-1$

γίνεται $(-1)^2-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda-1}(-1)+2\lambda+2=0$ ή

$1+\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda-1}+2\lambda+2=0$ ή $\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda-1}+2\lambda+3=0$

ή $\lambda^2+1+2\lambda^2+3\lambda-2\lambda-3=0$ ή $3\lambda^2+\lambda-2=0$

ή $3\lambda^2+3\lambda-2\lambda-2=0$ ή $3\lambda(\lambda+1)-2(\lambda+1)=0$

ή $(\lambda+1)(3\lambda-2)=0$.

Άρα $\underline{\lambda=-1}$, $\underline{\lambda=\dfrac{2}{3}}$

Οι λύσεις των θεμάτων της 6ης Β.Μ.Ο

Τα θέματα της 6ης Β.Μ.Ο. δημοσιεύθηκαν στο 1ο τεύχος του «Ευκλείδη Β'» της χρονιάς αυτής. Παρακάτω δίνουμε τις λύσεις τους.

1ο θέμα (Βουλγαρία). Αφού $1=d_1$, θα πρέπει $d_2\geq 2$. Αν $d_2>2$, οι διαιρέτες d_2, d_3, d_4 θα είναι περιττοί. Αλλά $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=1+$ περιττός $=$ άρτιος, πράγμα άτοπο. Άρα $d_2=2$ και τότε ο n θα είναι άρτιος. Όμως $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=1^2+2^2+d_3^2+d_4^2$, άρα θα πρέπει ένας από τους d_3, d_4 να είναι άρτιος. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.:

α) **Έστω ότι ο d_3 είναι άρτιος** και $d_3=2\kappa$ ($\kappa\in\mathbb{N}^*$). Τότε $\kappa<d_3$ και ο κ είναι διαιρέτης του n. Άρα $\kappa=d_1=1$ ή $\kappa=d_2=2$. Αλλά τότε $d_3=2=d_2$ πράγμα άτοπο ή $d_3=4$ πράγμα επίσης άτοπο.

β) **Έστω ότι ο d_4 είναι άρτιος** και $d_4=2\kappa$ ($\kappa\in\mathbb{N}^*$). Άρα $\kappa=1$ ή 2 ή $\kappa=d_3$. Αν $\kappa=1$ τότε $d_4=2$ άτοπο. Αν $\kappa=2$ τότε $d_4=4$ και $d_3=3$. Άρα $n=1^2+2^2+3^2+4^2=30$. Αλλά $d_4=n+30$ πράγμα άτοπο. Αν $\kappa=d_3$, τότε $d_4=2d_3$ και $n=1^2+2^2+d_3^2+4d_3^2=5(d_3^2+1)$ (1).
Επειδή d_3/n από την (1) έχουμε $d_3=5$. Τότε $d_4=10$ και $n=1^2+2^2+5^2+10^2=130$.
Αυτή θα είναι και η μοναδική λύση.

2ο θέμα (Γιουγκοσλαβία).
Αν $P(x)=0$, παρατηρούμε ότι $|x|<9$, γιατί αν υ-

ποθέσουμε ότι $|x| \geq 9$ τότε:
$|P(x)| = |a_n \kappa^n + a_{n-1}\kappa^{n-1} + \dots + a_o| \geq 2|x|^n - 9$
$(|x|^{n-1} + \dots + 1) = 2|x|^n - 9\dfrac{|x|^n - 1}{|x| - 1} =$

$= \dfrac{2|x|^{n+1} - 2|x|^n - 9|x|^n + 9}{|x| - 1} =$

$= \dfrac{2|x|^{n+1} - 11|x|^n + 9}{|x| - 1} > \dfrac{2|x|^{n+1} - 18|x|^n + 9}{|x| - 1} =$

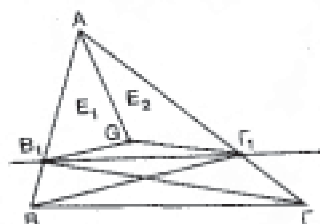
$= \dfrac{2|x|^n(|x| - 9)}{|x| - 1} > 0$ πράγμα άτοπο.

Έστω $P(x) = Q(x)\,R(x)$ με $Q(x)$, $R(x)$ πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές.

Τότε $P(10) = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} = Q(10)\ R(10)$ (1).
Όμως $|Q(10)| > 1$, $|R(10)| > 1$ άρα ο αριθμός $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_o}$ δεν θα είναι πρώτος, πράγμα άτοπο.

3ο θέμα (Ελλάδα).

Έστω $(AB_1G) = E_1$, $(A\Gamma_1 G) = E_2$ (Σχ. 1).
Τότε $(AB) = E_1 + E_2 + (BB_1G_1) = 3E_2$
$(AB_1) = E_1 + E_2 + (\Gamma\Gamma_1 GB_1) = 3E_1$



Άρα $(BB_1G\Gamma_1) = 2E_2 - E_1$
$(\Gamma\Gamma_1 GB_1) = 2E_1 - E_2$ και προσθέτοντας κατά μέλη
$(BB_1G\Gamma_1) + (\Gamma\Gamma_1 GB_1) = E_1 + E_2$ (1).

Ακόμα έχουμε:

$\dfrac{(AB\Gamma_1)}{E_2} = 3$ (2) και $\dfrac{(AB_1\Gamma)}{E_1} = 3$ (3).

Τέλος έχουμε:

$\dfrac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma_1)} = \dfrac{(AB)(A\Gamma)}{(AB)(A\Gamma)_1} = \dfrac{(A\Gamma)}{(A\Gamma_1)}$ (4) και

$\dfrac{(AB\Gamma)}{(AB_1\Gamma)} = \dfrac{(AB)}{(AB_1)}$ (5)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2), (4) θα πάρουμε:

$\dfrac{(AB\Gamma_1)}{E_2} \cdot \dfrac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma_1)} = 3\dfrac{(A\Gamma)}{(A\Gamma_1)}$ ή $\dfrac{(AB\Gamma)}{E_2} =$

$= 3\dfrac{(A\Gamma)}{(A\Gamma_1)} \Rightarrow \dfrac{E_2}{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(A\Gamma_1)}{(A\Gamma)}$ (6)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3), (5) έχουμε:

$\dfrac{(AB\Gamma)}{E_1} = 3\dfrac{(AB)}{(AB_1)}$ ή $\dfrac{E_1}{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{3}\dfrac{(AB_1)}{(AB)}$ (7).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (6), (7) και παίρνουμε:

$\dfrac{E_1 + E_2}{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(A\Gamma_1)}{(A\Gamma)} + \dfrac{(AB_1)}{(AB)}\right] \geq$

$\geq \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(A\Gamma_1)(AB_1)}{(A\Gamma)(AB)}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(AB_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)}} \geq$

$\geq \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{E_1 + E_2}{(AB\Gamma)}}$ ή $\dfrac{E_1 + E_2}{(AB\Gamma)} \geq \dfrac{4}{9}$ ή

$E_1 + E_2 \geq \dfrac{4}{9}(AB\Gamma)$ και από την (1)

$(BB_1G\Gamma_1) + (\Gamma\Gamma_1 GB_1) \geq \dfrac{4}{9}(AB\Gamma)$.

(Την άσκηση αυτή πρότεινε ο συνάδελφος Δ.Γ. Κοντογιάννης).

4ο θέμα (Ρουμανία).

Έστω F μια τυχαία οικογένεια που περιέχει σύνολα που καθένα έχει τρία στοιχεία του συνόλου $\{1,2,\dots,\nu\}$, ώστε $|A \cap B| \leq 1$, για κάθε ζεύγος $A, B \in F$.
Κάθε σύνολο $A \in F$ περιέχει ακριβώς $\binom{3}{2} = 3$ διαφορετικά διμελή υποσύνολα που πρέπει να είναι διαφορετικά μεταξύ τους άρα $3|F| = \binom{\nu}{2}$ (1)

Όμως ο ολικός αριθμός των διμελών υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,\nu\}$ είναι $\binom{\nu}{2}$ και η F είναι τυχαία οικογένεια, άρα:

$f(\nu) \leq \dfrac{1}{3}\binom{\nu}{2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\nu!}{2!\,(\nu-2)!} = \dfrac{\nu(\nu-1)}{6}$ (2).

Έστω τώρα F_o η οικογένεια των τριμελών συνόλων με στοιχεία α,β,γ από το σύνολο $\{1,2,\dots,\nu\}$ τέτοια ώστε $\alpha + \beta + \gamma = \nu$ ή $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu$. Είναι φανερό ότι αν $\alpha + \beta + \gamma_1$ και $\alpha + \beta + \gamma_2 \in \{\nu, 2\nu\}$ τότε $\alpha + \beta + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma_2$ δηλ. $\gamma_1 = \gamma_2$, γιατί αν π.χ. $\alpha + \beta + \gamma_1 = \nu$ και $\alpha + \beta + \gamma_2 = 2\nu$, τότε $\gamma_2 - \gamma_1 = \nu$ ή $\gamma_2 > \nu$ άτοπο. Ώστε για την οικογένεια F_o θα έχουμε $f(\nu) \geq |F_o|$. Για την επιλογή ενός συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \in F_o$ υπάρχουν ν δυνατότητες για το α και $\nu - 4$ δυνατότητες για το β, αφού $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq \dfrac{\nu - \alpha}{2}$, $\beta \neq \dfrac{2\nu - \alpha}{2}$, $\beta \neq S - 2\alpha$,

όπου $1 \leq \beta \leq \nu$ και $S = \alpha + \beta + \gamma \in \{\nu, 2\nu\}$.
Αφού σε ένα τριμελές υποσύνολο τα στοιχεία του μπορούν να μετατεθούν κατά $3! = 6$ τρόπους, το $A \in F_o$ θα μετράται 6 ακριβώς φορές.

Άρα $6|F_o| \geq \nu(\nu - 4)$ ή $f(\nu) \geq |F_o| \geq \dfrac{\nu(\nu-4)}{6}$.

11ος ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΟΛΕΩΝ

Δημήτρης Κοντογιάννης

Πριν από 11 χρόνια έγινε για πρώτη φορά ένας ενδιαφέρον διεθνής μαθηματικός διαγωνισμός. **Ο διαγωνισμός πόλεων.** Σ' αυτόν λαμβάνουν μέρος μαθητές πόλεων από διάφορα κράτη (ΕΣΣΔ, Γερμανία, Βουλγαρία, Πολωνία, Αυστραλία, Ισπανία κ.λ.π.).

Ο διαγωνισμός προβλέπει συμμετοχή μαθητών διαφόρων ηλικιών.

Υπάρχουν συγκεκριμένα τρεις βαθμίδες. Στην πρώτη παίρνουν μέρος μαθητές μέχρις 13 ετών. Στη δεύτερη μαθητές ηλικίας 13 έως 15 ετών και στην τρία βαθμίδα μαθητές από 15 ετών και άνω. Ο διαγωνισμός **έχει** δύο γύρους. Ο δεύτερος γύρος έγινε την Κυριακή 18 Μάρτη. Σ' αυτόν πήρε μέρος και η χώρας μας για πρώτη φορά. Μάλιστα, συμμετείχαν η Αθήνα, η Θεσ/νίκη, το Ηράκλειο και η Πάτρα. Οι μαθητές που πήραν μέρος από τη χώρας μας ανήκουν στη δεύτερη και τρίτη βαθμίδα.

Τα θέματα που δόθηκαν και μεταφράστηκαν από τον πρόεδρο της ΕΜΕ συνάδελφο κ. Θ. Μπόλη ήταν εξαιρετικά υψηλού επιπέδου και οι μαθητές που συμμετείχαν κυριολεκτικά τα ευχαριστήθηκαν.

Τα παραθέτουμε για όσους ενδιαφέρονται.

Θέματα γ' βαθμίδος (από 15 ετών και άνω)

1ο) Για κάθε φυσικό υπάρχει πολυώνυμο P(x) που είναι διαιρετέο με το $(x-1)^n$, ο βαθμός του να μην ξεπερνά το 2^n και όλοι οι συντελεστές του να είναι ίσοι με +1,0 ή -1. (6)

2ο) Θα λέμε μια συλλογή ακεραίων βαρών βασική αν το άθροισμα των βαρών είναι 500 και κάθε ακέραιο βάρος μικρότερο ή ίσο του 500 μπορεί να ζυγιστεί με μοναδικό τρόπο από τα βάρη της συλλογής.

α) Να βρείτε ένα παράδειγμα βασικής συλλογής διαφορετικής εκείνης στην οποία όλα τα βάρη είναι ίσα με 1. (4)

β) Πόσες διαφορετικές βασικές συλλογές υπάρχουν; (6)

3ο) Ένα κέικ παρασκευάζεται για δείπνο στο οποίο θα παρίστανται p ή q άτομα όπου (p,q) = 1. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός των κομματιών (όχι αναγκαστικά ίσων) που θα πρέπει να διαιρεθεί το κέικ, προκαταβολικά, ώστε κάθε άτομο να πάρει ίσα μέρη από το κέικ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις. (10)

4ο) Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο στο οποίο είναι ΑΓ = ΒΓ και Η το μέσον της βάσης ΒΑ. Έστω l μια ευθεία που περνά από το Μ και τέμνει τις ΑΔ, ΒΔ στα σημεία Ρ και Κ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι οι γωνίες: $\widehat{ΑΓΡ}$, $\widehat{ΚΓΒ}$ είναι ίσες. (10)

5ο) Υπάρχει κυρτό πολύεδρο που να έχει μια τριγωνική τομή από επίπεδο που δεν περνά από κορυφή ενώ κάθε κορυφή του πολυέδρου ανήκει σε:

α) 5 και άνω έδρες (4).

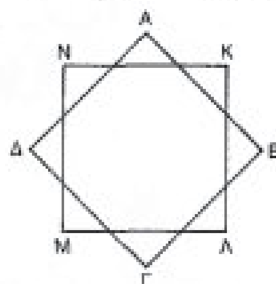
β) Ακριβώς 5 έδρες (6).

6ο) Υπάρχουν μερικά κομμάτια διαφορετικών χρωμάτων σ' ένα άσπρο τετράγωνο χαρτί πλευράς α. Το εμβαδόν κάθε κομματιού είναι μικρότερο ή μέσο του 1 και κάθε ευθεία παράλληλη προς οποιαδήποτε από τις πλευρές του τετραγώνου, τέμνει το πολύ 1 χρωματιστό κομμάτι. Να δείξετε ότι το ολικό εμβαδόν των κομματιών δεν ξεπερνά το α (12).

Θέματα β' βαθμίδος (από 13 ως 15 ετών)

1ο) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των μερών του επιπέδου $o\,x\,y$ που ορίζονται από 100 γραφήματα διαφορετικών συναρτήσεων της μορφής $y = ax^2 + βx + γ$ (6).

2ο) Ένα τετράγωνο τέμνεται από ένα άλλο ίσο τετράγωνο που είναι στραμμένο κατά 45° γύρω απ' το κέντρο του ώστε καθε πλευρά να διαιρείται σε λόγους α:β:α (πράγμα που υπολογίζεται εύκολα). Ας κάνουμε την κατασκευή αυτή για ένα τυχαίο κυρτό τετράπλευρο, δηλ., κάθε πλευρά να διαιρείται σε 3 μέρη με τους ίδιους λόγους α:β:α. Να δειχθεί ότι το 4πλευρο από τις ευθείες των σημείων διαιρέσεως έχει το ίδιο εμβαδό με το αρχικό (6).



3ο) 15 ελέφαντες στέκονται στη σειρά. Τα βάρη τους εκφράζονται σε ακέραιο αριθμό κιλών. Το άθροισμα των βαρών των ελεφάντων εκτός από τον τελευταίο δεξιά και το διπλάσιο βάρος του δεξιού γειτονικού καθενός είναι ακριβώς 15 τόννοι. Να βρεθεί το βάρος του κάθε ελέφαντα (8).

4ο) Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Π σημείο της πλευράς ΒΓ. Ο κύκλος που περνά απ' τα Α, Β, Π ξανατέμνει τη ΒΔ στο σημείο Κ και ο κύκλος που περνά απ' τα Γ, Π, Κ, ξανατέμνει τη ΒΔ στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Ρ, Π είναι συνευθειακά (8).

5ο) Να βρεθεί ο αριθμός των ζευγών (m,n) θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 1000 και τέτοιοι ώστε:

$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}. \qquad (10)$$

6ο) Θα καλούμε συλλογή ακεραίων βαρών **βασική** αν το άθροισμα των βαρών είναι 200 και κάθε ακέραιο βάρος μικρότερο ή ίσο του 200 μπορεί να ζυγιστεί με μοναδικό τρόπο από τα βάρη της συλλογής.

α) Να βρείτε ένα παράδειγμα βασικής συλλογής διαφορετικής από εκείνη που καθένα βάρος είναι ίσο με 1 (4).

β) Πόσες διαφορετικές βασ. συλλογές υπάρχουν; (8)

ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ - ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνισμών της ΕΜΕ: Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Ι. Τυρλής, Ε. Ντζιαχρήστας, Γ. Ωραιόπουλος

Η 31 ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Από 7 έως 19 Ιουλίου έγινε στο Πεκίνο η 31η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα. Στην Ολυμπιάδα αυτή που πήραν μέρος 55 χώρες, η Ελλάδα παρόλο που συμμετείχε, λόγω της απεργίας, με μαθητές της Β' και Α' Λυκείου κατώρθωσε να πάρει ένα χάλκινο μετάλιο (Α. Αργυρίου, 35ο Λύκειο Αθήνας) και μια εύφημο μνεία (Χ. Αδαμάρας, Λύκειο Ανατόλια Θεσ/νίκης).

Μάλιστα ο Αδαμάρας έχασε το χάλκινο μετάλειο για 3 ψήφους αφού το θέμα ήλθε στην επιτροπή κριτών του διαγωνισμού και αρκέστηκε σε μια εύφημο μνεία.

Για την ιστορία οι μ αθητές που συμμετείχαν και που επελέγησαν από την επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ βάσει των αποτελεσμάτων του Πανελληνίου μαθητικού διαγωνισμού, της 6ης Ε.Μ.Ο. και αλλεπάλληλων εσωτερικών διαγωνισμών ήταν οι:

Αργυρίου Ανδρέας (Αθήνα)
Αδαμάρας Χρήστος (Θεσ/νίκη)
Ευγενείου Θεόδωρος (Χαλκιδική)
Δημόπουλος Δημήτριος (Λειβαδία)
Τερζούδη Αικατερίνη (Αλεξανδρούπολη)
Βάρσου Αικατερίνη (Αθήνα)

Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ, ότι για πρώτη φορά, δεν βγήκαν αποτελέσματα κατά χώρα, κάτι που πιστεύουμε ότι είναι θετικό.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ακόμα, ότι τα θέματα ήταν εξαιρετικά δύσκολα (σύμφωνα με εκτιμήσεις ειδικών, τα δυσκολότερα που τέθηκαν ποτέ) και ότι η ομάδα μας πήγε πολύ καλά στα θέματα Γεωμετρίας.

Μάλιστα ξεπέρασε και την ίδια τη Σοβιετική Ένωση, που μόνον ένας μαθητής της έλυσε τη Γεωμετρική άσκηση, ενώ από τη χώρα μας την έλυσαν δύο (Αργυρίου, Αδαμάρας).

Αναφέρουμε τους μαθητές της Γ' Λυκείου που θα ήταν στην ομάδα αν δεν είχαν αναβληθεί οι Γενικές εξετάσεις.

Σταθόπουλος Δημήτρης του 6ου Λυκείου Ζωγράφου, Τσίκας Άγγελος του 2ου Λυκείου Πύργου Ηλείας, Λουλάκης Μιχάλης του 9ου Λυκείου Περιστερίου, Καρακώστας Γεώργιος του 1ου Λυκείου Κορίνθου.

Τα θέματα της 31ης Δ.Μ.Ο. επεξεργάσθηκαν μαζί με τις λύσεις του οι μαθητές Αργυρίου Α., και Αδαμάρας Χρ.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

1) Δύο χορδές AB, CD ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο E μέσα στον κύκλο. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος EB.

Η εφαπτόμενη στο E του κύκλου που περνάει από τα D, E, M τέμνει τις ευθείες BC, AC στα F, G αντίστοιχα.

$$\text{Αν } \frac{AM}{AB}=t, \text{ να βρείτε το } \frac{EG}{EF}$$

συναρτήσει του t.

2) Έστω $n \geq 3$ και ας θεωρήσουμε ένα σύνολο E από $2n-1$ διακεκριμένα σημεία ενός κύκλου. Υποθέτουμε ότι ακριβώς κ από αυτά τα σημεία πρόκειται να χρωματιστούν μαύρα. Ένας τέτοιος χρωματισμός είναι «καλός» αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι από μαύρα σημεία τέτοια ώστε το εσωτερικό του ενός από τα τόξα που σχηματίζουν περιέχει ακριβώς n σημεία από το E. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του κ έτσι ώστε κάθε τέτοιος χρωματισμός κ σημείων του E να είναι «καλός».

3) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι $n>1$, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\frac{2^n+1}{n^2}$ νάναι ακέραιος

4) Έστω Q^*_+ το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών. Να βρεθεί μια συνάρτηση $f: Q^*_+ \to Q^*_+$ τέτοια ώστε:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ για κάθε } x, y \in Q^*_+$$

5) Δοθέντος ενός αρχικού ακεραίου αριθμού $n_0>1$, δύο παίκτες A και B διαλέγουν διαδοχικά ακεραίους $n_1, n_2, n_3, \ldots$ σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

Ξέροντας τον n_{2k}, ο A διαλέγει έναν ακέραιο n_{2k+1} ώστε $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n^2_{2k}$. Ξέροντας τον n_{2k+1}, ο B διαλέγει έναν ακέραιο n_{2k+2} έτσι ώστε:

$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ νάναι θετική δύναμη πρώτου αριθμού.

Ο παίκτης A κερδίζει αν μπορέσει να διαλέξει τον αριθμό 1990. Ο B κερδίζει αν μπορέσει να διαλέξει τον αριθμό 1.

Για ποιές τιμές του n_0

a) υπάρχει στρατηγική νίκης του A,

b) υπάρχει στρατηγική νίκης του B,

c) για κανένα από τους παίκτες δεν υπάρχει στρατηγική νίκης;

6) Να αποδείξετε ότι υπάρχει κυρτό 1990-γωνο με τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

α) όλες οι γωνίες είναι ίσες,

β) τα μήκη των πλευρών είναι οι αριθμοί: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$ με κάποια σειρά.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1) Ενώνουμε το D με τα A,B και M. Αφού $C\hat{E}F = D\hat{E}G = E\hat{M}D$ και $E\hat{C}F = M\hat{A}D$, $CEF \sim AMD$, οπότε $CE \cdot MD = AM \cdot EF$.

Εξάλλου αφού $E\hat{C}G = M\hat{B}D$ και

$C\hat{G}E = C\hat{E}F - G\hat{C}E = E\hat{M}D - M\hat{B}D = B\hat{D}M$,

$CGE \sim BDM$, οπότε $GE \cdot MB = CE \cdot MD$.

Άρα, έχουμε $GE \cdot MB = AM \cdot EF$, οπότε:

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{t \cdot AB}{(1-t) \cdot AB} = \frac{t}{1-t}$$

ΣΧΟΛΙΟ:

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το σημείο A βρίσκεται μεταξύ του G και του C. Αυτό μπορεί να αποδειχτεί ως εξής:

Όπως φαίνεται στο σχήμα, αφού το M (που είναι διαφορετικό από το B) ανήκει στο τμήμα BE, $M\hat{D}E < B\hat{D}E$. Παρατηρώντας ότι $B\hat{E}F = M\hat{D}E$ και $B\hat{A}C = B\hat{D}E$, έχουμε ότι $B\hat{E}F < B\hat{A}C$. Άρα το σημείο A βρίσκεται μεταξύ του C και του G.

2) Δύο σημεία θα λέμε ότι «σχετίζονται» αν υπάρχουν ακριβώς n σημεία του E σε ένα από τα τόξα που σχηματίζουν. Χρειάζεται να ορίσουμε το μικρότερο k με την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε k σημεία του E περιέχουν τουλάχιστον ένα ζευγάρι από σημεία που «σχετίζονται». Ενώνοντας κάθε ζευγάρι σημείων που «σχετίζονται», παίρνουμε ένα γράφημα G με βαθμό 2 σε κάθε κορυφή. Το G αποτελείται από κλειστές γραμμές που, δε συνδέονται. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

i) Αν $3 - 2n - 1$, τότε

$(2n-1, n+1) = (2n-1, 3) = 1$, και το G είναι μια κλειστή γραμμή.

ii) Αν $3/2n-1$, τότε

$(2n-1, n+1) = (2n-1, 3) = 3$, και υπάρχουν στο G 3 κλειστές γραμμές, κάθε μία από τις οποίες περιέχει $\frac{2n-1}{3}$ κορυφές.

Στην περίπτωση (i), η μικρότερη τιμή του k είναι προφανώς:

$$\left[\frac{2n-1}{2}\right] + 1 = n$$

Στη περίπτωση (ii), η μικρότερη τιμή του k είναι

$$3\left[\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}\right] + 1 = 3 \cdot \frac{\frac{2n-1}{3} - 1}{2} + 1 = n - 1$$

Συνοψίζοντας, η μικρότερη τιμή του k είναι:

$$\begin{cases} n, & 3 \nmid 2n-1 \\ n-1, & 3 / 2n-1 \end{cases}$$

3) Προφανής λύση είναι η $n = 3$ αφού

$$\frac{2^n + 1}{n^2} = \frac{2^3 + 1}{3^2} = \frac{9}{9} = 1 \in Z$$

Θα αποδείξω ότι είναι και η μοναδική λύση. Προφανώς ο n είναι περιττός.

Έστω ότι ο $n = 3^\kappa a$ είναι λύση, με $\kappa \geq 0$, $(a,3) = 1$ οπότε $(3^\kappa a)^2 / 2^{3^\kappa a} + 1$.

Αλλά $2^{3^\kappa a} + 1 = (2^a + 1) \prod_{m=0}^{\kappa-1} (2^{2 \cdot 3^m a} - 2^{3^m a} + 1)$

Επειδή όμως για κάθε περιττό αριθμό t είναι $2^{2t} - 2^t + 1 \equiv 3 (\mathrm{Mod}\ 9)$ θάναι και

$$3^\kappa | \prod_{m=0}^{\kappa-1} (2^{2 \cdot 3^m a} - 2^{3^m a} + 1),$$

$3^{\kappa+1} \nmid \prod_{m=0}^{\kappa-1} (2^{2 \cdot 3^m a} - 2^{3^m a} + 1)$ άρα $3^k | 2^a + 1$.

Από $(a,3) = 1$ παίρνω $9 \nmid 2^a + 1$. Έτσι $k = 0$ ή 1. Θα δείξω τώρα ότι $a = 1$.

Έστω $a \neq 1$. Ονομάζω ρ τον μικρότερο πρώτο παράγοντα του α. Ο α είναι περιττός και $(a,3) = 1$, οπότε $\rho \geq 5$ και $\rho | 2^n + 1$, δηλαδή

$$2^n \equiv -1 \ (\mathrm{Mod}\ \rho) \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ \rho)$$

Από το θεώρημα του Fermatείναι $2^{\rho-1} \equiv 1$ $(\mathrm{Mod}\ \rho)$, όπου $j = (2n, \rho - 1)$. $2n = 2 \cdot 3 \cdot a$, $(\rho - 1, a) = 1 \Rightarrow j/6$ κι όλες οι δυνατές τιμές του j είναι οι 1,2,3,6.

Αλλά $\rho / 2^j - 1$ άρα ο ρ είναι ένας παράγοντας ενός εκ των 1, 3, 7, 63 κι επειδή $\rho \geq 5$ θα 'ναι $\rho = 7$. Όμως $7 \nmid 2^m + 1$ για κάθε ακέραιο m, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το $\rho / 2^n + 1$ $\forall\, v \in Z$. Άρα η μόνη λύση της μορφής $3^\kappa a$ είναι όταν $\kappa = 1$, $a = 1$, δηλ. $n = 3$, που 'ναι και η μοναδική λύση του προβλήματος.

4) Αν $f(y_1) = f(y_2)$ τότε η συναρτησιακή εξίσωση δίνει $y_1 = y_2$ (I)

Θέτω $y = 1$ οπότε $f[x(f(1))] = \frac{f(x)}{1}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f[xf(1)] = f(x) \overset{(I)}{\Rightarrow} xf(1) = x$$
$$\Rightarrow f(1) = 1$$

Θέτω $x = 1$ οπότε $f(f(y)) = \frac{1}{y}$ $\forall y \in Q_+$

οπότε από εδώ παίρνω αν θέσω όπου y το $f(y) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}$ για όλα τα $y \in Q_+$

Τέλος θέτω $y = f\left(\frac{1}{t}\right)$ κι έχω $f(xt) = f(x)f(t)$ για όλα τα $x, t \in Q_+$

Εύκολα βλέπω ότι οποιαδήποτε f που ικανοποιεί

i) $f(xt) = f(x)f(t)$

ii) $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ για όλα τα $x, t \in Q_+$

ικανοποιεί και τη δοσμένη εξίσωση

Μια συνάρτηση $f: Q_+ \to Q_+$ που να ικανοποιεί την i) μπορεί να κατασκευαστεί αν ορίσω αυθαίρετα για τους πρώτους αριθμούς και επεκτείνω ως:

$$f(\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k}) = (f(\rho_1))^{n_1} (f(\rho_2))^{n_2} \dots (f(\rho_k))^{n_k}$$

όπου ο ρ_j είναι ο j-ιοστός πρώτος αριθμός και $n_j \in Z$. Μια τέτοια συνάρτηση θα ικανοποιεί την ii) αν και μόνο αν ικανοποιεί την ii) για κάθε πρώτο αριθμό.

Μια πιθανή κατασκευή είναι ως εξής:

$$f(P_j) = \begin{cases} P_{j+1}, & \text{αν j περιττός} \\ \frac{1}{P_{j-1}}, & \text{αν j άρτιος} \end{cases}$$

Επεκτείνοντάς την όπως παραπάνω, παίρνουμε μια συνάρτηση $f: Q_+ \to Q_+$. Προφανής $f(f(\rho)) = \frac{1}{\rho}$, για κάθε πρώτο ρ, άρα η f ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση.

5) Ορίζω με W το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών n_0, έτσι ώστε αρχίζοντας με n_0, ο παίκτης Α καταφέρνει να κερδίσει το παιχνίδι. Έχω τα εξής:

1. Λήμμα: Έστω:
$\{m, m+1, \dots, 1990\} \subset W$, $S \leq 1990$ και

$\frac{S}{\rho^r} \geq m$, όπου ρ^r ο μεγαλύτερος παράγοντας του S έτσι ώστε ο ρ είναι ο πρώτος και $r \in N$.

Τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί n_0 με
$\sqrt{S} \leq n_0 < m$ βρίσκονται στο W.

Απόδειξη:

Αρχίζοντας με n_0 ο παίκτης Α μπορεί να πάρει $n_1 = S$. Τότε ο Β πρέπει να διαλέξει ένα φυσικό n_2 ώστε:

$$m \leq \frac{S}{\rho^r} \leq n_2 < S \leq 1990$$

Επειδή $n_2 \in W$, ο Α μπορεί να κερδίσει το παιχνίδι μετά και το λήμμα αποδείχτηκε.

Επειδή $45^2 = 2025 > 1990$, προφανώς όλοι οι n_0 με $45 \leq n_0 \leq 1990$ βρίσκονται στο W.

Αφού $m = 45$ και $S = 420 = 2^2x3x5x7$ ικανοποιούν την υπόθεση του λήμματος και αφού
$\sqrt{420} < 21 \leq 45$,
συνεπάγεται ότι $\{21, 22, \dots, 44\} \subset W$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα για
$m = 21$ και $S = 168 = 2^3x3x7$, βλέπω ότι
$\{13, 14, \dots, 20\} \subset W$.

Για $m = 13$ και $S = 105 = 3x5x7$, από το λήμμα έχω $\{11, 12\} \subset W$.

Θέτοντας $m = 11$ και $S = 60 = 2^2x3x5$ δείχνεται ότι: $\{8, 9, 10\} \subset W$

Απέδειξα ότι $\{8, 9, 10\} \subset W$

Για $n_0 > 1990$, ο παίκτης Α μπορεί να διαλέξει ένα φυσικό αριθμό r ώστε

$2^r x3^2 < n_0 \leq 2^{r+1} x3^2 < n_0^2$ και μετά να πάρει
$n_1 = 2^{r+1}x3^2$

Τώρα, όποια και νάναι η εκλογή του παίκτη Β, θα είναι $8 \leq n_2 < n_0$

Μετά από πεπερασμένα βήματα θα 'ναι
$8 \leq n_{2k} \leq 1990$ και ο Α θα κερδίσει

Άρα για $n_0 \geq 8$ ο Α μπορεί να κερδίσει.

Τώρα ας εξετάσουμε την περίπτωση $n_0 \leq 5$. Επειδή το μικρότερο γινόμενο τριών διαφορετικών πρώτων αριθμών είναι:

$2x3x5x = 30 > 5^2$, ο Α πρέπει να πάρει τον
$n_1 = \rho^r x q^s$

όπου ρ πρώτος, q πρώτος ή 1, $\rho^r > q^s$ και $r, s \geq 1$

Τότε ο Β μπορεί να διαλέξει τον

$$n_2 = q^s = \frac{n_1}{\rho^r} < \sqrt{n_1} \leq n_0$$

Μετά από πεπερασμένα βήματα ο Β θα πάρει το $n_{2k} = 1$ και θα κερδίσει.

Για $n_0 = 6$ ή $n_0 = 7$ ο Α πρέπει να διαλέξει $n_1 = 30 = 2x3x5$ ή $n_1 = 42 = 3x3x7$ και τότε ο Β να διαλέξει $n_2 = 6$. Επειτα ο Α και ο Β πρέπει να διαλέξουν τους:

30, 6, 30, 6, 30, 6,...

εναλλάξ, ώστε να αποφύγουν την ήττα.

Κι έτσι το παιχνίδι συνεχίζεται επ' άπειρον, χωρίς να υπάρχει για κάποιον τακτική νίκης.

6) Ας υποθέσουμε ότι το 1990-γωνο $A_0A_1A_2 \dots A_{1989}$ έχει τις ιδιότητες (i) και (ii). Εκ-

φράζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{A_rA_{r+1}}$ σαν μιγαδικό αριθμό:

$$z = n_r e^{ira}$$

$$\text{όπου } a = \frac{2\pi}{1990},\ r \in \{0, 1, ..., 1989\}$$

και το A_{1990} σημαίνει A_0.

Τότε η $n_0, n_1, ..., n_{1989}$ θα έπρεπε να είναι μια μετάθεση των αριθμών $1^2, 2^2, ..., 1990^2$.

Το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: βρείτε μια μετάθεση $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ των αριθμών $1^2, 2^2, ..., 1990^2$, τέτοια ώστε

$$\sum_{r=0}^{1989} n_r e^{ira} = 0.$$

Για ευκολία, ονομάζουμε τα n_r «βάρη». Υποθέτουμε ότι ένας μοναδιαίος δίσκος που βρίσκεται σε οριζόντια θέση στηρίζεται από μια αιχμή στο κέντρο 0.

Το πρόβλημα είναι: πως μπορούμε να τοποθετήσουμε τα βάρη $1^2, 2^2, ..., 1990^2$ στην περιφέρεια του δίσκου στα σημεία που τη χωρίζουν σε ίσα τόξα, ώστε να πάρουμε ένα σύστημα που να ισορροπεί;

Στην αρχή, χωρίζουμε τα 1990 βάρη σε 995 ζευγάρια

$$(1^2, 2^2), (3^2, 4^2), ..., (1989^2, 1990^2),$$

και τοποθετούμε κάθε ζευγάρι σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. Το πρόβλημα ανάγεται τώρα σε ένα απλούστερο: πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε 995 βάρη

$$2^2 - 1^2 = 3,\ 4^2 - 3^2 = 7,\ 6^2 - 5^2 = 11,$$
$$..., 1990^2 - 1989^2 = 3979$$

στα σημεία που χωρίζουν τη μοναδιαία περιφέρεια σε 995 ίσα τόξα ώστε να πάρουμε ένα σύστημα που να ισορροπεί; Παρατηρώντας ότι

$$995 = 5 \times 199,$$

χωρίζουμε τα 995 βάρη σε 199 ομάδες

$$(^*)\begin{cases} (3, 7, 11, 15, 19),\ (23, 27, 31, 35, 39) \\ \ldots\ldots,\ (3963, 3967, 3971, 3975, 3979) \end{cases}$$

Εστω $\theta = \frac{2\pi}{199}$, $\gamma = \frac{2\pi}{5}$. Ονομάζουμε F_1 το πεντάγωνο με κορυφές $1, e^{i\gamma}, e^{2i\gamma}, e^{3i\gamma}, e^{4i\gamma}$, και $F_{\kappa+1}$ το πεντάγωνο $e^{i\kappa\theta} F_1$. Τοποθετώντας τα πέντε βάρη της $(\kappa+1)$-ής ομάδα του $(^*)$ στις κορυφές του πενταγώνου $F_{\kappa+1}$, παίρνουμε την $(\kappa+1)$-ή ομάδα μιγαδικών αριθμών:

$$(2\kappa+3)e^{i\kappa\theta},\ (2\kappa+7)e^{i(\kappa\theta+\gamma)},\ (2\kappa+11)e^{i(\kappa\theta+2\gamma)},$$
$$(2\kappa+15)e^{i(\kappa\theta+3\gamma)},\ (2\kappa+19)e^{i(k\theta+4\gamma)},$$

όπου $\kappa = 0, 1, 2, ..., 198$. Παρατηρώντας ότι

$$1 + e^{i\gamma} + e^{2i\gamma} + e^{3i\gamma} + e^{4i\gamma} = 0$$

μπορούμε να γράψουμε το άθροισμα των μιγαδικών αριθμών της $(\kappa+1)$-ής ομάδας σαν $n\ e^{i\kappa\theta}$, όπου η $n = 3 + 7e^{i\gamma} + 11e^{2i\gamma} + 15e^{3i\gamma} + 19e^{4i\gamma}$.

Το συνολικό άθροισμα όλων των 199 ομάδων μιγαδικών αριθμών είναι:

$$n(1 + e^{i\theta} + ... + e^{198i\theta}) = 0$$

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει οπωσδήποτε ένα 1990-γωνο με τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Τέλος, δείξαμε ότι η λύση μπορεί να απλοποιηθεί, με όμορφο τρόπο, ως εξής:

$$0 = \sum_{k=0}^{198} \sum_{\ell=0}^{4} (20k + 4\ell + 3) e^{i(k\theta + \ell\gamma)}$$

$$= \sum_{k=0}^{198} \sum_{\ell=0}^{4} [(10k + 2\ell + 2)^2 - (10k + 2\ell + 1)^2] \cdot e^{i(k\theta + \ell\gamma)}$$

$$= \sum_{k=0}^{198} \sum_{\ell=0}^{4} \sum_{m=1}^{2} (10k + 2\ell + m)^2 e^{i(k\theta + \ell\gamma + m\pi)}$$

Όταν το k παίρνει τις τιμές 0, 1, ..., 198 το ℓ τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4 και το m τιμές 1, 2, η έκφραση $10k + 2\ell + m$ παίρνει τις τιμές 1, 2, ..., 1990, την καθεμία από αυτές ακριβώς μια φορά, και η έκφραση

$$e^{i(k\theta + \ell\gamma + m\pi)} = e^{i\frac{10k + 398\ell + 995m}{1990}2\pi}$$

παίρνει τις τιμές $1, e^{ia}, ..., e^{1989ia}$, την κάθε μία από μια φορά.

ΣΧΟΛΙΟ:

Στο τέλος δείχνουμε ότι το παραπάνω κατασκευασμένο 1990-γωνο είναι κυρτό. Αυτό που πρόκειται να κάνουμε είναι να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε πλευρά του πολυγώνου όλες οι άλλες κορυφές βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ευθείας που περνάει από την πλευρά.

Αν μας δοθεί μια τυχαία πλευρά του 1990-γωνου, ονομάζουμε αυτή $A_0A_1 \ldots A_{1989}$. Επειδή:

$$\mathrm{Im}\,(A_k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} n_m \mathrm{Im}(e^{ima}) \geq n_1 \eta\mu \frac{2\pi}{1990}, & 2 \leq \kappa \leq 995 \\ \displaystyle -\sum_{m=k}^{1989} n_m \mathrm{Im}(e^{ima}) \geq n_{1989} \eta\mu \frac{2\pi}{1990} >, & 996 \leq k \leq 1989 \end{cases}$$

Όλα τα A_k $(k = 2, 3, \ldots, 1989)$ βρίσκονται στο ένα μέρος της A_0A_1.

ΜΙΑ ΞΕΧΩΡΙΣΤΗ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΣΗ

Ο περυσινός Β' Ολυμπιονίκης της 30ης I.M.O. Χρήστος Αθανασιάδης που φοιτά με υποτροφία στο M.I.T. πήρε μέρος στον περίφημο διαγωνισμό

Putnam για φοιτητές των Η.Π.Α.

Στο διαγωνισμό αυτό ο Χρήστος πήρε την **μέγιστη βαθμολογία και την πρώτη θέση,** αν και ήταν μόλις πρωτοετής φοιτητής.

Είναι χαρακτηριστικό, ότι ο Χρήστος Αθανασιάδης είχε καλύτερη επίδοση από όλους τους Α΄ Ολυμπιονίκες των Η.Π.Α. που ήραν μέρος στο διαγωνισμό, αποδεικνύοντας έτσι, ότι ένας Ελληνας Β΄ Ολυμπιονίκης αξίζει ίσως περισσότερο από Α΄ Ολυμπιονίκες άλλων χωρών.

Η ΕΜΕ, στους διαγωνισμούς της οποίας διέπρεψε ο Χρήστος, αισθάνεται περήφανη για το γεγονός αυτό και εύχεται στο νεαρό Αθανασιάδη κάθε πρόοδο στις σπουδές του, για το καλό το δικό του και της πατρίδας μας.

Συγχαίρει ακόμα τους γονείς του —που είναι και εκλεκτοί συνάδελφοι— για τις διεθνείς επιτυχίες του γιού τους.

Η XXIV ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Δ. Γ. Κοντογιάννης

Όπως είναι γνωστό, στη Σοβιετική Ένωση γίνονται πολλές Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Η σπουδαιότερη όμως από αυτές είναι η Πανενωσιακή. Σ' αυτήν παίρνουν μέρος ομάδες από όλες τις Δημοκρατίες της ΕΣΣΔ. Οι νικητές της Ολυμπιάδας αυτής συνήθως αποτελούν και την ομάδα που αντιπροσωπεύει την ΕΣΣΔ στις διεθνείς Μ.Ο.

Τα θέματα των Πανενωσιακών Ολυμπιάδων όπως θα διαπιστώσει ο αναγνώστης είναι υψηλού επιπέδου. Ο διαγωνισμός γίνεται σε δύο φάσεις (ημέρες). Κάθε μέρα οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να λύσουν 4 θέματα σε χρονικό διάστημα 4 ωρών. Κάθε χρόνο ο διαγωνισμός αυτός γίνεται και σε διαφορετική Δημοκρατία. Ο XXIV έγινε από 18 ως 22 Απριλίου 1990 στην πρωτεύουσα Ασχαμπάντ του Σοβιετικού Τουρκμενιστάν.

Ο υπογράφων είχε την τύχη να λάβει ενεργό μέρος στην XXIV Πανενωσιακή Μ.Ο. προσκεκλημένος για το σκοπό αυτό, από την Ακαδημία παιδαγωγικών επιστημών της ΕΣΣΔ. Προσκεκλημένοι ήταν ακόμα ο Βούλγαρος καθ. Ιβάν Τόνωφ, ο Ισπανός καθ. Αντώνιο Μουκλούς Εστέγια και ο καθηγητής του πανεπιστημίου του Κάνσας εκλεκτός συνάδελφος Αλκης Ακρίτας.

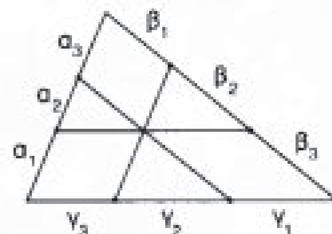
Το Ασχαμπάντ είναι μια μικρή πόλη 20 περίπου χιλιόμετρα από την Περσία. Οι κάτοικοί του είναι στην συντριπτική τους πλειοψηφία μουσουλμάνοι, αλλά πιστεύουν ότι είναι απόγονοι του Μεγάλου Αλεξάνδρου, του Ισκεντέρ όπως τον ονομάζουν.

Στο διαγωνισμό όπως αναφέραμε παίρνουν μέρος μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων της μέσης εκπαίδευσης.

Τα θέματα που δόθηκαν στην 9η τάξη τη δεύτερη μέρα ήταν τα παρακάτω:

1) Από σημείο στο εσωτερικό ενός τριγώνου, φέρνουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές του που χωρίζουν την περίμετρό του σε τμήματα όπως δείχνει το Σχ. 1.

να δείξτε ότι $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2 = \alpha_3\beta_3\gamma_3$.



2) Δύο φίλοι παίζουν το παρακάτω παιχνίδια. Γράφουν στον πίνακα την εξίσωση $*x^2 + *x + * = 0$. Αυτός που παίζει πρώτος, πρέπει να αντικαταστήσει τους αστερίσκους με τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς. Το ίδιο κάνει και ο δεύτερος. Θα κερδίσει αυτούς, που η εξίσωση που θα σχηματίσει θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας απλός τρόπος επιλογής των συντελεστών, ώστε ο παίκτης να κερδίζει πάντα.

3) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|\ldots||x_1 - x_2| - x_3| - \ldots - x_{1990}|$, όπου $x_1, x_2, \ldots, x_{1990}$ διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί μεταξύ του 1 και του 1990.

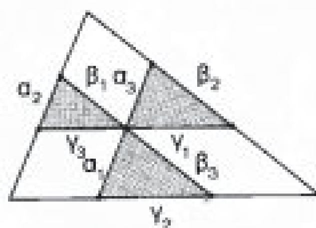
4) Ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά ν χωρίζεται σε ν^2 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 1. Από τις πλευρές των λαμβανομένων τριγώνων δημιουργούμε ανοικτή πολυγωνική γραμμή, που περνά από όλες τις κορυφές των τριγώνων της διαίρεσης μόνο από μία φορά.

Να δείξετε, ότι υπάρχουν τουλάχιστο ν ζεύγη διαδοχικών πλευρών της πολυγωνικής γραμμής που σχηματίζουν οξεία γωνία.

Απαντήσεις - Υποδείξεις

Για να διευκολύνουμε τους φίλους αναγνώστες στη λύση των θεμάτων δίνουμε τις παρακάτω υποδείξεις:

1) Τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα είναι όμοια.

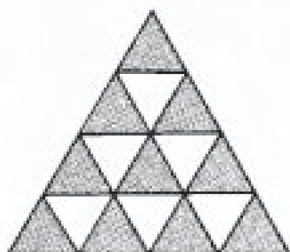


Από την ομοιότητα προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις.

2) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ οι συντελεστές (α_1 του δευτεροβάθμιου και α_3 του σταθερού όρου) και τους επιλέξουμε έτσι ώστε $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (π.χ. $1, 2, -3$), τότε η εξίσωσηέχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Μία ρίζα είναι $x_1 = 1$.

3) Επειδή αν $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ είναι $|\alpha - \beta| \leq \max(\alpha, \beta)$, μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι το ζητούμενο μέγιστο είναι 1989.

4) Το πλήθος των κορυφών των τριγώνων διαίρεσης είναι $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ και οι πλευρές της γραμμής $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} - 1 = \frac{\nu^2+3\nu}{2}$ ενώ τα «μαύρα τρίγωνα» $\frac{\nu^2+\nu}{2}$



Παρατηρούμε $\frac{\nu^2+3\nu}{2} - \frac{\nu^2+\nu}{2} = \nu$ κ.λ.π.



ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΑΓΑΠΟΥΝ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

'Οπως κάθε χρόνο έτσι και φέτος η Ε.Μ.Ε. διοργανώνει ΔΩΡΕΑΝ μαθήματα για τους μαθητές ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, ΛΥΚΕΙΟΥ που ενδιαφέρονται να διευρύνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, πέρα και πάνω από τη σχολική ύλη.

Τα μαθήματα γίνονται κάθε Σάββατο 11π.μ. - 5μ.μ. στην αίθουσα διαλέξεων της ΕΜΕ, Πανεπιστημίου 34 Α, 1ος όροφος.

Πληροφορίες καθημ. στα τηλ. 3617784 - 3616532

Ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΜΕ

Επιμέλεια: Επιτροπή Διαγωνιστών ΕΜΕ

Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Ι. Τυρλής, Ε. Ντζιαχρήστος, Γ. Ωραιόπουλος

Ο φετεινός διαγωνισμός ήταν η 50η διοργάνωση και στέφθηκε με απόλυτη επιτυχία, από την άποψη της συμμετοχής μαθητών.

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι μαθητές που συμμετείχαν, σύμφωνα με τα στοιχεία των νομαρχιακών επιτροπών, ξεπερνούν τις 25.000 κατά τους μετριότερους υπολογισμούς.

Δυστυχώς η κατακόρυφη άνοδος του αριθμού των μαθητών δημιούργησε προβλήματα στην εξεύρεση ικανού αριθμού επιτηρητών - διορθωτών, που όμως στα περισσότερα εξεταστικά κέντρα ξεπεράστηκαν χάρη στην εθελοντική προσφορά των συναδέλφων της Μ.Ε.

Οπως κάθε χρόνο εδώ και αρκετό καιρό ο Πανελλήνιος διαγωνισμός της ΕΜΕ εκφράζει «την άλλη άποψη» σχετικά με το ποιά θα πρέπει να είναι η θεματολογία των διαγωνισμών, ώστε οι νικητές να είναι άνθρωποι με σωστή κρίση και όχι απομνημονευτές κειμένων, όπως δυστυχώς συμβαίνει με τους νικητές άλλων διαγωνισμών.

Αν ανατρέξουμε στα αρχεία του διαγωνισμού, θα δούμε ανάμεσα στους νικητές, άτομα που σήμερα παίζουν καθοριστικό ρόλο στη ζωή του τόπου.

Πιστεύουμε λοιπόν, ότι η Πολιτεία θα πρέπει να βοηθήσει ουσιαστικά τον ιστορικό αυτό διαγωνισμό, που προσφέρει τόσα πολλά στην ελληνική κοινωνία.

Η ΕΜΕ από τη θέση αυτή θέλει να εκφράσει τις θερμές της ευχαριστίες σε όλους τους συναδέλφους που βοήθησαν στην επιτυχία του διαγωνισμού.

Θέματα Γ' Γυμνασίου

1. Να γραφεί κύκλος που περνά από τα μέσα των τριών πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι, το τόξο του κύκλου το εξωτερικό της υποτείνουσας, ισούται με τη διαφορά των εξωτερικών τόξων του κύκλου στις δύο κάθετες πλευρές του τριγώνου.

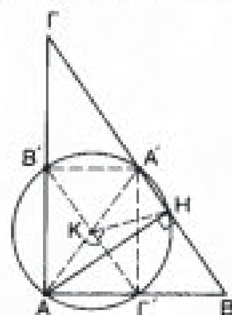
2. Να αναλυθεί σε γινόμενο η παράσταση $\alpha^7 - \alpha$. Αν ο α είναι φυσικός αριθμός, η παράσταση αυτή είναι πάντοτε διαιρετή με το 42.

3. Υπάρχουν άνθρωποι πάνω στη Γη που έχουν γεννηθεί την ίδια χρονολογία, ημερομηνία, ώρα και λεπτό; Η απάντηση να δικαιολογηθεί και να εξεταστεί εξεταστεί αν ισχύει για τους κατοίκους της Ελλάδας (10.000.000).

4. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα:
$A = x^4 - x^2 + 16$ και $B = x^4 - 7x^2 + 10$

Λύσεις θεμάτων Γ' Γυμνασίου

1. Ο κύκλος που περνά από τα μέσα Α',Β',Γ' θα περνά και από την κορυφή Α. Το κέντρο Κ είναι μέσο της ΑΑ' και της Β'Γ' // ΒΓ.



Για να δείξουμε $\overset{\frown}{A'H} = \overset{\frown}{AB'} - \overset{\frown}{A\Gamma'}$ αρκεί να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $A'\hat{K}H = A\hat{K}B' - AK\Gamma'$.

Το ΑΚΗ ισοσκελές η $K\Gamma' \perp AH \perp B\Gamma$ άρα ΚΓ' διχοτόμος $A\hat{K}H$ ή $AK\Gamma' = \Gamma'KH$ ή $A\hat{K}B' = A'\hat{K}\Gamma'$ κατά κορυφή $A'\hat{K}H = A\hat{K}\Gamma' - \Gamma'\hat{K}H = A\hat{K}B' - A\hat{K}\Gamma'$.

2. $\alpha^7 - \alpha = \alpha(\alpha^6 - 1) = \alpha(\alpha^3 - 1)(\alpha^3 + 1) =$
$\alpha\cdot(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)\cdot(\alpha 21)\cdot(\alpha^2 - \alpha + 1)$.
Το γινόμενο των 3 διαδοχικών φυσικών $(\alpha - 1)\cdot\alpha\cdot(\alpha + 1)$ είναι διαιρετό με το 2 και με το 3 άρα και με το 6. Για να είναι η $\alpha^7 - \alpha$ διαιρετή με το 42 πρέπει να είναι διαιρετή και με το 7. Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να πάρει τη μορφή 7λ, $7\lambda \pm 1$, $7\lambda \pm 2$, $7\lambda \pm 3$ όπου $\lambda \in N$.
Αν $\alpha = 7\lambda$ διαιρετό με 7, αν $\alpha = 7\lambda + 1$ και $\alpha - 1 = 7\lambda$ δ. με 7, αν $\alpha = 7\lambda - 1$ $\alpha 21 = 7\lambda$ δ. με 7. Αν $\alpha = 7\lambda + 2$ ο παράγων $\alpha^2 + \alpha + 1 = (7\lambda + 2)^2 + 7\lambda + 2 + 1 = 49\lambda^2 + 28\lambda + 4 + 7\lambda + 2 + 1 = 49\lambda^2 + 5\lambda + 7 =$ δ. με 7. Όμοια αν $\alpha = 7\lambda - 2$ ο παράγων $\alpha^2 - \alpha + 1$ δ. με 7. Με τον ίδιο τρόπο αν $\alpha = 7\lambda \pm 3$ οι παράγοντες $(\alpha^2 + \alpha + 1)$,

$(a^2 - a + 1)$, είναι αντίστοιχα διαιρετοί με 7.

3. Οι κάτοικοι της Γης είναι περίπου 5 δισεκατομ. Η ζωή του ανθρώπου είναι το πολύ 100 - 120 χρόνια. Στα 100 χρόνια υπάρχουν $100 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60$ λεπτά $= 52.560.000$ λ. < 5 δισ. Άρα υπάρχουν πολλοί άνθρωποι που γεννήθηκαν στο ίδιο λεπτό της ίδιας ημερομηνίας και χρονολογίας. Για τους κατοίκους της Ελλάδας η απάντηση δεν είναι σίγουρη επειδή $52.560.000 > 10.000.000$.

4. $A = x^2 - x^2 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 9x^2 =$
$= (x^2+4)^2 - (3x)^2 = (x^2+4+3x)(x^2+4-3x)$
$B = x^4 - 7x^2 + 10 = (x^2-2)\cdot(x^2-5) =$
$= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

Θέματα Α΄ Λυκείου

1. Έστω α, β, γ τρεις θετικοί αριθμοί.
Ο α είναι κ% του β + γ.
Ο β είναι λ% του γ + α, όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί.
Πόσο τοις % του α + β είναι α;

2. Αν $x > 0$, τότε να δείξετε ότι

$$\frac{x^2+3x+3}{x+1} + \frac{1}{x} > 4.$$

3. Σε μια τάξη υπάρχουν 10 μαθητές που έχουν διαφορετικό ύψος. Ένας από αυτούς, που θα τον ονομάσουμε Α έχει ύψος ίσο με τον μέσο όρο του ύψους των έξι (6) πιό κοντών, ενώ ένας άλλος που θα τον ονομάσουμε Β έχει ύψος ίσο με τον μέσο όρο του ύψους και των 10 μαθητών. Ποιός είναι ο πιό κοντός, ο Α ή ο Β;
(Μέσο όρο ν αριθμών ονομάζουμε το πηλίκο του αθροίσματος των αριθμών δια του ν).



4. Στο διπλανό σχήμα β, υπάρχουν 4 τμήματα που καθένα τέμνει 3 ακριβώς τμήματα. Μπορούμε να τοποθετήσουμε στο επίπεδο 9 τμήματα, ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 τμήματα από τα δοσμένα;



Λύσεις θεμάτων Α΄ Λυκείου

1) Είναι $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\kappa}{100} = \kappa_1$ (1), $\frac{\beta}{\gamma+\alpha} = \frac{\lambda}{100} = \lambda_1$ (2)

Έστω $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\mu}{100} = \mu_1$. Τότε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{1}{\mu_1}$ ή

$$1 + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\mu_1} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\kappa_1} \qquad (4)$$

$$\frac{\gamma+\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\lambda_1} \qquad (5)$$

Θέτουμε $\frac{\beta}{\alpha} = x$, $\frac{\gamma}{\alpha} = y$, οπότε $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{y}{x}$ και οι (4), (5) γράφονται

$$x + y = \frac{1}{\kappa_1} \qquad x + y = \frac{1}{\kappa_1} \qquad x + y = \frac{1}{\kappa_1}$$

ή ή

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda_1} \qquad y + 1 = \frac{x}{\lambda_1} \qquad y = \frac{x}{\lambda_1} - 1$$

οπότε $x = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda_1(\kappa_1+1)}{\kappa_1(\lambda_1+1)}$ και η (3) δίνει

$$\mu_1 = \frac{\mu}{100} = \frac{\kappa_1(\lambda_1+1)}{\kappa_1(\lambda_1+1) + \lambda_1(\kappa_1+1)} \text{ κ.λπ.}$$

Παρατήρηση:

Αρχικά η επιτροπή θεμάτων του διαγωνισμού είχε η ροτείνει την άσκηση με το ερώτημα: Πόσο τοις % του α + β είναι ο γ; Στην περίπτωση αυτή η λύσει έχει ως εξής:
Αφού ο α είναι κ% του β + γ και ο β είναι λ% του γ + α θα έχουμε: $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\kappa}{100}$, $\frac{\beta}{\gamma+\alpha} = \frac{\lambda}{100}$ και μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{10000 - \kappa\lambda}{2\kappa\lambda + 100\,(\kappa+\lambda)} \cdot 100\%.$$

2. Είναι $\frac{x^2+3x+3}{x+1} + \frac{1}{x} > \frac{x^2+3x+2}{x+1} + \frac{1}{x} =$

$$= x + 2 + \frac{1}{x} = 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 4.$$

3. Έστω $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{10}$ τα ύψη των μαθητών. Θα δείξουμε ότι:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_6}{6} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} = B.$$

ή $3(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) \le$
$\le 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$. Αλλά
$3(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) \le$
$\le 2\ (x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) \le$
$2\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$.

4. α) 20

β) Οχι, αφού αν μπορούσαμε, ο αιρθμός των σημείων τομής θα ήταν $\frac{3 \cdot \alpha}{2}$. Αλλά αυτός δεν είναι ακέραιος.

Θέματα Β΄ Λυκείου

1. Ευθεία ε τέμνει τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ στα σημεία Δ, αντίστοιχα και την προέκταση της ΒΓ στο Ζ.

Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \kappa$, $\frac{\Gamma E}{EA} = \lambda$

να υπολογίσετε το λόγο $\frac{Z\Gamma}{ZB}$

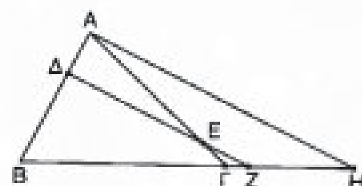
2. Έστω f μία συνάρτηση με τύπο
$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$
Να βρείς το μέγιστο πεδίο ορισμού της f και τα διαστήματα στα οποία η f είναι σταθερή.

3. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + 4x^3 - 8x = \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα που το αριστερό του άκρο το έχουμε συμβολίσει με 0 και το δεξιό του με 1 (Σχ. 1).
Χωρίζουμε με σημεία το τμήμα από σε μικρότερα τμήματα και συμβολίζουμε με τυχαίο τρόπο με τους αριθμούς 0, 1 καθένα από τα μικρά τμήματα που τα άκρα του έχουν αριθμούς 0, 1 τα ονομάζουμε «καλά», ενώ όσα έχουν αριθμούς 0, 0 είτε 1, 1 «κακά».
Να δείξετε ότι όπως και να τοποθετήσουμε τους αριθμούς 0, 1 στα άκρα των μικρών τμημάτων, το πλήθος των καλών τμημάτων είναι περιττό. (Στη μνήμη του μεγάλου γερμανοαμερικανού μαθηματικού E. Sperner (1905 - 1980) για τη συμπλήρωση 10 χρόνων από το θάνατο του).

Απαντήσεις Β΄ Λυκείου

1. Φέρουμε ΑΗ // ΔΕ και από το θ. Θαλή βρίσκουμε



με $\frac{Z\Gamma}{ZB} = \kappa\lambda$

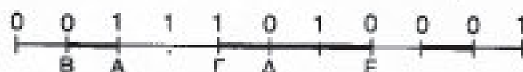
2. Πρέπει $x \ge 1$. Αν θέσουμε $y = \sqrt{x-1} \ge 0$, τότε $x = y^2 + 1$ η f(x) γράφεται
$f(y) = y + \sqrt{y^2 + 25 - 10y} = y + |y - 5| =$
$= \begin{cases} 2y - 5 & \text{αν } y > 5 \\ 5 & \text{αν } 0 \le y \le 5 \end{cases}$

Αρα η f(y) είναι σταθερή στο διάστημα [0, 5]. Τότε $0 \le \sqrt{x-1} \le 5$ ή f(x) είναι σταθερή στο [0, 26].

3. Προσθαφαιρούμε στο α΄ μέλος το $4x^2$, οπότε η εξίσωση γράφεται $(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) = \alpha$ (1). Θέτουμε $x^2 + 2x = y$, οπότε η (1) γράφεται $y^2 - 4y - \alpha = 0$ (2). Για να έχει λύση η (2) θα πρέπει $4 + \alpha \ge 0$ κ.λ.π.

4. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
α) Ολα τα σημεία που διαιρούν το αρχικό τμήμα 0 1 σε μικρότερα τα έχουμε συμβολίσει με 0 (Σχ. α). Τότε προφανώς υπάρχει ένα μόνο «καλό» τμήμα.





β) Υπάρχουν σημεία διαιρέσεως που τα έχουμε συμβολίσει με 1 (Σχ. β). Ας θεωρήσουμε το σημείο που έχουμε συμβολίσει με 1 και βρίσκεται πιό κοντά στην αρχή 0 (στο Σχ. β αυτό είναι το σημείο Α). Επειδή πριν από το σημείο αυτό υπάρχει οποσδήποτε σημείο 0 (π.χ. το Β ή το αριστερό άκρο), ορίζεται ένα «καλό» τμήμα. Αρχίζουμε (από τα αριστερά προς τα δεξιά) να μετρούμε τα «καλά» τμήματα. Παρατηρούμε ότι αν ο αριθμός των «καλών» τμημάτων που μετρήσαμε είναι άρτιος, τότε το τελευταίο «καλό» τμήμα έχει στο δεξί του άκρο το 0 (στο Σχ. β, π.χ. τα σημεία Δ ή Ε) ενώ αν ο αριθμός είναι περιττός το τελευταίο «καλό» τμήμα θα έχει στο δεξί του άκρο το 1. Αλλά αφού το αρχικό τμήμα 01 έχει στο δεξί του άκρο το σημείο 1, ο αριθμός των «καλών» τμημάτων είναι περιττός. (Η άσκηση αυτή είναι μερική περίπτωση μιας πρότασης της Συνδυαστικής Τοπολογίας, που είναι γνωστή σαν «λήμμα Sperner»).

Θέματα Γ' Λυκείου

1. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και σημείο 0 στο εσωτερικό του. Από τυχαίο σημείο Μ θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{M\Gamma}$. Αν $\kappa\cdot\vec{MA}+\lambda\cdot\vec{MB}+\mu\cdot\vec{M\Gamma}=\vec{MO}$, όπου $\kappa+\lambda+\mu=1$, να δείξεις ότι $\kappa>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$.

2. Έστω η ακολουθία a_ν με

$a_1=2$, $a_2=1$, $\frac{2}{a_\nu}=\frac{1}{a_\nu-1}+\frac{1}{a_\nu+1}$, με $\nu\geq$

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$

3. Έστω Α ένας νχν πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, ικανοποιεί τη σχέση $A^2-A+I=0$, όπου Ι και 0 είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός νχν πίνακας αντίστοιχα.

Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ ο πίνακας $B_\lambda=A-\lambda\cdot T$ είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο αντίστροφος του.

4. Έστω a_ν ακολουθία φυσικών αριθμών, με $a_1=2$, $a_\nu+1=(\nu+1)a_\nu+1$, με $\nu=1,2,...$ Στο επίπεδο δίδονται $a_\nu+1$ διαφορετικά σημεία, που αντί 3 δεν είναι συνευθειακά. Τα τμήματα που συνδέουν τα σημεία αυτά τα χρωματίζουμε με ν διαφορετικά χρώματα.

Να δείξετε ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ υπάρχει τρίγωνο με κορυφές τα σημεία αυτά, που οι πλευρές του έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύσεις θεμάτων Γ' Λυκείου

1. Είναι $\kappa+\lambda+\mu=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\kappa\cdot\vec{MA}+\lambda\cdot\vec{MA}+\mu\cdot\vec{MA}=\vec{MA}$ (1)

Ακόμα είναι

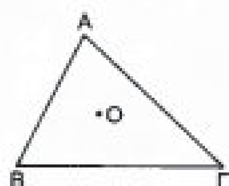
$\Rightarrow\kappa\cdot\vec{MA}+\lambda\,\vec{MB}+\mu\cdot\vec{M\Gamma}=\vec{MO}$ (2)

Από τις (1), (2) παίρνουμε

$\lambda\,(\vec{MB}-\vec{MA})+\mu\,(\vec{M\Gamma}-\vec{MA})=\vec{MO}-\vec{MA}$ ή

$\lambda\,(\vec{AB}+\mu\cdot\vec{A\Gamma}=\vec{AO}$ (3)

Όμως το Ο βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓ (Σχ. 1), άρα θα πρέπει $\lambda>0$, $\mu>0$. Όμοια βρίσκουμε $\kappa>0$, $\lambda>0$.



σχ. 1

2. Έστω $\beta_\nu=\frac{1}{a_\nu}-\frac{1}{a_\nu-1}$ $(\nu\geq2)$.

Τότε

$$\beta_\nu=\frac{1}{a_\nu}-\frac{1}{a_\nu-1}=\frac{1}{a_\nu+1}-\frac{1}{a_\nu}=\beta_{\nu+1}\ (\nu\geq2)$$

Ώστε $\beta_{\nu\geq1}=\beta_\nu=...=\beta_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

και συνεπώς

$$\frac{1}{a_\nu}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{\nu-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{\nu-2}}=...=$$

$$=\frac{\nu-1}{2}+\frac{1}{a_1}=\frac{\nu}{2},\text{ οπότε}$$

$\lim a_\nu=\lim\frac{\nu}{2}=0.$

3) Ισχύει:

$0=A^2-A+I=(A-\lambda I)(A+(\lambda)I)+(\lambda^2-\lambda+1)I.$

Άρα $(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1}(A+(\lambda-1)I),$

επειδή $\lambda^2-\lambda+1\neq0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

4. Για $\nu=1$ έχουμε 3 τμήματα με το ίδιο χρώμα, άρα η πρόταση ισχύει. Έστω ότι ισχύει $\nu=\kappa>1$, δηλ. έστω ότι έχουμε $a_\kappa+1$ σημεία και υπάρχει ένα τρίγωνο μονοχρωματικό. Θα δείξουμε την πρόταση για $\nu=\kappa+1$. Δηλαδή έστω ότι υπάρχουν $a_{\kappa+1}+1$ σημεία και έστω 0 ένα από αυτά. Καθένα από τα σημεία αυτά συνδέεται με καθένα από τα υπόλοιπα $a_{\kappa+1}$ σημαία. Δηλαδή το 0 συνδέεται με $a_{\kappa+1}=(\kappa+1)a_\kappa+1$ σημεία. Αυτά τα τμήματα είναι χρωματισμένα με το πολύ $\kappa+1$ χρώματα. Αρα από αυτά θα υπάρχουν τουλάχιστο $a_\kappa+1$ τμήματα με το ίδιο χρώμα π.χ. μαύρο. Γιατί αν αυτό δε συνέβαινε, δηλ. υπήρχαν το πολύ a_κ τμήματα με το ίδιο χρώμα, τότε το πλήθος των τμημάτων θα ήταν το πολύ $(\kappa+1)a_\kappa$, άτοπο αφού είναι $(\kappa+1)a_\kappa+1$. Αν λοιπόν κάποιο από τα τμήματα που συνδέουν τα υπόλοιπα σημεία $A_1, A_2,..., Aa_\kappa+1$ είναι μαύρο η πρόταση δείχθηκε. Αν αυτό δε συμβαίνει, θα έχουμε $a_\kappa+1$ σημεία και τα τμήματα που ορίζουν θα είναι χρωματισμένα με κ χρώματα το πολύ. Αλλά από την υπόθεση της επαγωγής τότε κ.λ.π.

Η Ε.Μ.Ε. συγχαίρει την παλιά μας Ολυμπινίκη **Αθηνά Ματέκοβιτς**, για την επιτυχία της στην Ιατρική Σχολή του Παν. Αθηνών. Η επιτροπή διαγωνισμών πιστεύει ότι το αναμφισβήτητο μαθηματικό ταλέντο της Αθηνάς, θα βρεί τρόπο να εκφρασθεί και μέσω της Ιατρικής.

Η Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί ακόμα θερμά την Αθηνά που χάρισε στην εταιρεία μας τα ξενόγλωσσα μαθηματικά βιβλία και περιοδικά της, και της εύχεται καλή σταδιοδρομία στις σπουδές της.

Η 5η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα



ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΜΑΙΟΣ 1988

΄Εγινε στη Λευκωσία από 2 έως 8 Μάη η 5η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα. Σ' αυτήν πήραν μέρος η Βουλγαρία, η Γιουγκοσλαβία, η Ελλάδα, η Κύπρος και η Ρουμανία.

Η χώρα μας πήρε μέρος με τους μαθητές: Ιβρισιμτζή Γιάννη (Θεσσαλονίκη), Αθανασιάδη Χρήστο (Θεσσαλονίκη), Μουρούκο Βαγγέλη (Αθήνα), Σταθόπουλο Δημήτρη (Αθήνα), Κοντοκώστα Δημήτρη (Τρίκαλα), Παντέλη Στέφανο (Σέρρες).

Συνοδοί της ελληνικής ομάδας ήταν οι συνάδελφοι: Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Β. Ζώτος, Χ. Αχτσαλωτίδης, Γ. Ωραιόπουλος.

Η αποστολή αναχώρησε από την Αθήνα την 1η Μάη και μετά από λίγες ώρες ταξίδι έφθασε στη Λάρνακα, όπου επιβιβάστηκε σε λεωφορείο και έφθασε στη Λευκωσία. Εκεί η αποστολή κατέλυσε σε ξενοδοχείο της Σχολής Τουριστικών Επαγγελμάτων της Κυπριακής Δημοκρατίας.

Την επομένη το πρωί οι ομάδες επισκέφθηκαν το κέντρο της Λευκωσίας (Λαϊκή γειτονιά, παλιά πόλη, αρχαιολογικό μουσείο, δημοτικό πάρκο). Τόσο οι ξεναγήσεις, όσο και οι περιηγήσεις ήταν πολύ φροντισμένες και η φιλοξενία των συναδέλφων Κυπρίων μαθηματικών άριστη.

Ειδικά αναφέρουμε τους συναδέλφους: Σάββα **Ιωαννίδη,** Σούλα **Μαυρίδη,** Νίκη **Παπαδοπούλου,** Κ. **Πέτρου,** Δ. **Σκοτεινό,** που με κάθε τρόπο μας έκαναν να νιώθουμε σαν το σπίτι μας. Κι αυτό όχι μόνο σε μας τους ΄Ελληνες, αλλά το ίδιο συνέβη και στις άλλες αποστολές.

Εντύπωση μας έκανε η ύπαρξη ειδικών μεταφραστών για κάθε αποστολή.

Την Τρίτη (3/5/88) το πρωί δυο αντιπρόσωποι από κάθε χώρα συνεδρίασαν για την επιλογή των θεμάτων του διαγωνισμού. Οι μαθητές με τους υπόλοιπους συνοδούς επισκέφθηκαν το Γυμνάσιο Πλατύ της Λευκωσίας. Το απόγευμα έγινε στο αμφιθέατρο των Εθνών του ξενοδοχείου «Φιλοξένεια» η τελετή έναρξης από τον πρόεδρο της Κυπριακής Μ.Ε. κ. Π. Μιχαήλ και από το δήμαρχο Αγλατζιάς.

Τα λόγια του κ. Μιχαήλ ήταν πολύ συγκινητικά ιδιαίτερα όταν μίλησε για το πνεύμα των Βαλκανικών Ολυμπιάδων, για τη συναδέλφωση των νέων των βαλκανικών χωρών.

Μετά το πέρας του διαγωνισμού, ακολούθησε στο ίδιο ξενοδοχείο πλούσιο καλλιτεχνικό πρόγραμμα, από το σύλλογο των φοιτητών της Παιδαγωγικής Ακαδημίας Κύπρου.

Την Τετάρτη (4/5/88) οι μαθητές με τους συνοδούς του επισκέφθηκαν περιοχές γύρω από τη Λευκωσία (Νικητάρι, Βουνό Τρόοδος, Κακοπετριά). Θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρουμε το μαγευτικό των τοποθεσιών αυτών και την πλούσια ιστορική και αρχαιολογική ελληνική παράδοση που παρουσίαζαν.

Το ίδιο βράδυ μας εδεξιώθη ο δήμαρχος Αγλατζιάς στο δημαρχείο της πόλης. Εντύπωση προκάλεσαν τοι χορευτικό συγκρότημα του Δήμου καθώς και η περιποίηση που μας έγινε από τα μέλη του δημοτικού συμβουλίου.

Την Πέμπτη (5/5/88) έγινε εκδρομή στη Λεμεσό και επικσεφθήκαμε την Τεχνική Σχολή, το αρχαίο Κούριο όπου μας έγινε λεπτομερής ξενάγηση από τον γυμνασιάρχη κ. Λουλουμπή, ενώ αργότερα επισκεφθήκαμε την Πάφο, όπου οι συνάδελφοι Γ. Παρτσαλίδης και ο διευθυντής Κ. Μιχαηλίδης μας δεξιώθηκαν στη ξενοδοχειακή σχολή της πόλης.

Εντύπωση προκάλεσε σε όλες τις αποστολές ο «μποφές» που έκαναν οι μαθητές της σχολής καθώς και η άψογη εξυπηρέτηση των μαθητών. ΄Οσοι μετείχαν και σε παλιότερους διαγωνισμούς ομολογούν ότι κάτι τέτοιο δεν έχει γίνει ποτέ, ούτε και πρόκειται να ξαναγίνει.

Στη συνέχεια επισκεφθήκαμε τα περίφημα μωσαϊκά στο σπίτι του Διόνυσου και μετά την παραλιακή λεωφόρο που οδηγούσε στην ακτή, που σύμφωνα με την παράδοση αναδύθηκε η θεά Αφροδίτη. Αργότερα δειπνήσαμε σε παραθαλάσσιο κέντρο.

Την Παρασκευή (6/5/88) επισκεφθήκαμε το Μουσείο του αγώνα της Κυπριακής Δημοκρατίας ενάντια στους ΄Αγγλους κατακτητές όπου με μεγάλη συγκίνηση νιώσαμε την αγωνία αυτού του λαού για ελευθερία, ειρήνη και πρόοδο. Η συγκίνησή μας μεγάλωσε όταν επισκεφθήκαμε το Παγκύπριο Γυμνάσιο, όπου οι Δ/ντές (μαθηματικοί) Γ. Χατζηνικολάου και Χ. Χατζηθεοδοσίου μας ξενάγησαν στις τέλειες εγκαταστάσεις του. Αργότερα επισκεφθήκαμε το Υπουργείο Παιδείας, όπου μας δέχθηκε ο Υπουργός Παιδείας της Κύπρου εκλεκτός συνάδελφος κ. Ανδρέας Φιλίππου καθηγητής του Πανεπιστημίου Πάτρας και από τους πλέον σημαντικούς αρωγούς της ΕΜΕ και της μαθηματικής παιδείας της χώρας μας.

Στην προσφώνηση του κ. Υπουργού απάντησε εκ μέ-

ρους και των άλλων αποστολών ο συνάδελφος Θ. Μπόλης.

Στη συνέχεια με τη συνοδεία του κ. Υπουργού επισκεφθήκαμε το προεδρικό μέγαρο, όπου μας υποδέχθηκε ο πρόεδρος της Κυπριακής Δημοκρατίας κ. Βασιλείου και μας ευχήθηκε «το καλωσόρισες» στο νησί.

Αργότερα επισκεφθήκαμε το Λύκειο Παλουριώτισας που βρίσκεται στην ουδέτερη ζώνη του ΟΗΕ κάτω από τα τουρκικά πολυβολεία. Ο διευθυντής του σχολείου κ. Αρτεμίου μας υποδέχτηκε εκ μέρους του σχολείου και ακολούθησε καλλιτεχνικό πρόγραμμα.



Το απόγευμα έγινε τελετή βράβευσης των διαγωνισθέντων, ενώ το βράδυ δόθηκε επίσημη δεξίωση στη μεγάλη αίθουσα του ξενοδοχείου Φιλοξενίας απ' τον Υπουργού Παιδείας κ. Α. Φιλίππου. Συγκινητική μεταξύ των άλλων ήταν η στιγμή των προσφωνήσεων, όπου μεταξύ των άλλων ο συνάδελφος κ. Γ. Ωραιόπουλος μετέφερε τους εγκάρδιους χαιρετισμούς της ΕΜΕ και όλων των συναδέλφων προσφέροντας ένα ειδικό τόμο με άρθρα που κατά καιρούς ο κ. Α. Φιλίππου είχε δημοσιεύσει στα περιοδικά της ΕΜΕ.

Η ελληνική αποστολή αναχώρησε απ' το νησί το πρωί του Σαββάτου (6/5/88) για τη Λάρνακα με συνοδούς τους συναδέλφους κ. Μιχαήλ και Κ. Ιατρίδη και την Σ. Μαυρίδου. Λίγο αργότερα η αποστολή θα αναχωρούσε για την Αθήνα. Οι συγκινήσεις, οι ευχάριστες στιγμές, οι εκπλήξεις, η συναδέλφωση των μαθητών των βαλκανικών χωρών και το πνεύμα αλληλεγγύης ήταν από τα πιο σημαντικά στοιχεία που ενισχύθηκαν σ' αυτή τη διοργάνωση.

ΘΕΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Έστω CH, CL και CM το ύψος, η διχοτόμος και η διάμεσος αντίστοιχα ενός τριγώνου ABC (τα σημεία H, L και M κείνται επί της ευθείας AB). Οι λόγοι των εμβαδών των τριγώνων HMC και LMC προς το εμβαδό του τριγώνου ABC είναι $\frac{1}{4}$ και $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ αντίστοιχα. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ABC.

(Βουλγαρία)

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $P(x, y)$ δυο μεταβλητών που ικανοποιούν τη σχέση

$$P(a, b) \cdot P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc),$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d.

(Γιουγκοσλαβία)

Πρόβλημα 3

Να αποδειχθεί ότι κάθε τετράεδρο $A_1A_2A_3A_4$ μπορεί να περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων με απόσταση $d \leqslant \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{3}}$, όπου

$$\rho = (A_1A_2)^2 + (A_1A_3)^2 + (A_1A_4)^2 + (A_2A_3)^2 + (A_2A_4)^2 + (A_3A_4)^2.$$

(Σημείωση: Το τετράεδρο μπορεί να έχει κοινά σημεία με τα παράλληλα επίπεδα).

(Ελλάδα)

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη διαδοχικών όρων a_n, a_{n+1} της ακολουθίας $a_1, a_2, a_3, \ldots$ που ορίζεται από $a_n = 2^{\nu} + 49$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $a_n = p \cdot q$, $a_{n+1} = r \cdot s$, όπου p, q, r, s είναι πρώτοι αριθμοί, και

$$p < q, \quad r < s, \quad q - p = s - r.$$

(Ρουμανία)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΑΛΚΑΝΙΑΔΑΣ

Η χώρα μας πήρε 1 χρυσό (Χ. Αθανασιάδης), 1 αργυρό (Γ. Ιβρισιμτζής) και 3 χάλκινα (Β. Μουρούκος, Δ. Κοντοκώστας, Δ. Σταθόπουλος). Στη συνολική βαθμολογία κατέλαβε την 4η θέση με 115 μονάδες. (Ρουμανία 207, Βουλγαρία 181, Γιουγκοσλαβία 145, Κύπρος 83).



Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι για πρώτη φορά η χώρα μας πρώτευσε σε μάθημα. Συγκεκριμένα στην πρώτη άσκηση η χώρα μας πήρε τη μέγιστη βαθμολογία (55 μ.) με δεύτερη τη Ρουμανία 53.

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι η ελληνική ομάδα που είχε την καλύτερη επίδοση στην επιπεδομετρία (**πρώτη** στην 1η άσκηση που προτάθηκε από τη Βουλγαρία) **υστερούσε** στη στερεομετρία (3η άσκηση που προτάθηκε από την Ελλάδα), στη **θεωρία αριθμών** (4η άσκηση, Ρουμανία) που είναι ύλη που δεν διδάσκεται στη χώρα μας.

Ακόμα είναι χαρακτηριστικό στην ελληνική άσκηση η χώρα μας πήρε τη μικρότερη βαθμολογία 17 μονάδες. Αυτό και μόνο δείχνει τη νοοτροπία της ελληνικής παρουσίας σ' αυτούς τους διαγωνισμούς και δεν είναι τυχαίο πως όλοι οι ξένοι γνωρίζουν άριστα αυτές μας τις ευαισθησίες περί ολυμπισμού. 'Αλλωστε η ΕΜΕ έχει παράδοση στη δημοκρατική συμμετοχή και παρέμβαση στο κοινωνικό και εκπαιδευτικό χώρο. 'Ενα μελανό σημείο σ' αυτή τη Βαλκανιάδα ήταν το γεγονός ότι δυο μαθητές μιας αποστολής (όχι ελληνικής ή κυπριακής) έγραψαν κατά παράβαση κάθε δεοντολογίας με μολύβι και οι διορθωτές Κύπριοι συνάδελφοι επεσήμαναν το γεγονός ότι μετά την επιστροφή των γραπτών υπήρχαν γραψίματα και σβησίματα με αποτέλεσμα τα γραπτά να εμφανίζουν άριστη απόδοση στις ασκήσεις.



Ξενοδοχείο «Φιλοξένια» της Κύπρου όπου διέμεναν οι αποστολές.

1ος Προπαρασκευαστικού διαγωνισμού της ΕΜΕ (ΦΛΕΒ. '88) — ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1ο θέμα: 'Εστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ οι μαθητές και $M\alpha_1$, $M\alpha_2$, ..., $M\alpha_\nu$ τα σύνολα των γνωστών τους. 'Ενας από τους μαθητές, π.χ. ο α_i έστω ότι έχει το μεγαλύτερο αριθμό γνωστών, π.χ. k, δηλ.

$$|M\alpha_i| = k \quad \text{με} \quad M\alpha_i = \{O\alpha_{i_1}, O\alpha_{i_2}, ..., O\alpha_{i_n}\}.$$

Επειδή οι $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, ..., \alpha_{n_k}$ έχουν κοινό γνωστό τον α_i, τότε:

$|M\alpha_{i_1}| \neq |M\alpha_{i_2}| \neq ... \neq |M\alpha_{i_k}|$. 'Εστω $\left(|M\alpha_{i_k}| = k\right)$

'Αρα ένας από τους $|M\alpha_{i_1}|, |M\alpha_{i_2}|, ..., |M\alpha_{i_{k-1}}|$ θα είναι ίσος με τον 1.

2ο θέμα: Εύκολα βρίσκουμε ότι $\alpha_\nu - 7 = \text{πολ.}\ \alpha_{\nu-5}$.

3ο θέμα: 'Οχι, αφού οι δυνατοί αριθμοί που μπορούν να γίνουν από τα στοιχεία $-1, 0, 1$ είναι 13

$$(-6, -5, ..., 0, ... 5, 6),$$

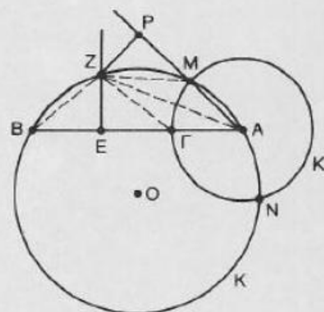
ενώ οι θέσεις (6 γραμμές, 6 στήλες, 2 διαγώνιες) είναι 14.

4ο θέμα: Φέρουμε τη διχοτόμο της $M\hat{A}\Gamma$ (δες σχήμα) που τέμνει το $\widehat{BM}$ σε σημείο Ζ. Προφανώς $\widehat{BZ} = \widehat{ZM}$. Θα δείξουμε ότι αν $ZE \perp B\Gamma$, τότε η ΖΕ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ. Αρκεί να δείξουμε ότι $BZ = Z\Gamma$. Είναι:

$$AE = AP, \quad AM = A\Gamma \Rightarrow E\Gamma = PM.$$

$$\text{'Αρα} \quad Z\Gamma = ZM = BZ.$$

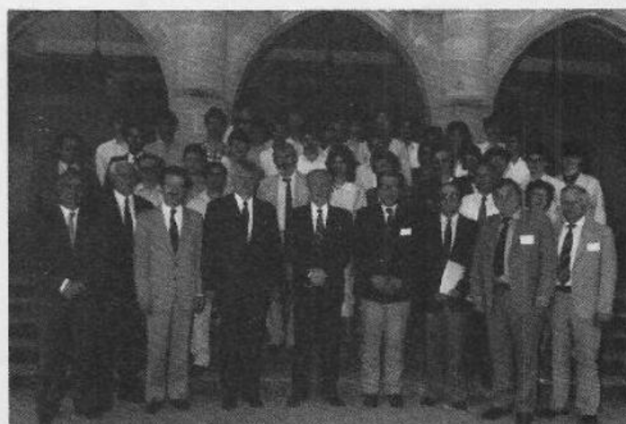
Σχόλια: Οι εκφωνήσεις στο περυσινό τ₄, σχολ. χρονιά '87-88, Ευκλείδη β'.



2ος Προπαρασκευαστικός διαγωνισμός της ΕΜΕ (Μαρτ. '88)

Θέμα 1ο: Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x + y + z = 3, \qquad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$



Λύση: Επειδή $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + y - z)^2 + (z - x)^2\right],$$

θα έχουμε $x = y = z = 1$.

Θέμα 2ο: α) Έστω $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ και

$$\alpha_{\nu+2} = 3\alpha_{\nu+1} + 2\alpha_\nu, \quad \nu \geqslant 0, \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, ούτε ο αριθμός 2, ούτε ο αριθμός 3 δεν διαιρεί τον αριθμό α_ν.

β) Δίνεται μια άπειρη λευκή σκακιέρα (υπάρχουν οι γραμμές που χωρίζουν το επίπεδο σε άπειρα ίσα τετράγωνα). Είναι δυνατόν να χρωματίσουμε μαύρα 13 τετράγωνα έτσι ώστε κάθε ένα από τα μαύρα τετράγωνα να έχει περιττό αριθμό γειτονικών μαύρων τετραγώνων; (Δυο τετράγωνα είναι γειτονικά αν έχουν κοινή πλευρά).

Λύση: α) Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει και ότι π.χ. ο $\alpha_{\nu+2}$ είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας α_ν που διαιρείται με τον 2 (ή τον 3). Από τη σχέση

$$\alpha_{\nu+2} = 3\alpha_{\nu+1} + 2\alpha_\nu$$

όμως θα έχουμε ότι $2/\alpha_{\nu+1}$, άτοπο αφού ο $\alpha_{\nu+2}$ είναι ο μικρότερος όρος της ακολουθίας.

β) Όχι. Πράγματι, έστω $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ τα πλήθη των χρωματισμένων τετραγώνων που έχουν 1, 2, 3, 4 γειτονικά χρωματισμένα τετράγωνα αντίστοιχα. Τότε το πλήθος των κοινών τους πλευρών θα είναι:

$$N = \frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + 4\nu_4) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3) + \nu_2 + \nu_3 + 2\nu_4.$$

Επειδή όμως $\nu \in \mathbb{N}^*$, θα πρέπει ο $\nu_1 + \nu_3$ να είναι άρτιος. Αλλά εδώ $\nu_1 + \nu_3 = 13$.

Θέμα 3ο: Δίνεται κύκλος C και σημείο Μ εκτός αυτού (στο επίπεδο του κύκλου). Φέρουμε μια εφαπτομένη ΜΑ στον κύκλο και μια τέμνουσα ΜΒΓ. Αν Δ είναι το μέσο του τμήματος ΜΑ, Ε το σημείο τομής του κύκλου C με την ΓΔ και Ζ το σημείο τομής του C με την ΜΕ, ν' αποδειχτεί ότι ΑΜ ∥ ΒΖ.

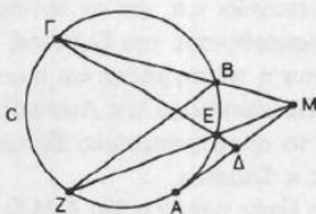
Λύση: Είναι $\Delta A^2 = \Delta M^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma$ ή

$$\frac{\Delta M}{\Delta E} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta M},$$ άρα τα τρίγωνα ΔΜΕ, ΔΓΜ

είναι όμοια, οπότε $\Delta\hat{M}E = \Delta\hat{\Gamma}M$.

Αλλά $\Delta\hat{\Gamma}M = B\hat{Z}E$, άρα $\Delta\hat{M}E = B\hat{Z}E$,

δηλαδή ΑΜ ∥ ΒΖ.



Σχόλια: Τα θέματα και λύσεις του **3ου** Προπαρασκευαστικού διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε. της σχολ. χρονιάς '87-88, θα δοθούν στο επόμενο τεύχος.

Θέμα 4ο: Δίνεται το σύνολο $M = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Είναι γνωστό ότι το πλήθος των υποσυνόλων του Μ είναι 2^{10}.

α) Να βρεθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων ζευγών υποσυνόλων του Μ ξένων μεταξύ των.

β) Να βρεθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων τριάδων ξένων ανά δύο μεταξύ των υποσυνόλων του Μ.

Λύση: α) Έστω Α το πρώτο στοιχείο ενός διατεταγμένου ζεύγους (Α, Β).

Αν $|A| = K$, τότε $|B| = 10 - K$. Το πλήθος των υποσυνόλων του Β θα είναι $P(B) = 2^{10-K}$, ενώ το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών θα είναι:

$$\sum_{K=0}^{10} \binom{10}{K} 2^{10-K} = (2 + 1)^{10} = 3^{10}.$$

β) Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων θα είναι:

$$(3 + 1)^{10} = 4^{10}.$$

Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Αγαπητοί μαθητές.

Η επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ διοργανώνει καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού έτους, **δωρεάν** μαθήματα, για μαθητές που αγαπούν τα μαθηματικά.

Τα μαθήματα γίνονται κάθε Σάββατο στα γραφεία της ΕΜΕ, Πανεπιστημίου 34 και Ιπποκράτους γωνία **(Αθήνα)**.

Για πληροφορίες* ΤΗΛ.: 36.17.784 — 36.16.532

Η Επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ

* Οι μαθητές της υπόλοιπης Ελλάδας θα απευθύνουνται στα κατά τόπους παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. για έντυπο υλικό, ασκήσεις, πληροφορίες, μαθήματα και ότι άλλο σχετικό. Σύντομη αναφορά για μια πρώτη πληροφόρηση θα 'ναι οι μαθηματικοί του κάθε Λυκείου.

29η Διεθνής Ολυμπιάδα

Η 29η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Δ.Μ.Ο.) έγινε φέτος στην Καμπέρα της Αυστραλίας από 9 - 21 Ιουλίου 1988. Από τη χώρα μας λόγω της αναβολής των πανελλαδικών εξετάσεων δεν ήταν δυνατόν να λάβουν μέρος στην αποστολή μαθητές της Γ΄ τάξεως του Λυκείου. Αποτέλεσμα ήταν να έχει η ελληνική μαθητική ομάδα ρεκόρ νεότητος· είχε τον μικρότερο μέσο όρο ηλικίας (16,25 έτη). Παρά το προφανές μειονέκτημα, υπάρχει το πλεονέκτημα ότι οι μαθητές αυτοί, με την εμπειρία που έχουν αποκτήσει, θα μπορούν να έχουν αξιόλογη επίδοση σε επόμενους διεθνείς διαγωνισμούς στα μαθηματικά.

Στην Αυστραλία έλαβαν μέρος 268 μαθητές από 49 χώρες, ενώ 8 άλλες χώρες έστειλαν παρατηρητές — αντιπροσώπους. Σύμφωνα με τους κανονισμούς της 29ης Δ.Μ.Ο. και σύμφωνα με την εγκαθιδρυμένη παράδοση των Δ.Μ.Ο., οι διάφορες χώρες που έλαβαν μέρος στην διοργάνωση έστειλαν στον προκαθορισμένο χρόνο 94 προβλήματα στην Οργανωτική Επιτροπή της Ολυμπιάδας, η οποία επέλεξε 31 απ' αυτά για την θεώρηση από το Διεθνές Συμβούλιο Κριτών που απαρτίζεται από τους αρχηγούς των αποστολών με πρόεδρο από την διοργανώτρια χώρα (Prof. Ren Potts, University of Adelaide). Αν και πάρα πολλές χώρες δεν υπέβαλαν προβλήματα, η Ελλάδα υπέβαλε 4 προβλήματα, δύο εκ των οποίων είχαν επιλεγεί μεταξύ των 31 (GRE 2 που προτάθηκε από τον κ. Τζίτζιφα και GRE 3 που προτάθηκε από τον κ. Δ. Κοντογιάννη. Τελικά, το Διεθνές Συμβούλιο Κριτών επέλεξε έξι προβλήματα ένα εκ των οποίων ήταν το GRE 3 που πήρε αριθμό 5 για τον διαγωνισμό.

Ο Διαγωνισμός έγινε σε δύο στάδια την 15η και την 16η Ιουλίου 1988. Παρά το νεαρό της ηλικίας των μαθητών η ελληνική ομάδα κατετάγη 27η και απέσπασε ένα τρίτο βραβείο (Χρήστος Αθανασιάδης, Β΄ τάξη, 1ο Λύκειο Τούμπας Θεσ/νίκης) και τρείς εύφημες μνείες (Μουρούκος, Οικονόμου, Σταθόπουλος). Σημειωτέον ότι ο μέγιστος μέσος όρος ηλικίας (18,9 έτη) ανήκε στην ομάδα της Νορβηγίας, η οποία κατετάγη 42η.

Δεδομένων των συνθηκών (νεαρό της ηλικίας, έλλειψη εμπειρείας, αντικατάσταση τριών έμπειρων μελών της ομάδας από την Γ΄ τάξη του Λυκείου την τελευταία στιγμή) η ελληνική παρουσία στην 29η Δ.Μ.Ο. κρίνεται αρκετά ικανοποιητική.

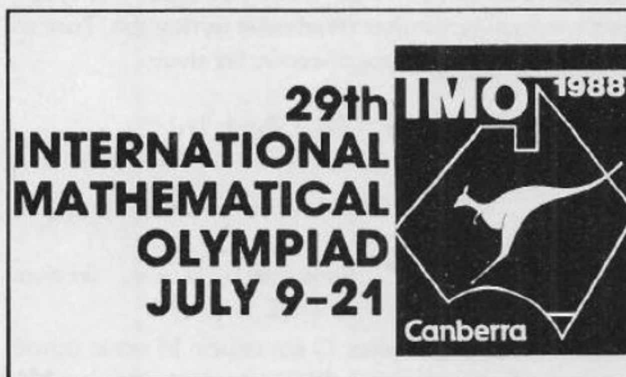
ΑΝΤΑΠΟΚΡΙΣΗ

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία συμμετέχει ως γνωστόν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες από το 1979. Επίσης, με πρωτοβουλία της ίδιας και των αντίστοιχων φορέων της Βουλγαρίας και της Ρουμανίας διοργανώνεται κάθε χρόνο Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα. (Η πρώτη έγινε στην Αθήνα πριν 5 χρόνια).

Οι μαθητές που επιλέγονται από την Ε.Μ.Ε. για να συμμετέχουν στις διεθνείς αυτές διοργάνωσες παίρνουν μέρος σε σειρά 5 διαγωνισμών. Στο τελικο στάδιο εκπαιδεύονται δωρεάν από την Ε.Μ.Ε. για να μπορούν να συμμετέχουν με αξιώσεις σ' αυτούς τους διαγωνισμούς (διότι το επίπεδο γνώσεων που απαιτείται είναι κατά πολύ υψηλότερο απ' αυτό που παρέχεται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.)

Κατόπιν της σχετικής σας απόφασης, η Ομάδα που συγκροτήθηκε από την Ε.Μ.Ε. ξεκίνησε στις 8 Ιούλη για να συμμετάσχει στην 29η Δ.Μ.Ο. στην Αυστραλία. Μετά την άφιξη μας στο Σίδνεϋ μείναμε στο New South Wales University όπου βρίσκονταν και οι άλλες αντιπροσωπείες. Η διοργανώτρια χώρα μας προσέφερε αίθουσα στην οποία η Ομάδα συνέχισε την προετοιμασία της με τον κ. Κοντογιάννη. Επίσης πραγματοποιήθηκε ημερήσια εκδρομή στα αξιοθέατα του Σίδνεϋ.

Στις 14 Ιούλη αναχωρήσαμε για την πρωτεύουσα Καμπέρα και εγκατασταθήκαμε στο Camberra College of Advanced Education. Το απόγευμα έγινε η επίσημη τελετή έναρξης.



Στις 15 και 16 Ιούλη πραγματοποιήθηκαν οι δύο διαγωνισμοί σε αίθουσες του κολεγίου. Η Ελληνική ομάδα κατετάγει 27η σε 49 χώρες και έλαβε ένα (1) χάλκινο μετάλλιο και τρεις (3) επαίνους. Αξίζει να σημειωθεί ότι είχε τον μικρότερο μέσο όρο ηλικίας (16,25 έτη, εξ αιτίας της μη συμμετοχής μαθητών από την Γ΄ Λυκείου λόγω των γενικών εξετάσεων.). Σαν επιτυχία της Ελληνικής Ομάδας πρέπει επίσης να θεωρηθεί ότι για πρώτη φορά στα χρονικά των διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων εκλέχθηκε άσκηση που πρότεινε η Ελλάδα για τον διαγωνισμό (του κ. Κοντογιάννη).

Από τις 17 έως 19 Ιούλη, η διοργανώτρια χώρα οργάνωσε εκδρομές, δραστηριότητες αθλητικού περιεχομένου, μαθηματικό παιχνίδι κ.α. για τις αντιπροσωπείες. Στις 20 Ιούλη επισκεφθήκαμε την Ελληνική Πρεσβεία. Την ίδια μέρα έγινε η τελετή λήξης και η απονομή μεταλίων από τον Πρωθυπουργό της Αυστραλίας κ. Hawke, καθώς και το αποχαιρετιστήριο δείπνο από τον υπουργό παιδείας κ. Dawkins.

Στις 21 Ιούλη έληξε τυπικά η 29η Δ.Μ.Ο.

Α. Οικονόμου
μέλος της ελληνικής ομάδας

Θέματα 29ης Ολυμπιάδας

ΠΡΩΤΗ ΜΕΡΑ

Καμπέρα, 15 Ιουλίου 1988

1. Στο ίδιο επίπεδο δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες R και r ($R > r$). Έστω P ένα σταθερό σημείο στην περιφέρεια του μικρού κύκλου και B ένα μεταβλητό σημείο στην περιφέρεια του μεγάλου κύκλου. Η ευθεία BP τέμνει την περιφέρεια του μεγάλου κύκλου και στο σημείο C. Η κάθετος ευθεία l επί της BP στο P τέμνει την περιφέρεια του μικρού κύκλου και στο σημείο A (αν η l είναι εφαπτομένη του κύκλου στο P, τότε $A = P$).

(I) Να βρεθεί το σύνολο τιμών του $(BC)^2 + (CA)^2 + (AB)^2$.

(II) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του AB.

2. Έστω n θετικός ακέραιος και έστω $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ υποσύνολα ενός συνόλου B. Υποτίθεται ότι:

(a) Κάθε A_i έχει ακριβώς **2n** στοιχεία,

(b) $A_i \cap A_j$ περιέχει μόνο ένα στοιχείο για κάθε i, j ($1 \leq i < j < 2n + 1$), και

(c) Κάθε στοιχείο του B ανήκει σε τουλάχιστον δύο από τα σύνολα A_i.

Για ποιές τιμές του n είναι δυνατόν να αντιστοιχήσουμε σε κάθε στοιχείο του B έναν από τους αριθμούς 0 και 1, έτσι ώστε, για κάθε σύνολο A_i υπάρχουν ακριβώς n στοιχεία του στα οποία αντιστοιχεί η τιμή 0;

3. Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο των θετικών ακεραίων από τις σχέσεις

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(2n) = f(n),$$
$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$$
$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακεραίων n, μικροτέρων ή ίσων του 1988 για τους οποίους ισχύει $f(n) = n$.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΡΑ

Καμπέρα, 16 Ιουλίου 1988

4. Ν' αποδειχτεί ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\sum_{\kappa=1}^{70} \frac{\kappa}{x - \kappa} \geqslant \frac{5}{4}$$

είναι ένωση διαστημάτων ξένων μεταξύ τους ανά δύο και το άθροισμα των μηκών των διασημάτων αυτών είναι 1988.

5. ABC είναι ένα τρίγωνο ορθογώνιο στο A και AD είναι το ύψος του τριγώνου που άγεται από το A. Η ευθεία που ορίζεται από τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ABD και ACD τέμνει τις πλευρές AB και AC στα σημεία K και L αντίστοιχα. Αν S και T, αντίστοιχα, συμβολίζουν τα εμβαδά των τριγώνων ABC και AKL, ν' αποδειχτεί ότι $S \geq 2T$.

6. Αν a και b είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε ο αριθμός $ab + 1$ να διαιρεί τον $a^2 + b^2$, ν' αποδειχτεί ότι ο αριθμός $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Η τελική βαθμολογία της 29ης Ι.Μ.Ο.

Ε.Σ.Σ.Δ. (217), Ρουμανία (201), Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας (201), Λαϊκή Δημοκρατία της Γερμανίας (174), Λαϊκή Δημοκρατία του Βιετνάμ (166), Η.Π.Α. (153), Λαϊκή Δημοκρατία Γερμανίας (145), Βουλγαρία (144), Γαλλία (128), Καναδάς (124), Αγγλία (121), Τσεχοσλοβακία (120), Σουηδία (115), Ισραήλ (115), Αυστρία (110), Ουγγαρία (109), Αυστραλία (100), Σινγκαπούρη (96), Γιουγκοσλαβία (92), Ιράν (86), Ολλανδία (85), Κορέα (79), Βέλγιο (76), Χόνγκ-Κόνγκ (68), Τυνησία (67), Κολομβία (66), Τουρκία (65), Ελλάδα (65), Φιλανδία (65), Λουξεμβούργο (64), Μαρόκο (62), Περού (55), Πολωνία (54), Νέα Ζηλανδία (47), Ιταλία (44), Αλγερία (42), Μεξικό (40), Βραζιλία (39), Ισλανδία (37), Κούβα (35), Ισπανία (34), Νορβηγία (33), Ιρλανδία (30), Φιλιππίνες (29), Κουβέϊτ (23), Αργεντινή (23), Κύπρος (21), Ινδονησία (6), Εκουαντόρ (1), Σαμόα (0), Τόυγκο (0), Ταϋλάνδη (0), Ρεϊνιόν (0), Νέα Καληδονία (0), Ινδία (0), Γαλλική Πολυνησία (0), Φίτζι (0).

1ο Βαλκανικό Σχολείο στα Γιάννενα

Έγινε στα **Γιάννενα** το 1ο Βαλκανικό Μαθηματικών από 8 μέχρι 15 Αυγούστου '88. Σ' αυτή τη πρώτη διοργάνωση που έγινε με πρωτοβουλία της Ε.Μ.Ε. έλαβαν μέρος η Ελλάδα, η Αλβανία, η Κύπρος και η Βουλγαρία. Δεν ήλθαν για διάφορους λόγους αν και είχαν προσκληθεί η Ρουμανία και η Γιουγκοσλαβία, ενώ η Τουρκία δεν είχε προσκληθεί (η Τουρκία δεν συμμετέχει και στις Βαλκανιάδες). Η επόμενη συνάντηση για το 2ο Βαλκανικό Σχολείο θα γίνει στη Βουλγαρία. Το πρόγραμμα είχε ως ακολούθως: (8 Αυγ' 88) μαθήματα από τον Θ. Μπόλη και Ι. Τόνωφ (9 Αυγ' 88). Επίσκεψη στο Κάστρο και στο Σπήλαιο των Ιωαννίνων. Το απόγευμα: Μάθημα απ' τον Μ. Λαζάνωφ (10 Αυγ' 88), διαλέξεις από τον Δ. Κοντογιάννη και Γ. Ωραιόπουλο, και Κοσλίκωφ. (11 Αυγ' 88) εκδρομή στο Ζάλογγο, Καστροσυκιά, Πρέβεζα, Άρτα (12 Αυγ' 88), μαθήματα από Δ. Κοντογιάννη, Λαζάνωφ και Τελίκι (13 Αυγ. '88) μαθήματα από Τόνωφ, Μπόλη, Κοσλίκωφ.

Στο τέλος των μαθημάτων δόθηκαν μερικά κοινά θέματα για επεξεργασία των ομάδων της κάθε χώρας χωρίς βαθμολογικό ενδιαφέρον.

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε συνάρτηση F που ικανοποιεί τη σχέση

$$F(x+1) + F(x-1) = \sqrt{2F(x)}$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιοδική.

(Αλβανία)

ΘΕΜΑ 2

Η διαγώνιος AC του τετραπλεύρου ABCD διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Delta$. Δίνεται ότι

$$|AD| = 2|AB|$$

και το εμβαδό του τριγώνου ABC είναι S. Οι μεσοκάθετες των πλευρών BC και CD τέμνουν τις AD και AB στο P και G αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδό του τετραπλεύρου ABCD αν τα σημεία P, G και C είναι συνευθειακά.

(Βουλγαρία)

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε κανονικό ν-γωνο. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δυό κορυφές του ν-γωνου χρωματίζεται έτσι ώστε να μην υπάρχουν δυό τεμνόμενα τμήματα με το ίδιο χρώμα. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που θα χρειαστούν για τον παραπάνω χρωματισμό;

(Βουλγαρία)

ΘΕΜΑ 4

Θα λέμε ότι ο φυσικός αριθμός n είναι «αναλύσιμος» αν υπάρχουν n ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ τέτοιοι ώστε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = n$$

Να βρείτε ακριβώς ποιοί φυσικοί αριθμοί είναι αναλύσιμοι.

Χ. Ταμβάκης **(Ελλάδα)**

ΘΕΜΑ 5

Θεωρουμε κυρτό πολύεδρο α_n και είναι ki το πληθος των κορυφών απ' τις οποίες ξεκινούν i ακμές και ei το πλήθος των εδρών με i ακμές.

Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$\sum_{i\geqslant 3} (2i + 2n - ni)\, ki + 2 \sum_{i\geqslant 3} (n\text{-}i)\, e_i < 4n + 1.$$

Δ. Κοντογιάννης **(Ελλάδα)**

Απ' την Ελληνική ομάδα συμμετείχαν οι μαθητές Α. Οικονόμου Β. Μουρούκος, Δ. Σταθόπουλος, Γ. Μιχάϊ, Α. Ματέκοβιτς, Ε.Βλάμου, Δ. Μαυροϊδής, Α. Μπιλίρης, Ε. Τιάκας, Χ. Ανταμάρας. Ενώ επιτροπή διοργάνωσης του 1ου Βαλκανικού Σχολείου απ' την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία ήσαν οι συνάδελφοι Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Γ. Ωραιόπουλος, Β. Ζώτος, Β. Ντζιαχρήστος και Γ. Τυρλής, ενώ βοήθησαν με κάθε τρόπο στην άρτια διεξαγωγή του Βαλκανικού Σχολείου στα Γιάννενα οι Ν. Μαρούγκας, Γ. Μακρίδης, Η. Μπόλη και Ι. Μπαλτογιάννης.

Σύντομη αναφορά στη διετία 1986-88

• Από τον *Χ. Ταμβάκη* - φοιτητή **Μαθηματικού** λάβαμε επιστολή με θέμα: Παρατηρήσεις πάνω στη στήλη των Ολυμπιάδων της τελευταίας διετίας (Σεπ. '86 - Απρ. '88). Επισημάνσεις σημαντικές, τις οποίες επιγραμματικά αναφέρουμε: 1) τ_1 (Οκτ. '86) σελ. 9. Η άσκηση της Βουλγαρίας (με το τετράεδρο αφορούσε έξι σημεία πάνω στις έξι ακμές ενός τετραέδρου και όχι τέσσερα σημεία και ζητούσε να αποδειχθεί ότι τα 6 σημεία όπως ορίστηκαν ανήκουν σε σφαίρα. 2) τ_2 (Δεκ. '86) σελ. 80 πρ. 5 (Αγγλία) αντί $f(2) = 0$ πρέπει $f(z) = 0$. 3) τ_2 (Δεκ. '86) σελ. 82 στο θ_1 (Γ΄ Λυκείου) έπρεπε να φαίνεται ότι η F είναι περιοδική με περίοδο d. 4) τ_1 (Οκτ. '87). Στο πρ. 3 η τελευταία ανισότητα θέλει $\leqslant$ και όχι $\geqslant$. 5) Στο θ_1 (απόδειξη) τ_4 σελ. 247 ('87-'88). Το άθροισμα έπρεπε να υψωθεί σε σταθερό και όχι μεταβλητό εκθέτη και όχι να εντοπιστεί εκ των υστέρων το λάθος. 6) Στο θ_5 ομοίως υπάρχει τυπογραφικό λάθος στο $d(A, B)$. 7) Στο θ_2 σελ. 23 (θ_7 - '88) όπως είπαμε στην παρατήρηση 1 δημιουργεί προβλήματα στην απόδειξη και η απόδειξη γίνεται δυσνόητη. Επ' ευκαιρία μία λύση πιο απλή θα 'ταν:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 + c}{\alpha_{n-1}} \Rightarrow \alpha_{n+1}\alpha_{n-1} - \alpha_n^2 = c \Rightarrow$$

$$\alpha_{n+1}\alpha_{n-1} - \alpha_n^2 = \alpha_n\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}^2 = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}) = \alpha_n(\alpha_{n-2} + \alpha_n)$$

τότε $\alpha_{n+1} = K\alpha_n - \alpha_{n-1}$ $n = 2, 3, 4$ όπου

$$K = \frac{\alpha_3 + \alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + c}{\alpha\beta} \ldots$$

8) σελ. 24 στο ίδιο τεύχος τα σχήματα βρίσκονται σε λάθος θέσεις. 9) Στο τ_3 (Φλ. '88) σελ. 156-157 οι αποδείξεις του O_5 είναι επίπονες και βασίζονται στο θ. Rolle, (έξω από το πνεύμα των Ολυμπιάδων), ενώ πιο εύκολα το $P(x) = x(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$ όταν $x \in (0, 1)$ τότε $x^4 + x^2 + 1 \in (1, 3)$

οπότε $\forall x \in (0, 1),\ P(x) > -\dfrac{3}{4}$.

Φυσικά αυτό ισχύει και όταν $x \notin (0, 1)$ γιατί τότε $P(x) \geqslant 0$ και τελειώνει εκεί. (10) Στο θέμα 2 στο τ_1 ('87, '88) στις ασκήσεις Ολυμπιάδων η ισχύ της $MK = \delta_\alpha \eta\mu A$ δεν αποδεικνύεται. 11) τ_4 (Απρ. '88) Στη σελ. 208 τα θέματα θ_4, θ_1 έχουν πιο απλές αποδείξεις απ' τους μαθητές που τα πρότειναν. 12) Ομοίως σελ. 211-216 υπάρχουν τυπογραφικές αβλεψίες.

Αντίδοτο σ' όλα αυτά θα 'ταν περισσότερη προσοχή και τυπογραφική επιμέλεια. Εύχομαι να μην επαναληφθούν παρόμοια σφάλματα που χαλάνε την γενικά καλή μορφή της στήλης.

— Αγαπητέ φίλε, αρκετά σημαντικά αυτά που μας γράφεις. Η τυπογραφική αρτιότητα στην τελική μαθηματική διαμόρφωση του περιοδικού περνάει μέσα από πολλές δυσχέρειες μια και το μαθηματικό κείμενο παρουσιάζει επιπλέον ιδιομορφίες. Όσον αφορά τις άλλες λύσεις που κάποιες φορές δίνονται, αυτό γίνεται για την άλλη άποψη των φίλων της στήλης. Νομίζουμε ότι θα συμφωνήσουμε στο σημείο του επίπονου τυπογραφικού ελέγχου.

Απομυθοποίηση των Ολυμπιάδων

Τ. Λαμπρόπουλος - **Αθήνα**

Φίλε μου, μαθητή της Α΄ Λυκείου.

΄Εχεις αυτή τη στιγμή στα χέρια σου και ξεφυλλίζεις τον Ευκλείδη Β΄. Θα φτάσεις σε μια σελίδα και θα διαβάσεις: «Στήλη των Ολυμπιάδων». Εάν έχεις ξαναδιαβάσει Ευκλείδη, τότε το πιο πιθανό είναι να συνεχίσεις να αλλάζεις σελίδες. Εάν όμως η επαφή σου με το περιοδικό γίνεται για πρώτη φορά τότε ίσως προσπαθήσεις να διαβάσεις τη στήλη. Θα ενημερωθείς για ασκήσεις που προτάθηκαν ή δόθηκαν σε ελληνικές ή διεθνείς Ολυμπιάδες που έχουν τη μορφή.

1. Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=5$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=25$ να βρεθεί το διάστημα που μεταβάλλεται το ε.

2. Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ρ σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Αν x, y, z οι αποστάσεις του Ρ από τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, τότε να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης

$$x^2+y^2+z^2.$$

4. Αν $x+y+z=x^3+y^3+z^3=1$ τότε να δειχτεί ότι:

i) $\frac{1}{x^{1989}}+\frac{1}{y^{1989}}+\frac{1}{z^{1989}}=1$

ii) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x^2+y^2+z^2=1$ τότε να δειχτεί ότι δυο από τους x, y, z είναι μηδέν.

Πριν προσπαθήσεις να λύσεις τις ασκήσεις βέβαια είναι ότι θα διαβάσεις τη συνέχεια της στήλης ώστε να αντλήσεις κάποια πληροφορία για τη λύση τους. Αυτά που θα διαβάσεις θα σου δώσουν την εντύπωση ότι είσαι ο πιο απληροφόρητος μαθητής κοινώς τούβλο. Θα διαβάσεις πράμματα και θάμματα. Θα διαβάσεις για Θεώρημα Pompeiu - Τρίγωνο Pompeiu και το σημείο Toricelli, για mini ευκλείδια επίπεδα τάξης ν - για δρόμους Euler και γραμμές του Δράκου - για κιγκλίδες και κόμβους - για Θεώρημα Helly - κύκλο Tucker - κύκλο Brocard - για ανισότητες Holder, Minkowski - Tschebychef.

Εάν έχεις οικειότητα και θάρρος με τον καθηγητή σου και τον ρωτήσεις για αυτά που διάβασες τότε με έκπληξη θα διαπιστώσεις ότι και αυτός δεν μπορεί να σου δώσει καμιά πληροφορία. Μην βιαστείς να βγάλεις λαθεμένα συμπεράσματα για τις γνώσεις του δασκάλου σου. Σε πληροφορώ ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθηματικών ελάχιστες γνώσεις έχει για τα πιο πάνω. Οι μαθηματικοί που έχουν ασχοληθεί και έχουν κάποια ειδίκευση και κάποια γνώση σε αυτά τα αντικείμενα είναι ελάχιστοι.

Εάν έχεις ακόμα τη διάθεση αλλά και την περιέργεια ώστε να βρεις απάντηση στο ερώτημά σου «Γιατί δεν μπορώ να λύσω αυτού του είδους άσκηση» τότε ίσως διαβάσεις σε κάποιο άρθρο ότι για τη λύση αυτών των ασκήσεων χρειάζεται ταλέντο και τότε θα απαγοητευθείς και θα θεωρήσεις τον εαυτό του ατάλαντο και ανίκανο να λύσει τέτοιες ασκήσεις.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να δώσω μια απάντηση στη μαθήτρια που στον **Πανελλήνιο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε. 1987** διατύπωσε το παραπονεμένο ερώτημα.

«Γιατί δεν μπόρεσα να λύσω τις ασκήσεις; Μπορώ και εγώ να μάθω μαθηματικά ή χρειάζεται ειδικό ταλέντο;».

Πριν απαντήσω στο ερώτημα θα παραθέσω μια διαπίστωση. ΄Οταν για πρώτη φορά προσπάθησα να λύσω το σταυρόλεξο κάποιου εντύπου διαπίστωσα ότι μόνο λίγες λέξεις τοποθέτησα. Την επόμενη φορά ασχολήθηκα με τη λύση που είχε δοθεί και προσπάθησα να λύσω το προτεινόμενο.

Αυτό συνέβη αρκετές φορές έως ότου έλυνα πλέον το σταυρόλεξο του εν λόγω εντύπου με χαρακτηριστική ευκολία. Δοκίμασα τότε να λύσω το σταυρόλεξο άλλου εντύπου και όμως δεν τα κατάφερα. Τι συνέβαινε; Απλώς είχα μπει στο πνεύμα του κατασκευαστή του σταυρολέξου του ενός εντύπου και δεν είχα εναρμονιστεί με τον κατασκευαστή του άλλου.

Επομένως για να λύσεις μια άσκηση δεν χρειάζεται ταλέντο. Χρειάζεται εμπειρία και διαρκής εξάσκηση. Το ταλέντο πολύ μικρό ρόλο παίζει. Ταλέντο χρειάζεται για πολύ ειδικές ασκήσεις.

Θα σου έχει συμβεί το γεγονός ότι προσπαθώντας να λύσεις μια άσκηση βγάζεις πολλά συμπεράσματα εκτός από το ζητούμενο. Αν τώρα στην ίδια άσκηση ζητήσεις από τον κατασκευαστή της να σου αποδείξει ένα συμπέρασμα στο οποίο εσύ κατέληξες πιθανόν να μην τα καταφέρει. Αυτή είναι η ομορφιά των μαθηματικών. ΄Ενα πρόβλημα, χωρίς να το θέλεις, ίσως σου δώσει τη διάθεση να αποκτήσεις πρωτοβουλία σκέψης. Αν σου προκαλέσει την περιέργεια και θέσει σε ενέργεια τις εφευρετικές ικανότητές σου, που σίγουρα έχεις, ώστε να το λύσεις τότε θα δοκιμάσεις ένα αίσθημα θριαμβευτικής χαράς και έντασης, που προσφέρει μόνο η ανακάλυψη κάτι καινούργιου.

Και τώρα καιρός είναι να ασχοληθούμε, εσείς οι μαθητές της Α΄ Λυκείου και εγώ με τη λύση των πιο πάνω προβλημάτων. Είμαι βέβαιος ότι στο τέλος του άρθρου θα διαπιστώσετε ότι δεν είναι και τόσο δύσκολες.

Πριν όμως γίνει αυτό ας ανακεφαλαιώσουμε τις γνώσεις που έχουμε αποκτήσει και ας βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα που έχουν επικεντρωθεί στην άσκηση που ακολουθεί.

Να αποδείξετε ότι:

1) $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(x_1^2+x_2^2)\geqslant(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2$

2) $2(x_1^2+x_2^2)\geqslant(x_1+x_2)^2$

3) $(\alpha_1^2+\alpha_1^2+\alpha_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant$
$\geqslant(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)^2$

4) $3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant(x_1+x_2+x_3)^2$

5) $\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}\geqslant\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2$

6) $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+...+\alpha_\nu^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+...$
$+x_\nu^2)\geqslant(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+...+\alpha_\nu x_\nu)^2$

7. $\nu(x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2)\geqslant(x_1+x_2+...+x_\nu)^2$

8. $\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}\right)(\alpha_1+\alpha_2)\geqslant 2^2\quad\forall\ \alpha_1,\alpha_2\in R_+^*$

9. $\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dfrac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\geqslant 3^2$
$\forall\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R_+^*$

10. $\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dfrac{1}{\alpha_3}+...+\dfrac{1}{\alpha_\nu}\right)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+$
$+...+\alpha_\nu)\geqslant\nu^2\quad\forall\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\in R_+^*$

Απόδειξη:

Δεν νομίζω να αντιμετωπίσεις κανένα πρόβλημα στις πράξεις. Πιθανόν να δυσκολευτείς να παρακολουθήσεις το δικό μου τρόπο απόδειξης. Μπορείς να ακολουθήσεις διαφορετικό τρόπο. Είναι άλλωστε ωραίο να εκφράζεσαι με τον τρόπο που σε ικανοποιεί. Ας προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη.

1. $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(x_1^2+x_2^2)\geqslant(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \alpha_1^2x_2^2+\alpha_1^2x_2^2+\alpha_2^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2\geqslant$
$\geqslant\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \alpha_1^2x_2^2+\alpha_2^2x_1^2-2\alpha_1\alpha_2x_1x_2\geqslant 0\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ (\alpha_1x_2-\alpha_2x_1)^2\geqslant 0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει πάντα γιατί το πρώτο μέλος είναι αριθμός μη αρνητικός. Άρα ισχύει και η αρχική πρόταση.

Παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει όταν:

$\alpha_1x_2-\alpha_2x_1=0\ \Leftrightarrow\ \alpha_1x_2=\alpha_2x_1$ με $\alpha_1\cdot\alpha_2\neq0\ \Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha_1x_2}{\alpha_1\alpha_2}=\dfrac{\alpha_2x_1}{\alpha_1\alpha_2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{x_1}{\alpha_1}=\dfrac{x_2}{\alpha_2}$

2. Αν θέσεις στην (1) $\alpha_1=\alpha_2=1$ θα 'χεις:

$(1^2+1^2)(x_1^2+x_2^2)\geqslant(1\cdot x_1+1\cdot x_2)^2\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ 2(x_1^2+x_2^2)\geqslant(x_1+x_2)^2$

Πιθανόν να μην σκεφθείς να θέσεις $\alpha_1=\alpha_2=1$. Δεν πειράζει. Μπορείς να αποδείξεις την ανισότητα όπως θέλεις. Ο πιο πιθανός δρόμος που θα ακολουθήσεις είναι ο πιο κάτω.

$2(x_1^2+x_2^2)\geqslant(x_1+x_2)^2\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ 2x_1^2+2x_2^2\geqslant x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\ \Leftrightarrow$
$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\geqslant0\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ (x_1-x_2)^2\geqslant0$

που ισχύει για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$.

3. Εδώ έχουμε αρκετές πράξεις και πιθανόν να κάνεις λάθος. Για να σε διευκολύνω σου θυμίζω τον κανόνα.

Για να υψώσουμε μια παράσταση στο τετράγωνο παίρνουμε στην αρχή το άθροισμα όλων των όρων της παράστασης υψωμένους στο τετράγωνο και στη συνέχεια παίρνουμε το άθροισμα των διπλάσιων γινομένων όλων των όρων του ανά δυο λαμβανομένων με όλους τους δυνατούς τρόπους, δηλαδή το διπλάσιο γινόμενο του πρώτου όρου με όλους τους άλλους, το διπλάσιο γινόμενο του δεύτερου όρου με όλους τους επομένους του κ.ο.κ. Άρα θα 'χουμε:

$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant$
$\geqslant(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)^2\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \alpha_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\alpha_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+$
$+\ \alpha_3^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant$

$\geqslant\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2+\alpha_3^2x_3^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2+$
$+2\alpha_1\alpha_3x_1x_3+2\alpha_2\alpha_3x_2x_3\ \Leftrightarrow$

κάνε μόνος σου τις πράξεις και θα καταλήξεις...

$(\alpha_1^2x_2^2+\alpha_2^2x_1^2-2\alpha_1\alpha_2x_1x_2)+$
$+(\alpha_1^2x_3^2+\alpha_3^2x_1^2-2\alpha_1\alpha_3x_1x_3)^2+$
$+(\alpha_2^2x_3^2+\alpha_3^2x_2^2-2\alpha_2\alpha_3x_2x_3)\geqslant0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (\alpha_1x_2-\alpha_2x_1)^2+(\alpha_1x_3-\alpha_3x_1)^2+(\alpha_2x_3-\alpha_3x_2)^2\geqslant0$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,x_1,x_2,x_3\in R$.

Επομένως ισχύει και η αρχική.

Παρατηρείστε ότι:

i) Για να ισχύει η ισότητα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \alpha_1x_2-\alpha_2x_1=0\\ \alpha_1x_3-\alpha_3x_1=0\\ \alpha_2x_3-\alpha_3x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1x_2=\alpha_2x_1\\ \alpha_1x_3=\alpha_3x_1\\ \alpha_2x_3=\alpha_3x_2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x_1}{\alpha_1}=\dfrac{x_2}{\alpha_2}\\ \dfrac{x_1}{\alpha_1}=\dfrac{x_3}{\alpha_3}\\ \dfrac{x_2}{\alpha_2}=\dfrac{x_3}{\alpha_3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\frac{x_3}{\alpha_3} \text{ με } \alpha_1\alpha_2\alpha_3\neq 0$$

ii) $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-$
$-(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)^2=$
$=(\alpha_1x_3+\alpha_2x_1)^2+(\alpha_1x_3-\alpha_3x_1)^2+(\alpha_2x_3-\alpha_3x_2)^2$

που ονομάζεται ταυτότητα του Lagrange.

4) Αν θέσεις $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ τότε θα 'χεις:

$$(1^2+1^2+1^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant(x_1+x_2+x_3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant(x_1+x_2+x_3)^2$$

5. Από την ανισότητα
$3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant(x_1+x_2+x_3)^2$ παίρνεις:

$$\frac{3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{3^2}\geqslant\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2$$

6. Η εντύπωση που δίνει αυτό το ερώτημα είναι ότι πρέπει να ισχύει γιατί είναι γενίκευση των ερωτημάτων (1) και (3). Η ομορφιά όμως των μαθηματικών βρίσκεται στην αλήθεια. Για να δεχτείς κάτι πρέπει να το αποδείξεις, εκτός αν είναι τόσο προφανής η αλήθεια του ώστε να δεχτείς αξιωματικά ότι ισχύει:

Προφανές είναι ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\alpha_1x-\beta_1)^2+(\alpha_2x-\beta_2)^2+\ldots+(\alpha_1x-\beta_\nu)^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\alpha_1^2x^2+\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1x+\alpha_2^2x^2+\beta_2^2-2\alpha_2\beta_2x+\ldots+$$
$$+\alpha_1^2x^2+\beta_\nu^2-2\alpha_\nu\beta_\nu x\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)x^2-2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)x+$$
$$+(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)\geqslant 0$$

και αν θέσεις:

$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2=A>0\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu=B\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2=\Gamma>0\end{cases}$$ τότε θα 'χεις:

$$Ax^2-2Bx+\Gamma\geqslant 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Θα αναλύσουμε τώρα το τριώνυμο
$$Ax^2-2Bx+\Gamma$$
σε γινόμενο παραγόντων με τον τρόπο που έμαθες στο Γυμνάσιο. Θα 'χουμε:

$$Ax^2-2Bx+\Gamma=A\left[\left(x^2-2\frac{B}{A}x\right)+\frac{\Gamma}{A}\right]=$$
$$=A\left[\left(x^2-2\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{A^2}\right)+\frac{\Gamma}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right]=$$
$$=A\left[\left(x-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{A\Gamma-B^2}{A^2}\right]$$

και επειδή $Ax^2-2Bx+\Gamma\geqslant 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ τότε θα 'ναι και

$$A\left[\left(x-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{A\Gamma-B^2}{A^2}\right]\geqslant 0 \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $A>0$ τότε παίρνουμε:

$$\left(x-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{A\Gamma-B^2}{A^2}\geqslant 0 \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

που σημαίνει ότι και για $x=\dfrac{B}{A}$ έχουμε:

$$\left(\frac{B}{A}-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{A\Gamma-B^2}{A^2}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{A\Gamma-B^2}{A^2}\geqslant 0\Rightarrow$$
$$A\Gamma-B^2\geqslant 0 \Leftrightarrow A\Gamma\geqslant B^2 \Rightarrow$$
$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2.$$

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται ανισότητα των Cauchy - Schwarz (Κωσύ - Σβαρτς).

Για να ισχύει η ισότητα:
$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)=$$
$$=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$
θα πρέπει προφανώς να ισχύουν
$$\alpha_1x-\beta_1=0 \text{ και } \alpha_2x-\beta_2=0 \text{ και} \ldots$$
$$\text{και } \alpha_\nu x-\beta_\nu=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\frac{\beta_3}{\alpha_3}=\ldots=\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}$$

7. Αν θέσεις $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_\nu=1$ παίρνεις:
$$(1^2+1^2+\ldots+1^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2)\geqslant$$
$$(1\cdot x_1+1\cdot x_2+\ldots+1\cdot x_\nu)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2)\geqslant(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2$$

8. Επειδή οι α_1, α_2 είναι θετικοί αριθμοί τότε:
$(\sqrt{\alpha_1})^2=\alpha_1$ και $(\sqrt{\alpha_1})^2=\alpha_2$ οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)(\alpha_1+\alpha_2)=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2\right]\cdot$$
$$\cdot\left[(\sqrt{\alpha_1})^2+(\sqrt{\alpha_2})^2\right]\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\cdot\sqrt{\alpha_1}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\cdot\sqrt{\alpha_1}\right)^2=(1+1)^2=2^2$$

9. Όμοια παίρνουμε:

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$$

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\right)^2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^2+\left(\sqrt{\alpha_2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\right)^2\right]\geqslant$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\cdot\sqrt{\alpha_1}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\cdot\sqrt{\alpha_2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}\cdot\sqrt{\alpha_3}\right)^2=$$

$$=(1+1+1)^2=3^2$$

10. Μπορείς να το αποδείξεις μόνος σου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

i) Για να λύσεις μια άσκηση που σου προτείνει ο **Ευκλείδης** ή **Διαγωνισμός της Ε.Μ.Ε.,** μπορείς να χρησιμοποιήσεις την ανισότητα των Cauchy - Schwarz χωρίς απόδειξη. Εάν όμως πρόκειται για άσκηση του σχολείου σου ή για άσκηση εξετάσεων τότε για να χρησιμοποιήσεις την πιο πάνω ανισότητα πρέπει να την αποδείξεις.

ii) Στην ανίσωση των Cauchy - Schwarz για να γίνει το δεύτερο μέλος ίσο με το πρώτο, πρέπει να προσθέσουμε στο δεύτερο μέλος μια θετική παράσταση. Η παράσταση αυτή είναι ένα άθροισμα τετραγώνων που το βρίσκουμε ως εξής:

Θεωρούμε τις στήλες:

$$\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_\nu\end{matrix}$$

παίρνουμε από τις ν αυτές στήλες τις 2 με όλους τους δυνατούς τρόπους δηλαδή την 1η στήλη με τη 2η ύστερα την 1η στήλη με την 3η, ..., την 1η στήλη με την ν-ιοστή στήλη. Έπειτα συνδυάζουμε την 2η στήλη με όλες τις επόμενές της, την 3η στήλη με όλες τις επόμενές της κ.ο.κ. έως ότου τελειώσουν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί.

Οι στήλες $\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{matrix}$

δίνουν το τετράγωνο $(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$.

Οι στήλες $\begin{matrix}\alpha_\kappa & \alpha_\lambda\\ \beta_\kappa & \beta_\lambda\end{matrix}$

δίνουν το τετράγωνο $(\alpha_\kappa\beta_\lambda-\alpha_\lambda\beta_\kappa)^2$.

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε όλα τα τετράγωνα που είναι $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ το πλήθος, δηλαδή θα 'χουμε:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_\nu^2)^2=$$

$$=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+\dots$$

$$+(\alpha_1\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+\dots+$$

$$+(\alpha_2\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_2)^2+(\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3)^2+\dots+$$

$$+(\alpha_3\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_3)^2+\dots+(\alpha_{\nu-1}\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_{\nu-1})^2$$

Η ισότητα αυτή ονομάζεται ταυτότητα του Lagrange και γράφεται σύντομα:

$$\left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\beta_i\right)^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{\nu}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)^2$$

ΚΑΙΡΟΣ ΕΙΝΑΙ ΠΛΕΟΝ ΝΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ ΜΕ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΤΑΘΗΚΑΝ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ

---

1. Έχουμε αποδείξει ότι:

$$4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\geqslant(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 \qquad (I)$$

Από τις υποθέσεις

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=5$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2=25$

παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=5-\varepsilon$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=25-\varepsilon^2$

με αντικατάσταση αυτών στην (I) έχουμε:

$$4(25-\varepsilon^2)\geqslant(5-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 100-4\varepsilon^2\geqslant 25+\varepsilon^2+10\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$5\varepsilon^2+10\varepsilon-75\leqslant 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2+2\varepsilon-15\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon^2+5\varepsilon-3\varepsilon-15\leqslant 0 \Leftrightarrow \varepsilon(\varepsilon+5)-3(\varepsilon+5)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon+5)(\varepsilon-3)\leqslant 0 \qquad (II)$$

Η ανισότητα (II) σημαίνει ότι οι αριθμοί $\varepsilon+5$ και $\varepsilon-3$ είναι ετερόσημοι ή ένας τουλάχιστον μηδέν, δηλαδή έχουμε:

$$\begin{cases}\varepsilon+5\geqslant 0\\ \text{και}\\ \varepsilon-3\leqslant 0\end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases}\varepsilon+5\leqslant 0\\ \text{και}\\ \varepsilon-3\geqslant 0\end{cases}$$

Το σύστημα των ανισοτήτων $\varepsilon+5\geqslant 0$ και $\varepsilon-3\leqslant 0$ δίνει $\varepsilon\geqslant-5$ και $\varepsilon\leqslant 3 \Leftrightarrow -5\leqslant\varepsilon\leqslant 3$

Το σύστημα των ανισοτήτων $\varepsilon+5\leqslant 0$ και $\varepsilon-3\geqslant 0$ δίνει $\varepsilon\leqslant-5$ και $\varepsilon\geqslant 3$ που είναι αδύνατο γιατί δεν μπορεί ένας αριθμός να είναι ταυτόχρονα μικρότερος του -5 και μεγαλύτερος του 3.

Επομένως ο πραγματικός αριθμός ε παίρνει τιμές στο διάστημα $[-5, 3]$.

2. Από υπόθεση έχουμε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ οπότε με εφαρμογή της ανισότητας των Cauchy - Schwarz παίρνουμε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)\geqslant(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 1\geqslant(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\geqslant\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\geqslant|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha| \Leftrightarrow$$

$$-1\leqslant\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leqslant 1$$

3. Αν ενωθεί το Ρ με τις κορυφές Α, Β, Γ σχηματίζονται τα τρίγωνα ΡΑΒ, ΡΒΓ, ΡΓΑ. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των τριγώνων δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ που είναι σταθερό και ας το ονομάσουμε Ε.

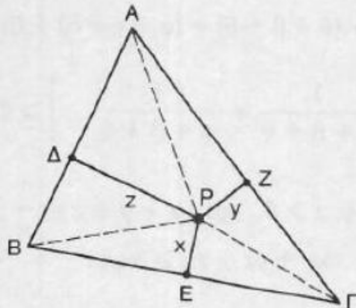
Επομένως θα 'χουμε:

$$E(PAB) + E(PB\Gamma) + E(PA\Gamma) = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AB \cdot P\Delta + \frac{1}{2}B\Gamma \cdot PE + \frac{1}{2}\Gamma A \cdot PZ = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\gamma \cdot z + \frac{1}{2}\alpha \cdot x + \frac{1}{2}\beta \cdot y = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 2E$$



Τα μέτρα α, β, γ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερά. Επομένως θα 'ναι σταθερό και το άθροισμα:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = c^2 \quad \text{(c σταθερός αριθμός)}$$

Εφαρμόζουμε την ανίσωση των Cauchy - Schwarz και παίρνουμε:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4E^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \left(\frac{2E}{c}\right)^2.$$

'Αρα η ελάχιστη τιμή που μπορεί η παράσταση $x^2 + y^2 + z^2$ είναι $\left(\frac{2E}{c}\right)^2$ και αυτό συμβαίνει όταν για το σημείο P ισχύει:

$$\frac{\alpha}{PE} = \frac{\beta}{PZ} = \frac{\gamma}{P\Delta}.$$

4. Γνωρίζουμε ότι:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \quad \text{ή}$$

$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ που είναι πιο εύχρηστη μορφή.

Για να βρούμε το ανάπτυγμα του κύβου,

$$(x + y + z)^3$$

θέτουμε $x + y = \alpha$ και $z = \beta$ οπότε θα 'χουμε:

$$(x + y + z)^3 = \left[(x + y) + z\right]^3 = (\alpha + \beta)^3 =$$

$$= \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) =$$

$$(x + y)^3 + z^3 + 3(x + y) \cdot \left[(x + y) + z\right] =$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 + 3(x + y) \cdot z(x + y + z) =$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)\left[xy + z(x + y + z)\right] =$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(xy + zx + zy + z^2) =$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)\left[x(y + z) + z(y + z)\right] =$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(x + z)$$

Επομένως:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

Για τη λύση της άσκησης έχουμε:

i) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y + z)^3 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1 + 3(x + y)(y + z)(z + x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x + y)(y + z)(z + x) = 0$$

που σημαίνει ότι δυο τουλάχιστον από τους x, y, z είναι αντίθετοι, δηλαδή ισχύει:

$$x = -y \text{ ή } y = -z \text{ ή } z = -x.$$

'Εστω ότι ισχύει $x = -y$. Τότε θα 'χουμε

$$x + y + z = 1 \Rightarrow (-y) + y + z = 1 \Rightarrow z = 1$$

και ακόμα

$$\frac{1}{x^{1989}} + \frac{1}{y^{1989}} + \frac{1}{z^{1989}} = \frac{1}{(-y)^{1989}} + \frac{1}{y^{1989}} + \frac{1}{1^{1989}} =$$

$$= -\frac{1}{y^{1989}} + \frac{1}{y^{1989}} + \frac{1}{1} = 1$$

όμοια εργαζόμαστε αν $y = -z$ ή $z = -x$.

ii) Από τις ισότητες $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 1$ συμπεραίνουμε ότι $x = -y$ ή $y = -z$ ή $z = -x$.

Ακόμα παίρνουμε:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$$

και επειδή $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ τότε θα 'χουμε:

$$1 + 2(xy + yz + zx) = 1 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = 0 \Rightarrow$$

$$xy + yz + zx = 0$$

Αν $x = -y$ τότε έχουμε:

$$-y \cdot y + y \cdot z + z(-y) = 0 \Rightarrow -y^2 + yz - zy = 0 \Rightarrow$$

$$-y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Επομένως αν $x = -y \Rightarrow y = x = 0$.

'Ομοια βρίσκουμε ότι: $y = z = 0$ όταν $y = -z$ kai $x = z = 0$ όταν $z = -x$.

Επομένως από τις ιδιότητες

$$x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

συνεπάγεται ότι δύο από τους x, y, z είναι μηδέν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Αν $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ να δειχτεί ότι:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

Υπόδειξη:

i) απόδειξε ότι $(\alpha + \beta)^2 \geqslant 4\alpha\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) ισχύει

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geqslant (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 =$$

$$\left[(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)\right]^2 \geqslant 4(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \ldots$$

2. Αν $\alpha = yz + 5$, $\beta = xz + 5$, $\gamma = xy + 5$ και $xy + yz + zx = 1$ με $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ να δειχτεί ότι:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} \leqslant 4\sqrt{3}$$

Υπόδειξη:

$$3\left[(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+(\sqrt{\gamma})^2\right]\geqslant(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2 \Rightarrow$$

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2\leqslant 3(\alpha+\beta+\gamma)$$

Αντικατέστησε τα α, β, γ, οπότε ...

3. Αν $x^2+y^2+z^2=4$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\Pi=2x+y+2z$.

Υπόδειξη:

$$(2^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(2x+y+2z)^2 \Rightarrow$$

$$9\cdot 4\geqslant(2x+y+2z)^2 \Rightarrow 2x+y+2z\leqslant 6$$

4. Αν $x^2+2y^2+4z^2=28$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$\Pi=2x-4y+8z.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z συμβαίνει αυτό;

Υπόδειξη:

$x^2+2y^2+4z^2=28 \Leftrightarrow x^2+(\sqrt{2}y)^2=28$ οπότε

$$\left[2^2+(-2\sqrt{2})^2+1^2\right]\left[x^2+(\sqrt{2}y)^2\right]\geqslant$$

$$\geqslant\left[2x-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}y+4\cdot 2z\right]^2 ...$$

Τη μέγιστη τιμή την παίρνει όταν:

$$\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}y}{-2\sqrt{2}}=\frac{2z}{4} \Leftrightarrow x=-y=z$$

και από

$$x^2+2y^2+4z^2=28 \Rightarrow 7x^2=28 \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=2$$

5. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ να δειχτούν οι ανισότητες

i) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\geqslant 9\alpha\beta\gamma$

ii) $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)\geqslant 6\alpha\beta\gamma$

iii) $$\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{3}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{3}{\alpha+\gamma+\delta}+$$

$$+\frac{3}{\beta+\gamma+\delta}\geqslant\frac{16}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

Υπόδειξη:

i) Έχουμε ισοδύναμα:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\geqslant 9 \Leftrightarrow$$

$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geqslant 3^2$ που ισχύει γιατί;

ii) Διαιρούμε με $\alpha\beta\gamma\neq 0$ και παίρνουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\alpha+\gamma}{\beta}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\geqslant 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+1+\frac{\alpha+\gamma}{\beta}+1+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+1\geqslant 6+1+1+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\geqslant 9 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geqslant 3^2$$

iii) Έχουμε:

$$3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left[\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta+\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{1}{\beta+\gamma+\delta}\right]\geqslant 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\delta)+(\alpha+\gamma+\delta)+(\beta+\gamma+\delta)\right]$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta+\delta}...\right]\geqslant 4^2$$

6. Αν $x, y, z>0$ και $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ να δειχτεί ότι: $xy+yz+zx\geqslant 3xyz$.

Υπόδειξη:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\geqslant 3^2 ...$$



7. Αν $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ και $xy+yz+zx=12$ να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης

$$x+y+z.$$

Υπόδειξη:

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2)\geqslant(xy+yz+zx)^2 \Rightarrow$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant 12^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \geqslant 12.$$

Είναι όμως

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqslant$$
$$\geqslant 12 + 2\cdot 12 \quad \Rightarrow$$
$$(x+y+z)^2 \geqslant 36 \quad \Rightarrow \quad x+y+z \geqslant 6$$

8. Αν $xy+yz+zx = xyz \neq 0$ και

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 = x^3y^3z^3$$

να δειχτεί ότι:

i) $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$

ii) τουλάχιστον ένας από τους x, y, z είναι ίσος με τη μονάδα.

Υπόδειξη:

i) $(xy+yz+zx)^3 = (xyz)^3 \quad \Rightarrow$

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) =$$
$$= x^3y^3z^3 \quad \Rightarrow \quad 3xyz(x+y)(y+z)(z+x) = 0$$

ii) Από i) $\Rightarrow$ $x=-y$ ή $y=-z$ ή $z=-x$

έστω $x=-y \Rightarrow -y\cdot y + y\cdot z + z\cdot(-y) = -y\cdot y\cdot z \Rightarrow$

$-y^2+yz-zy = -y^2z \quad \Rightarrow \quad -y^2 = -y^2\cdot z \quad \Rightarrow \quad z=1$

9. Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ να δειχτεί ότι:

i) $\alpha^{1989}+\beta^{1989}+\gamma^{1989} = (\alpha+\beta+\gamma)^{1989}$

ii) $(\alpha+\beta+\gamma)^{2\kappa+1} = \alpha^{2\kappa+1}+\beta^{2\kappa+1}+\gamma^{2\kappa+1}, \quad \kappa\in N$

Υπόδειξη:

Ανάπτυξε την παράσταση $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ και δείξε ότι δυο τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι αντίθετοι.

10. Να γίνει γινόμενο η παράσταση

$$\Pi = 8(x+y+z)^3-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3$$

Υπόδειξη:

$$8(x+y+z)^3 = 2^3(x+y+z)^3 = (2x+2y+2z)^3 =$$
$$= \left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]^3$$

Να λυθούν οι ασκήσεις:

1. Αν δυο από τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ δεν είναι 0, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2} \geqslant \frac{3}{2}$$

2. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu \in R$ να δειχτεί ότι:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_\nu^2 \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\alpha_\nu\alpha_1$$

3. Αν $x, y, z > 0$, $x+y+z=\alpha$ να βρεθεί το ελάχιστο της παράστασης

$$\kappa = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

4. Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leqslant 1$ να δειχτεί ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} \geqslant (x+y+z)^2$$

5. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να δειχτεί ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \geqslant (\alpha+\beta+\gamma)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ να δειχτεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha} \geqslant \frac{9}{2}\ \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

7. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in N^*$ να δειχτεί ότι:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \geqslant \alpha+\beta+\gamma$$

πότε ισχύει η ισότητα;

8. Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ να δειχτεί ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3 = 3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)$$

9. Αν α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου ΑΒΓ να δειχτεί ότι ισχύει:

i) $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \geqslant \alpha+\beta+\gamma$

ii) Αν ισχύει η ισότητα να δειχτεί ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

10. Αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=0$ και

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3+\zeta^3=0$$

να δειχτεί ότι:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\delta+\varepsilon)(\varepsilon+\zeta)(\zeta+\delta)=0$$

11. Να λυθεί το σύστημα

$$8\left[(x+3)^2+(y-2)^2+(x+y-z)^2\right]^3 -$$
$$-\left[(y-2)^2+(x+y-z)^2\right]^3-\left[(x+y-z)^2+(x+3)^2\right]^3 -$$
$$-\left[(x+3)^2+(y-2)^2\right]^3 = 0$$

Φίλε μαθητή της Α΄ Λυκείου

Η στήλη αυτή απευθύνεται σε σένα. Περιμένουμε γράμμα σου με κρίσεις για τη στήλη, υποδείξεις και προτάσεις για βελτίωσή της και με λυμένες ασκήσεις από αυτές που σου προτάθηκαν. Μην διστάζεις, ότι μας γράψεις θα είναι ευπρόσδεκτο. Άλλωστε η καλόπιστη κριτική βοηθάει στη βελτίωση της στήλης.



Πανελλήνιος Μαθητικός διαγωνισμός στα Μαθηματικά 7 Νοε. '87

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Δίνεται το πολυώνυμο $\phi(x) = 2x - 1$

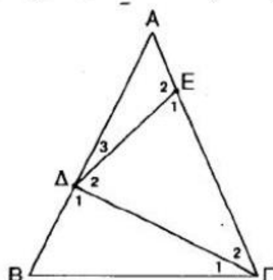
i) Να λυθεί η εξίσωση

$$\phi(0) + \phi(-1) + \phi(1) + \phi(-x) = x.$$

ii) Να υπολογιστεί ο αριθμός λ όταν είναι γνωστό ότι

$$\lambda\phi\left(\frac{1}{2}\right) - 2\phi\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 3 - \frac{\lambda}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο: Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, φέρνουμε το ύψος ΓΔ και επί της ΓΑ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΕ = ΓΔ. Φέρνουμε και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ. Αν $\hat{A} = 50°$, να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\Delta}_2$, $\hat{\Delta}_3$, $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ και $\hat{B}$ (Βλ. σχήμα)



ΘΕΜΑ 3ο: (α) Αν $\alpha = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$

και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$,

να υπολογίσετε τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$. Τι παρατηρείτε;

(β) Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ και $\alpha(\beta^2 + 1) = \beta(\alpha^2 + 1)$, να υπολογίσετε το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

ΘΕΜΑ 4ο: Από τις παρακάτω τέσσερες προτάσεις μία είναι ψευδής και οι υπόλοιπες είναι αληθείς.

(1) Ο Αντώνης είναι μεγαλύτερος από τον Βασίλη.

(2) Ο Βασίλης είναι μεγαλύτερος από τη Γεωργία.

(3) Η Γεωργία είναι μεγαλύτερη από τον Αντώνη.

(4) Η ηλικία του Βασίλη προστιθέμενη στην ηλικία της Γεωργία ισούται με το διπλάσιο της ηλικίας του Αντώνη.

(α) Να βρείτε ποια είναι η ψευδής πρόταση.

(β) Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: i) $x = -4/3$, ii) $\lambda = -2/5$

ΘΕΜΑ 2ο: $\hat{\Delta}_2 = 70°$, $\hat{\Delta}_3 = 20°$, $\hat{\Gamma}_1 = 25°$, $\hat{\Gamma}_2 = 40°$, $\hat{E}_1 = 70°$ $\hat{E}_2 = 110°$, $\hat{B} = 65°$

ΘΕΜΑ 3ο: (α) $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, δηλ. $\alpha = -\beta$.

(β) $\alpha\beta = 1$.

ΘΕΜΑ 4ο: (α) Έστω Α, Β και Γ οι ηλικίες του Αντώνη, Βασίλη και Γεωργίας αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση (1) είναι ψευδής (δηλ. $A \leqslant B$), τότε οι υπόλοιπες είναι αληθείς, δηλ.

$$B > \Gamma, \quad \Gamma > A \quad \text{και} \quad B + \Gamma = 2A.$$

Από $B > \Gamma$ και $\Gamma > A$ βλέπουμε ότι

$$B + \Gamma > A + \Gamma > 2A$$

που αντίκειται στην πρόταση (3). Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι προτάσεις (3) και (4) είναι αληθείς. Άρα η (2) είναι ψευδής.

(β) Από το μέρος (α) έχουμε $\Gamma > A > B$, δηλαδή μικρότερος είναι ο Βασίλης και μεγαλύτερη η Γεωργία.

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Τα μέτρα των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} + \frac{\beta - \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} = 0$$

Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, δηλ. είναι το τρίγωνο ορθογώνιο, ισόπλευρο κ.λπ.;

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνονται τέσσερεις αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4 μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός και μικρότεροι από τη μονάδα.

Ν' αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον απ' αυτούς έχουν απόλυτη τιμή της διαφοράς μικρότερη από το 1/3.

ΘΕΜΑ 3ο: Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ρ στο επίπεδο του τετραπλεύρου. Αν (ΑΒ) = α, (ΒΓ) = β, (ΓΔ) = γ, (ΔΑ) = δ, (ΡΑ) = x_1, (ΡΒ) = x_2, (ΡΓ) = x_3, (ΡΔ) = x_4, ν' αποδείξετε ότι

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta(x_2 + x_3) + \gamma(x_3 + x_4) +$$
$$+ \delta(x_4 + x_1) > \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

ΘΕΜΑ 4ο: Δύο διαφορετικά σημεία Κ και Λ του επιπέδου θα λέγονται **γειτονικά** αν η απόστασή τους ΚΛ είναι μικρότερη ή ίση του ενός εκατοστού του μέτρου. Να δείξετε ότι τέσσερα σημεία του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε, καθένα απ' αυτά να είναι γειτονικό με δύο τουλάχιστον από τα υπόλοιπα τρία, περιέχονται σε κυκλικό δίσκο με ακτίνα ένα εκατοστό του μέτρου.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = 0$$

και έτσι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 2ο: Πρώτη απόδειξη: Τουλάχιστον δύο από τους 4 αριθμούς θα πρέπει να βρίσκονται σ' ένα από τα διαστήματα $[0, 1/3)$, $[1/3, 2/3)$, $[2/3, 1)$ και άρα η απόστασή τους θα είναι $< 1/3$.

Δεύτερη απόδειξη: Έστω ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 1$$

και άρα

$$x_2 - x_1 \geqslant 1/3,\ x_3 - x_2 \geqslant 1/3,\ x_4 - x_3 \geqslant 1/3$$

και προσθέτοντας έχουμε $x_4 - x_1 \geqslant 1$. Άτοπο!

ΘΕΜΑ 3ο: $x_1 + x_2 > \alpha$, $x_2 + x_3 > \beta$, $x_3 + x_4 > \gamma$, $x_4 + x_1 > \delta$ (ανισότητα τριγώνου). Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με α, την δεύτερη με β, την τρίτη με γ, την τέταρτη με δ και προσθέτουμε.

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω Α, Β, Γ, Δ τα 4 διαφορετικά σημεία του επιπέδου. Αν ένα απ' αυτά, π.χ. το Α είναι γειτονικό με όλα τα υπόλοιπα, τότε ο κύκλος με κέντρο το Α και ακτίνα 1 θα περιέχει και τα τέσσερα σημεία. Έστω ότι το καθένα από τα σημεία έχει ακριβώς δύο γειτονικα, π.χ. Α γειτονικό Β και Γ, Δ γειτονικό με Β και Γ, τότε το μέσο του ΑΔ μπορεί να ληφθεί ως το κέντρο του ζητούμενου κύκλου (ανισότητα τριγώνου, ανισότητα διαμέσου).

ΘΕΜΑΤΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Να βρεθούν οι πραγματικές λύσεις (ρίζες της εξίσωσης:

$$2x^2 + \sqrt{x^2 + 5} = x^4 - 5$$

ΘΕΜΑ 2ο: Να βρεθεί η γενικότερη μορφή δευτεροβάθμιου πολυωνύμου Π(x) με συντελεστές ρητούς αριθμούς που έχει την εξής ιδιότητα: Όταν το x είναι ακέραιος αριθμός τότε και το Π(x) είναι ακέραιος αριθμός.

ΘΕΜΑ 3ο: Ν' αποδειχτεί ότι αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει η σχέση

$$\alpha\beta^2 \text{συν}A = \beta\gamma^2 \text{συν}B = \gamma\alpha^2 \text{συν}\Gamma,$$

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 4ο: Μία ευθεία ε περνά το βαρύκεντρο Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Ν' αποδείξετε ότι

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA}$$

έχει την ίδια τιμή για όλες τις δυνατές θέσεις της ευθείας ε.

(Το βαρύκεντρο είναι το σημείο τομής των διαμέσων).

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Η εξίσωση είνα ισοδύναμη με

$$\left(\sqrt{x^2 + 5} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

και άρα αρκεί να λύσουμε τις δυο εξισώσεις

$$\sqrt{x^2 + 5} + \frac{1}{2} = \pm\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

δηλ. $\sqrt{x^2 + 5} = x^2 - 1$, $\sqrt{x^2 + 5} = -x^2$.

Η δεύτερη δεν έχει πραγματικές ρίζες και η πρώτη έχει τις ρίζες $x = \pm 2$.

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω $\Pi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$,

$$\kappa = \Pi(O) = \gamma \in \mathbb{Z},\ \lambda = \Pi(1) = \alpha + \beta + \gamma \in \mathbb{Z}$$
$$\mu = \Pi(-1) = \alpha - \beta + \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$\Pi(x) = \left[\frac{1}{2}(\lambda + \mu) - \kappa\right]x^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)x + \kappa,$$

$\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

Είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Pi(x) \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ 3ο: Οι σχέσεις που μας δίνονται έχουν σαν επακόλουθο ότι συνΑ > 0, συνΒ > 0, συνΓ > 0 γιατί μόνο μία απ' τις γωνίες τριγώνου μπορεί να είναι ορθή η αμβλεία. Έστω $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

Τότε $0 < \sigma\upsilon\nu A \leqslant \sigma\upsilon\nu B \leqslant \sigma\upsilon\nu\Gamma$

και άρα $\beta\gamma^2\ \sigma\upsilon\nu B \leqslant \alpha\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma \leqslant \alpha^2\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$

Επειδή $\beta\gamma^2\ \sigma\upsilon\nu B = \alpha^2\gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma$

(Υπόθεση) συνάγουμε ότι $\alpha = \beta$, $B = \Gamma$ και άρα

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω α παράλληλος προς τη ΒΓ που άγεται από την κορυφή Α και έστω Κ και Λ τα σημεία τομής της ε με την ευθεία ΒΓ και α αντίστοιχα. Τότε

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{KB}{A\Lambda}, \qquad \frac{E\Gamma}{EA} = \frac{\Gamma K}{A\Lambda}$$

και επομένως

$$\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA} = \frac{KB + K\Gamma}{A\Lambda}$$

Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ τότε $KB + K\Gamma = 2KM$ και $KM/A\Lambda = 1/2$. Άρα η ποσότητα $\frac{\Delta B}{\Delta A} + \frac{E\Gamma}{EA}$ είναι ίση με 1.

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Έστω Μ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Στο επίπεδο του τετραπλεύρου ορίζονται τα σημεία Κ και Λ από τις σχέσεις $\vec{AK} = \vec{MB}$ και $\vec{K\Lambda} = \vec{M\Gamma}$. Να δείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΛΔ.

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g: R \to \mathbb{R},\ h: R \Leftrightarrow \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \quad f(g(x)) = x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και δίνεται πραγματικός αριθμός α με $|\alpha| \neq 1$. Ν' αποδείξετε ότι υπάρχει μία και μόνο μία συνάρτηση $f: R \Leftrightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\alpha f(x) + f(g(x)) = h(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 3ο: Αν ένας n x n πίνακας Α ικανοποιεί τη σχέση

$$A^2 - 3A + 2I = O$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος n x n πίνακας και O ο μηδενικός n x n πίνακας, ν' αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$ ισχύει η σχέση

$$A^{2\nu} - (2^\nu + 1)\ A^\nu + 2^\nu I = O.$$

ΘΕΜΑ 4ο: Για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geqslant 2$ ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός α_ν από τη σχέση

$$\frac{[\alpha_\nu]\ \{\alpha_\nu\}}{\alpha_\nu} = \nu$$

όπου $\{\alpha_\nu\} = \alpha_\nu - [\alpha_\nu]$ και $[\alpha_\nu]$ είναι το ακέραιο μέρος του α_ν. Να δείξετε ότι αν $\nu > 45$, τότε

$$|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| < 1/1987$$

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο: Έστω Ν και Ρ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

$$\vec{MN} = -\vec{MP}, \qquad \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB}),$$

$$\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{M\Delta} = -(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma}) \qquad (1)$$

$$\vec{M\Lambda} = \vec{MK} + \vec{K\Lambda} = 2\vec{MN} + \vec{M\Gamma} =$$

$$= \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow \vec{M\Lambda} + \vec{M\Delta} = \vec{O}$.

ΘΕΜΑ 2ο: Με αντικατάσταση του x με g(x) παίρνουμε

$$f(x) + \alpha f(g(x)) = h(x).$$

Λύνοντας ως προς f(x) έχουμε

$$f(x) = [\alpha h(x) - h(g(x))] / (\alpha^2 - 1).$$

ΘΕΜΑ 3ο: Επαγωγή επί του ν.

$$A^{2\nu+2} = A^{2\nu}A^2 = [(2^\nu + 1)\ A^\nu - 2^\nu I]\ (3A - 2I) =$$

$$= (2^{\nu+1} + 1)\ A^{\nu+1} - 2^{\nu+1}I + 2(2^{\nu-1} + 1)A^{\nu+1} -$$

$$- 2(2^\nu + 1)\ A^\nu - 3 \cdot 2^\nu A + 2^{\nu+2}I.$$



Στιγμιότυπο από τον Πανελλήνιο Μαθητικό Διαγωνισμό στα Μαθηματικά στη Λάρισα

'Αρα αρκεί ν' αποδειχτεί ότι

$$(2^{\nu-1} + 1)\, A^{\nu+1} - (2^{\nu} + 1)\, A^{\nu} - 3 \cdot 2^{\nu-1}\, A + 2^{\nu+1}] = 0$$

Επαγωγή πάλι. $(2^{\nu} + 1)\, A^{\nu+2} =$

$$= (2^{\nu} + 1)\, A^{\nu}\, (3A - 2I) = (2^{\nu+1} + 1)\, A^{\nu+1} +$$

$$+ 2[(2^{\nu-1} + 1)\, A^{\nu+1} - (2^{\nu} + 1)A^{\nu}] =$$

$$= (2^{\nu+1} + 1)\, A + 2[3 \cdot 2^{\nu-1}A - 2^{\nu+1}I] =$$

$$= (2^{\nu+1} + I)\, A + 3 \cdot 2^{\nu}A - 2^{\nu+2}I.$$

ΘΕΜΑ 4ο: Είναι προφανές ότι $\alpha_\nu < 0$, διότι αν $\alpha_\nu > 0$, τότε

$$[\alpha_\nu]\, \{\alpha_\nu\} < [\alpha_\nu] \leqslant \alpha_\nu,$$

οπότε $\nu < 1$. 'Ατοπο. 'Εστω $\alpha_\nu = -\, k_\nu$, $k_\nu > 0$.

Τότε $\{\alpha_\nu\} = \nu\, \alpha_\nu/[\alpha_\nu] =$

$$= -\, \nu k_\nu/(-\, k_\nu - \{\alpha_\nu\}) = \nu k_\nu/(k_\nu + \{\alpha_\nu\}).$$

'Αρα $\{\alpha_\nu\}^{\nu} + k_\nu\, \{\alpha_\nu\} - \nu k_\nu = 0$,

οπότε $\{\alpha_\nu\} = \dfrac{1}{2}\, ((k_\nu^2 + 4\nu k_\nu)^{1/2} - k_\nu) < 1$ (1)

'Αρα $(k_\nu^2 + 4\nu k_\nu)^{1/2} < 2 + k_\nu$,

δηλ. $k_\nu\, (\nu - 1) < 1$, δηλ. $K_\nu < 1/(N - 1)$.

'Αρα $[k_\nu] = 0$, δηλ. $[-\, k_\nu] = -\, 1 = [\alpha_\nu]$,

δηλ. $\{\alpha_\nu\} = 1 - k_\nu$ Από την (1) έχουμε

$$(k_\nu^2 + 4\nu k_\nu)^{1/2} - k_\nu = 2(1 - k_\nu),$$

δηλ. $k_\nu = 1/(\nu + 1)$ 'Ετσι

$$|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| = |k_\nu - k_{\nu-1}| = 1/\nu(\nu + 1) < 1/1987$$

αν $\nu > 45$

ΑΘΗΝΑ 20 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1987
Η ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΤΗΣ ΕΜΕ

Α.Ν. Κολμογκόρωφ (1903-1987)

Δ.Γ. Κοντογιάννης

Πριν λίγο καιρό (24 Οκτώβρη) πέθανε ο μεγάλος Σοβιετικός μαθηματικός Α.Ν. Κολμογκόρωφ.

Ο Κολμογκόρωφ γεννήθηκε το 1903 και φοίτησε στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας, από το οποίο πήρε το δίπλωμά του το 1925, ενώ το 1931 έγινε καθηγητής στο ίδιο Πανεπιστήμιο.

Οι εργασίες του Κολμογκόρωφ αφορούν όλους τους κλάδους των μαθηματικών, αλλά αξεπέραστες θα παραμείνουν εκείνες που αφορούν στη θεωρία των πιθανοτήτων. Είναι γνωστό ότι το 1932 ο Κολμογκόρωφ ήταν αυτός που δημιούργησε την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας και για το λόγο αυτό είχε ονομασθεί «ο Ευκλείδης της θεωρίας Πιθανοτήτων».

Αλλά πάνω απ' όλα ο Κολμογκόρωφ ήταν ένας μεγάλος δάσκαλος. 'Οχι μόνο γιατί από το «εργαστήρι» του του πανεπιστημίου της Μόσχας πέρασαν πλήθος διάσημοι μαθηματικοί, αλλά κύρια γιατί μέχρι τα τελευταία χρόνια της πληθωρικής ζωής του δούλευε και πειραματίζονταν πάνω στα μεγάλα παιδαγωγικά προβλήματα, ενώ παράλληλα καθοδηγούσε κάθε νέο μαθηματικό που κατέφευγε σ' αυτόν.

'Ηταν μέλος της οργανωτικής επιτροπής της 1ης Μαθηματικής Ολυμπιάδας της Μόσχας (1935) και πρόεδρος της επιτροπής το 1937, το 1963 και το 1975, ενώ παράλληλα δεν έπαψε ποτέ να διδάσκει τους ταλαντούχους μαθητές που διακρίνονταν στις μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Το 1950 ο Κολμογκόρωφ γίνεται πρόεδρος της Συντακτικής επιτροπής του περίφημου σοβιετικού περιοδικού «Τα μαθηματικά στο σχολείο» από τις στήλες του οποίου όχι μόνο τακτικά αρθρογραφούσε, αλλά και πρότεινε ασκήσεις και έστελνε λύσεις σε προτεινόμενες από άλλους ασκήσεις.

Το 1970 γίνεται αντιπρόεδρος της Συντακτικής επιτροπής του γνωστού σοβιετικού περιοδικού «Κβάντ».

Στο πρώτο κιόλας τεύχος του περιοδικού υπάρχει η παρακάτω άσκηση που προτάθηκε από τον Κολμογκόρωφ (Μ3).

α) Το επίπεδο μπορούμε να το καλύψουμε από τετράγωνα 5 διαφορετικών χρωμάτων που τα κέντρα τους ανήκουν σε μια τετραγωνική κιγκλίδα.

Για ποιους αριθμούς χρωμάτων μια τέτοια κάλυψη του επιπέδου είναι δυνατή;

β) Το επίπεδο μπορούμε να το καλύψουμε από κανονικά εξάγωνα 7 διαφορετικών χρωμάτων που τα κέντρα τους ανήκουν σε μια κιγκλίδα με βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Για ποιο αριθμό χρωμάτων είναι δυνατή μια ανάλογη κάλυψη του επιπέδου;

ΣΤΗΛΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΩΝ

Επιμέλεια: Επιτροπή διαγωνισμών Ολυμπιάδων*

27η ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

1ο Θέμα **(ΒΕΛΓΙΟ)** (Γ. Τζήκας-**Σέρρες**).

• Να βρείτε τα οκτώ τελευταία ψηφία του αριθμού 27^{1986}, όταν αυτός είναι γραμμένος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση

• Ας είναι

$$\alpha = 27^{1986} \text{ και } \alpha = \alpha_\nu 2^\nu + \alpha_{\nu-1}2^{\nu-1} + \ldots + \alpha_8 2^8 + \alpha_7 2^7 + \ldots \alpha_1 2 + \alpha_0: (1)$$

με $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_0 \in \{0, 1\}$ το δυαδικό ανάπτυγμα του α.

Η σχέση (1) γράφεται:

$$\alpha = (\alpha_\nu 2^{\nu-8} + \ldots + \alpha_8)\, 2^8 + (\alpha_7 2^7 + \ldots + \alpha_1 2 + \alpha_0),$$

δηλ. ο αριθμός $\upsilon = \alpha_7 2^7 + \alpha_6 2^6 + \ldots + \alpha_1 2 + \alpha_0$ του δυαδικού συστήματος είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $(\alpha:2^8)$ και τα 8 τελευταία ψηφία του α είναι τα $\alpha_7, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του υπόλοιπου της διαίρεσης $(\alpha = 27^{1986} : \beta = 2^8 = 256)$.

Ο $\alpha = 27^{1986} = (3^3)^{1986} = 3^{3.1986} = 3^{5958} = (3^2)^{2979} = 9^{2979} = (1+8)^{2979} = (1+2^3)^{2979}$ ή αν εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\alpha = (1+2^3)^{2979} = \sum_{k=0}^{2979} \binom{2979}{\kappa} 1^{2979-\kappa} (2^3)^\kappa = \sum_{k=0}^{2979} \binom{2979}{\kappa} 2^{3\kappa}$$

$$= \binom{2979}{0} 2^0 + \binom{2979}{1} 2^3 + \binom{2979}{2} 2^6 +$$

$$\left[\binom{2979}{3} 2^9 + \binom{2979}{3} 2^{12} + \ldots + \binom{2979}{2979} 2^{5958} \right] =$$

$$1 + 2979 \cdot 2^3 + \frac{2979.2979}{1 \cdot 2} \cdot 2^6 + \text{πολ } 2^8 =$$

$$1 + 2979 \cdot 2^3 + 2979 \cdot 1489 \cdot 2^6 + \text{πολ } 2^8 =$$

$$1 + (93.2^5 + 3)\, 2^3 + (744.2^2 + 3)\,(372.2^2 + 1)\, 2^6 + \text{πολ}2^8 = 1 + 93 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^3 + 744 \cdot 372 \cdot 2^{10} +$$

$$744 \cdot 2^8 + 3 \cdot 372 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^6 + \text{πολ } 2^8 =$$

$$= 1 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^6 + (93 \cdot 2^8 + 744 \cdot 372 \cdot 2^{10} + 744 \cdot 2^8 + 3 \cdot 372 \cdot 2^8 + \text{πολ}2^8) =$$

$$1 + (1+2)\, 2^3 + + (1+2)\, 2^6 + \text{πολ}2^8 =$$

$$1 + 2^3 + 2^4 - 2^6 + 2^7 + \text{πολ}2^3,$$

άρα

$$\upsilon = \alpha_0 + \alpha_1 2 + \alpha_2 2^2 + \alpha_3 2^3 + \alpha_4 2^4 + \alpha_5 2^5 + \alpha_6 2^6 + \alpha_7 2^7 = 1 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = 0,\ \alpha_6 = 1,\ \alpha_7 = 1$$

28η ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

(Χ. Αθανασιάδης-**Θεσ/νίκη)**

1ο Θέμα: Δίνεται το σύνολο {1, 2, ..., n}. Έστω Pn(k) ο αριθμός των μεταθέσεων αυτού του συνόλου που έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Να δειχτεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot Pn(k) = n!$$

Απόδειξη:

Θεωρώ το σύνολο των μεταθέσεων του { 1, 2, ..., n } που αφήνουν κ σταθερά σημεία, έστω το Νκ. Από τα στοιχεία του Νκ θεωρώ αυτά που έχουν σταθερό το 1. Αυτά είναι τόσα όσα οι μεταθέσεις συνόλου με n−1 (διαφορετικά) στοιχεία που αφήνουν κ−1 σταθερά σημεία, δηλαδή σε πλήθος $P_{n-1}(\kappa-1)$. Όμοια τα στοιχεία του Νκ (με κ 0 1, κ ∈ ℕ) που αφήνουν το 2 σταθερό είναι σε πλήθος $P_{n-1}(\kappa-1)$ κ.λπ., το πλήθος των στοιχείων του Νκ που αφήνουν το n σταθερό είναι $P_{n-1}(\kappa-1)$. Έτσι μετρήσαμε συνολικά $n\,P_{n-1}(\kappa-1)$ μεταθέσεις που είναι στοιχεία του Νκ. Κάθε μία όμως μετάθεση του Νκ, π.χ. μια που έχει σταθερά σημεία τα $i_1, i_2, \ldots, i_\kappa \in \{1, 2, \ldots, n\}$ μετρήθηκε ακριβώς κ φορές (μια όταν κρατήσαμε σταθερό το i_1, μια όταν κρατήσαμε σταθερό το i_2, ..., ως το i_k).

Επομένως $P_n(\kappa) = \dfrac{n}{\kappa} P_{n-1}(\kappa-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \kappa \cdot Pn(k) = n\, P_{n-1}(\kappa-1).$$

Άρα: $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{n} \kappa\, Pn(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{n} \kappa Pn(\kappa) =$

(Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Β. Ζώτος, Γ. Ωραιόπουλος, Β. Ντζιαχρήστος, Γ. Τυρλής).

$$\sum_{\kappa=1}^{n} n\cdot P_{n-1}(\kappa-1) = n\sum_{\kappa=1}^{n} P_{n-1}(\kappa-1).$$

Αλλά το

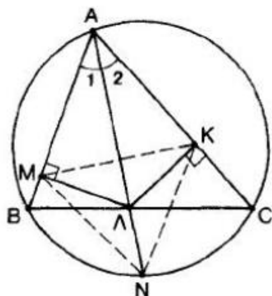
$$\sum_{\kappa=1}^{n} P_{n-1}(\kappa-1) =$$

$$P_{n-1}(0) + P_{n-1}(1) + ... + P_{n-1}(n-1)$$

είναι όλες οι μεταθέσεις συνόλου με $n-1$ διαφορετικά στοιχεία, δηλαδή $n-1)!$

Άρα $\sum_{\kappa=0}^{n} \kappa\, Pn(\kappa) = n\cdot(n-1)\,! = n!$

2ο Θέμα: Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Psi$ και η διχοτόμος ΑΛ η οποία προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ν. Από το Λ φέρνουμε κάθετες στις πλευρές και τα ίχνη είναι Μ, Κ. Να δείξετε ότι (ABC) = (AKNM).



Απόδειξη: Εφόσον $\Lambda \in \delta\alpha$ είναι φανερό ότι $MK \perp AN$ (αφού $AM = AK$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$).

Άρα $(AKNM) = \frac{1}{2} MK \cdot AN.$

Αλλά $MK = \delta_\alpha \eta\mu A \Rightarrow (AKNM) =$

$= \frac{1}{2}\eta\mu A\,(A\Lambda \cdot AN) = \frac{1}{2}\eta\mu A \cdot AB \cdot AC = (ABC)$

αφού είναι γνωστό ότι

$$A\hat{B}\Lambda \simeq A\hat{N}C \Rightarrow AB \cdot AC = A\Lambda \cdot AN.$$

4ο Θέμα: Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

ώστε $f[f(\nu)] = \nu + 1987 \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f. Η f τότε θα είναι 1—1 διότι

$f(\nu_1) = f(\nu_2) \Rightarrow f[f(\nu_1)] = f[f(\nu_2)] \Rightarrow \nu_1 = \nu_2.$

Επίσης $f(\nu) \neq \nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$

Αν στη δοσμένη σχέση τώρα βάλουμε όπου ν το f(ν) παίρνουμε

$$f[f[f(\nu)]] = f(\nu) + 1987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\nu+1987) = f(\nu) + 1987 \qquad (1)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο ν ισχύει

$$f(\nu) = 1987 + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{N}.$$

Είναι $f(\nu) = 1987 + \kappa \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f[f(\nu)] = f(1987+\kappa) \Leftrightarrow \nu + 1987 =$

$= f(\kappa) + 1987 \Leftrightarrow \nu = f(\kappa),$

δηλ. ισχύει η $f(\nu) = 1987 + \kappa \Leftrightarrow \nu = f(\kappa) \quad (2)$

(έχουμε ισοδυναμία γιατί η f είναι 1—1).

Έστω τώρα τα σύνολα $A = \{0, 1, 2, ..., 1986\}$,

$$B = \{1987, 1988, ..., 3973\}$$

όπου $3973 = 1987 + 1986$,

και επίσης τα $A_1 = \{\nu \in A \,/\, f(\nu) \in A\}$,

$$B_1 = \{\nu \in A \,/\, f(\nu) \in B\}$$

Έστω $\nu \in A.$

Αν $f(\nu) \notin A$, $\exists\, \kappa \in \mathbb{N}$: $f(\nu) = 1987 + \kappa$,

οπότε από τη (2) $\nu = f(\kappa)$. Αν $\kappa \geqslant 1987$ τότε από την (1) $f(\kappa) \geqslant 1987$

αφού $f(n) \geqslant 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$,

άρα $\nu > 1987$, άτοπο.

Επομένως $\kappa < 1987.$

Δηλαδή $\nu \in A \Rightarrow f(\nu) \in (A \cup B)$

ή $\nu \in A \Rightarrow \nu \in (A_1 \cup B_1) \Rightarrow A \subseteq (A_1 \cup B_1)$

και αφού προφανώς $(A_1 \cup B_1) \subseteq A$,

θα είναι $A = A_1 \cup B_1.$

Εξάλλου $A_1 \cap B_1 = \varnothing.$

Θα δείξω τώρα ότι τα A_1, B_1 έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Έστω $\nu \in B_1$, δηλ. $\exists\, \kappa \in A$: $f(\nu) = 1987 + \kappa.$

Τότε απ' τη (2) $\nu = f(\kappa)$, $\kappa \in A$, $\nu \in A$,

άρα $\kappa \in A_1$, $\kappa \neq \nu.$

Αν λοιπόν $\nu \in B_1$,

τότε $f(\nu) - 1987 \in A_1$

και για διαφορετικά ν_1, ν_2 τα

$$f(\nu_1) - 1987,\ f(\nu_2) - 1987$$

είναι διαφορετικά.

Αν λοιπόν $N(A_1), N(B_1)$

είναι οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων A_1, B_1,

τότε $N(A_1) \geqslant N(B_1)$.

Όμοια αν $\kappa \in A_1$, δηλ. $\exists\ \nu \in A: f(\kappa) = \nu$,

τότε $f(\nu) = 1987 + \kappa \in B,\ \nu \in A$,

άρα $\nu \in B_1$.

Σε διαφορετικά $\kappa_1, \kappa_2, \in A_1$ αντιστοιχούν διαφορετικά $\nu_1 = f(\kappa_1)$, $\nu_2 = f(\kappa_2)$ με $\nu_1, \nu_2 \in B_1$.

Άρα $N(B_1) \geqslant N(A_1)$.

Ώστε $N(A_1) = N(B_1)$.

Αφού όμως τα A_1, B_1 είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους δίνει το A, θα είναι

$$N(A) = N(A_1) + N(B_1) = 2N(A_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1987 = \text{άρτιος, άτοπο!}$$

Η f λοιπόν δεν υπάρχει.

συνεχίζεται στο τεύχος 4

Ασκήσεις για τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Η στήλη μας στο τεύχος αυτό περιέχει ασκήσεις από το κεφάλαιο ΑΛΓΕΒΡΑ του βιβλίου **«Ασκήσεις από Μαθηματικές Ολυμπιάδες»** που θα εκδώσει σύντομα η ΕΜΕ.

Για τις παρακάτω ασκήσεις, που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα γνώσεων θα περιμένουμε τις λύσεις σας.

Α1. Να δείξετε ότι αν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$

($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$) τότε

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = 3$$

Α2. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta\,(\alpha+\beta)}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)} + \frac{\beta\gamma\,(\beta+\gamma)}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)} +$$

$$+\frac{\alpha\gamma(\alpha+\gamma)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}=\alpha+\beta+\gamma$$

$(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$.

A3. Αν $x^2 - yz = \alpha$, $y^2 - zx = \beta$, $z^2 - xy = \gamma$, τότε

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = (\alpha+\beta+\gamma)(x+y+z)$$

A4. Να δείξετε ότι:

$$\log_{\beta+\gamma}\alpha^2 + \log_{\gamma+\alpha}\beta^2 + \log_{\alpha+\beta}\gamma^2 \leqslant 3$$

A5. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta^3-1}-\frac{\beta}{\alpha^3-1}=\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha^2\beta^2+3}$$

όπου $\alpha+\beta=1$ $(\alpha\neq 1, \beta\neq 1)$

A6. Να ορίσετε τους αριθμούς Α, Β, Γ ώστε για κάθε φυσικό αριθμό να ισχύει η ισότητα:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{\nu}{2^\nu}=\frac{A\nu+B}{2^\nu}+\Gamma$$

A7. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha = 1$, να δείξετε ότι:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_\nu)\geqslant 2^\nu$$

A8. Αν $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, ..., $\alpha_\nu > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{2}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_3}+\dots+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_\nu}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}+\dots+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_\nu}+\dots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu}\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_3}+\dots+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_\nu}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_3}+\dots+\frac{1}{\alpha_2+\alpha_\nu}+\dots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu}\right)^2$$

όπου $\binom{\nu}{2}=\frac{\nu!}{2!\,(\nu-2)!}$

A9. α) Να δείξετε ότι:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa)^2\leqslant\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2)\quad(1)$$

όπου φυσικός αριθμός $\geqslant 1$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ πραγματικοί αριθμοί.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ ισχύει η σχέση

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu\geqslant\sqrt{(\nu-1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2)}$$

τότε οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ δεν είναι αρνητικοί.

A10. Αν ν θετικός αριθμός να δείξετε ότι:

α) $\log(\nu+1)>\frac{3}{10}+\log\eta$

β) $\log(\eta!)>\frac{3}{10\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu}-1\right)$

A11. Αν α, β θετικοί και m ακέραιος αριθμός, να δείξετε ότι:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)^m+\left(1+\frac{\beta}{q}\right)^m\geqslant 2^{m+1}$$

A12. Να δείξετε ότι:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots+\frac{1}{\nu^3}\leqslant\frac{5}{4}$$

A13. Τρεις θετικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3 ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$x_1x_2x_3>1,\quad x_1+x_2+x_3<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}.$$

Να δείξετε

α) Οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι διαφορετικοί από τον 1.

β) Μόνος ένας από αυτούς τους αριθμούς είναι μικρότερος από τον 1.

A14. Αν $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\nu$ $(\nu\geqslant 2)$ είναι φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\kappa_1!\,\kappa_2!\dots\kappa_\nu!\geqslant\left(\left[\frac{\kappa}{\nu}!\right]\right)^\nu$$

όπου $\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_\nu$

{[x] είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού x}.

A15. Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί από τον $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, που ικανοποιούν τη σχέση $x+y+z=xyz$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=$$

$$=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

A16. Αν α, β, γ, δ θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{4}}$$

A17. Αν $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$ όπου $x_1, x_2, \dots, x$ θετικοί φυσικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_\nu^5) + (x_1^7 + x_2^7 + \dots + x_\nu^7) \geqslant$$
$$\geqslant 2\,(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_\nu^3)^2$$

Να δείξετε ακόμα ότι το ίσον ισχύει αν και μόνο αν $x_\kappa = \kappa$ ($\kappa = 1, 2, \dots, \nu$).

A18. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{3}\nu^2 + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{6} \geqslant (\nu!)^{2/\nu}$$

(ν φυσικός αριθμός).

A19. Αν δυο από τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ δεν είναι 0, να δείξετε ότι:

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2+\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2+\beta^2} \geqslant \frac{3}{2}$$

A20. Αν $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 = 1$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\min\,(\alpha_i - \alpha_j)^2 \leqslant \frac{1}{10} \quad \text{όπου } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$$

A21. Έστω $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x$ και $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y$. Αν $z_1, z_2, \dots, z$ μια τυχαία μετάθεση των αριθμών $y_1, y_2, \dots, y$ να δείξετε ότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu} (x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{j=i}^{\nu} (x_i - y_j)^2$$

A22. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant 1 \quad \text{και} \quad \alpha_\nu - 2\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} \geqslant 0$$

για κάθε $\nu = 1, 2, \dots$ να δείξετε ότι:

$$0 \leqslant (\nu+1)\,(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1}) \leqslant 2 \text{ για κάθε } \nu = 1, 2, \dots$$

A23. Θεωρούμε μιαν ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\nu+1}$ πραγματικών αριθμών για τους οποίους ισχύει ότι

$\alpha_0 = \alpha_{\nu+1} = 0$ και $|\alpha_{\kappa-1} - 2\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1}| \leqslant 1$ για $\kappa = 1, \dots, \nu$

Να δείξετε ότι:

$$|\alpha_\kappa| \leqslant \frac{\kappa\,(\nu+1-\kappa)}{2} \quad \text{για } \kappa = 0, 1, \dots, \nu+1$$

A24. Αν

$$(1x + 2x^2 + \dots + \nu x^\nu)^2 = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots \alpha_{2\nu} x^{2\nu},$$

να δείξετε ότι:

$$\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+1} + \dots + \alpha_{2\nu} = \binom{\nu+1}{2} \frac{(5\nu^2 + 5\nu + 2)}{12}$$

A25. Αν $\tau > s > 0$ και $\alpha > \beta > c > 0$ να δείξετε ότι:

$$\alpha^\tau\beta^s + \beta^\tau c^s + c^\tau\alpha^s \geqslant \alpha^s\beta^\tau + \beta^s c^\tau + c^s\alpha^\tau$$

A26. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παραστάσεως

$$\max\,(\alpha+\beta+\gamma,\ \beta+\gamma+\delta,\ \gamma+\delta+\varepsilon,$$
$$\delta+\varepsilon+\zeta,\ \varepsilon+\zeta+\eta)$$

όπου α, β, γ, δ, ε, ζ, η μη αρνητικοί αριθμοί, με $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta = 1$

A27. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης $m^2 + n^2$, όπου m, n ακέραιοι αριθμοί του διαστήματος [1, 1981] που ικανοποιούν τη σχέση

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$$

A28. Αν x, y, z μη αρνητικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$$

A29. Να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικοί αριθμοί $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ που ικανοποιούν την ισότητα:

$$\pi^{-1984} < 25 - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_\nu}\right) < \pi^{1984}$$

A30. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\{\log(\alpha\beta\gamma)^{-1} + \{\log(\alpha\beta\gamma)\}^{-1} + \{\log(\alpha\beta\gamma)\}^{-1}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$

A31. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_\nu.$$

Ορίζουμε $S_1 = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$, $S_2 = \sum_{1<i,j<\nu}^{\nu} \alpha_i \alpha_j$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha_1 \leqslant \frac{S_1}{n} - \sqrt{\frac{S_1^2}{2} - \frac{2S_2}{n(n-1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S_1}{n} + \sqrt{\frac{S_1^2}{2} - \frac{2S_2}{n(n-1)}} \leqslant \alpha$$

A32. Να δείξετε ότι για κάθε α, β, γ R ισχύει η ανισότητα:

$$(-\alpha + \beta + \gamma)^2 (\alpha - \beta + \gamma)^2 (\alpha + \beta - \gamma)^2 \geqslant$$

$$(-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Δ.Γ. Κοντογιάννη

Ο Σκανδιναβικός Διαγωνισμός "NIELS HENRIK ABEL" 1987

Οι Σκανδιναβικές χώρες έχουν ένα διαγωνισμό ανάλογο με τη Βαλκανική Ολυμπιάδα. Το διαγωνισμό Νιλς-Χένρικ Άμπελ, που γίνεται κάθε Μάρτη.

Στο διαγωνισμό αυτό δίνονται 4 θέματα και η διάρκειά του είναι 4 ώρες.

1ο θέμα:

α) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση g και ύψος h εγγράφουμε κύκλο με διάμετρο d. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{hd}.$$

β) Σε ένα ορθό κυκλικό κώνο με ύψος h και ακτίνα βάσης R είναι εγγεγραμμένη σφαίρα με ακτίνα t. Υποθέτουμε ότι $\frac{h}{R} = \frac{R}{r}$.

Να ορίσετε τη γωνία που σχηματίζει το ύψος και μια γεννέτηρα του κώνου.

γ) Στο εσωτερικό αυτού του κώνου είναι τοποθετημένες μερικές σφαίρες που εφάπτονται στην εγγεγραμμένη σφαίρα του κώνου, στη βάση και την επιφάνεια του κώνου. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός των σφαιρών αυτών;

2ο θέμα:

α) Να δείξετε ότι κάθε τέλειος κύβος είναι διαφορά δυο τελείων τετραγώνων.

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$x^\nu + 2y^\nu + 4z^\nu = 0$, όπου $\nu > 1$, φυσικός αριθμός.

3ο θέμα:

$$\text{Έστω} \quad S_\nu = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

α) Να δείξετε ότι $S_{1987} > 87$.

β) Να δείξετε ότι αν ν ο μέσος $S > 100$.

4ο θέμα:

Ένας ωρολογοποιός έκανε το λάθος να τοποθετήσει δυο ίδιους δείκτες σε ένα ωρολόγι.

Πότε δεν είναι δυνατό να κάνει κάποιος λάθος στην ώρα;

16η Μαθηματική Ολυμπιάδα Η.Π.Α. Απρίλης 1987

1. Να βρείτε τις μη μηδενικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$(\alpha^2 + \beta)(\alpha + \beta^2) = (\alpha - \beta)^3$$

2. AD, BE και CF είναι οι εσωτερικές διχοτόμοι του τριγώνου ABC με τα D, E και F πάνω στις πλευρές του. Αν το $\hat{EDF} = 90°$(να ορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της γωνίας $B\hat{A}C$*.

---

* Η ασκ. 2 είναι μια άλλη μορφή της άσκησης που είχε προτείνει η Ρουμανία στην 4η Β.Μ.Ο. και όπως είδαμε ήταν θέμα του Πανελλήνιου Μαθηματικού Διαγωνισμού το 1985.

** Χρόνος διαγωνισμού 3, 5 ώρες.

3. Θεωρούμε ένα σύνολο πολυωνύμων S με τις ιδιότητες:

(i) $x \in S$

(ii) Αν $f(x) \in S$, τότε $xf(x) \in S$ και $x + (1 - x) f(x) \in S$.

Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν δυο διαφορετικά πολυώνυμα του S που τα γραφήματά τους να τέμνονται στο διάστημα $(0 < x < 1)$.

4. Τρεις κύκλοι C_i δίνονται στο επίπεδο. Ο C_1 έχει διάμετρο AB μήκους 1. Ο C_2 είναι ομόκεντρος του C_1 και διάμετρο με μήκος κ $(1 < κ < 3)$. Ο C_3 έχει κέντρο A και διάμετρο 2κ. Θεωρούμε τον κ σταθερό. Ακόμα θεωρούμε όλα τα ευθ. τμήματα XY που έχουν το άκρο τους X στον C_2, το Y στον C_3 και περιέχουν το σημείο B. Για ποιά τιμή του λόγου $\frac{XB}{BY}$ το τμήμα XY έχει ελάχιστο μήκος;

5. Θεωρούμε μιαν ακολουθία $(x_1, x_2, ..., x_n)$ με όρους 0 και 1 και έστω A ο αριθμός των τριάδων (x_i, x_j, x_k) με $i < j < k$ ώστε η (x_i, x_j, x_k) να είναι ίση με $(0, 1, 0)$ ή $(1, 0, 1)$. Για $1 \leqslant i \leqslant ν$ έστω d_i ο αριθμός των j για τα οποία ισχύει είτε $j < i$ και $x_j = x_i$ είτε $j > i$ και $x_j \neq x_i$.

α) Να δείξετε ότι $A = \binom{ν}{3} - \sum_{i=2}^{ν} \binom{di}{2}$

$\left(\text{όπου } \binom{α}{β} = \frac{α!}{β!\,(α-β)!}\right)$

β) Αν ν περιττός, ποιά είναι η μεγίστη δυνατή τιμή του A;

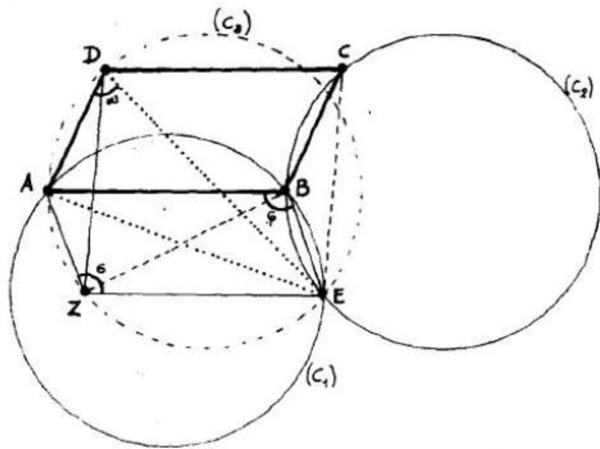
Λύσεις Ασκήσεων

O_2, O_4, O_5 του τεύχους **1, 1987, σελ. 19** από τον συνάδελφο **Μ. Κεσογλίδη** της Πολυτεχνικής Σχολής Ξάνθης. Και μια γενίκευση του **1ου** προβλήματος της **4ης Βαλκανιάδας** απ' τον **Κ. Παπαρίζο** Μ. Κεσογλίδη της Πολυτεχνικής Σχολής Ξάνθης.

O_2 Έστω ABCD ένα παραλληλόγραμμο. Φέρνουμε δύο κύκλους με ακτίνα R, έναν που να περνά από τα σημεία A, B και τον άλλον να περνά από τα σημεία B και C. Έστω E το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων. Υποθέτουμε ότι το E δεν ταυτίζεται με κορυφή του παραλληλογράμμου. Να δείξετε ότι ο κύκλος που περνά από τα σημεία A, D, E έχει ακτίνα R.

απόδειξη

Αν (C_1), (C_3) είναι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ABE, ADE αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι οι κύκλοι αυτοί έχουν κοινή χορδή την AE.



Για να δείξουμε ότι αυτοί είναι ίσοι αρκεί να δείξουμε ότι

$$(1) \qquad \hat{ω} + \hat{φ} = 2^L$$

Αν Z είναι το συμμετρικό του B ως προς το μέσον της AE τότε $\hat{φ} = \hat{σ}$ και η (1) γίνεται $\hat{ω} + \hat{σ} = 2^L$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο ADEZ είναι εγγράψιμο.

Αλλά $\quad ZE \overset{//}{=} AB \overset{//}{=} DC \Rightarrow$

$E\hat{Z}D = D\hat{C}E = D\hat{C}B + B\hat{C}E = D\hat{A}B + B\hat{A}E = D\hat{A}E \Rightarrow$

ADEZ εγγράψιμο και η άσκηση αποδείχθηκε.

O_4 Έστω a, b, c θετικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι:

$$\frac{α}{β} + \frac{β}{c} + \frac{c}{α} \leqslant \frac{α^2}{β^2} + \frac{β^2}{c^2} + \frac{c^2}{α^2}$$

απόδειξη

$$\frac{α_1x_1 + α_2x_2 + ... + α_νx_ν}{α_1 + α_2 + ... + α_ν} \geqslant \sqrt[α_1+α_2+...+α_ν]{x_1^{α_1}x_2^{α_2}....x_ν^{α_ν}}$$

όπου $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^*, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in Q^*$

Για $\nu = 3$ με

$\alpha_1 = x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha_2 = x_2 = \frac{\beta}{c}$ και $\alpha_3 = x_3 = \frac{c}{\alpha}$ η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$\frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{c^2} + \frac{c^2}{\alpha^2}}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{c} + \frac{c}{\alpha}} \geqslant \sqrt[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{c} + \frac{c}{\alpha}]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta}{c}\right)^{\frac{\beta}{c}} \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{\frac{c}{\alpha}}} \geqslant$$

$$\geq \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{c} + \frac{c}{\alpha}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{c}{\alpha}} = 1$$

Άρα $\quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{c} + \frac{c}{\alpha} \leqslant \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{c^2} + \frac{c^2}{\alpha^2}$

Το ίσον προφανώς ισχύει όταν $\alpha = \beta = c$.

O5 Να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x^6 + \frac{3}{4}$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη: 1ος τρόπος Καταρχήν το δοθέν πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει αρνητικές ρίζες, διότι $\forall x \in \mathbb{R}^*$ είναι $-x^{2n+1} > 0, \nu \in \mathbb{N}$ και συνεπώς είναι

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x^6 + \frac{3}{4} > 0$$

Ακόμη, επειδή το δοθέν πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές και είναι άρτιου βαθμού, αν έχει μια πραγματική ρίζα, τότε θα έχει και δεύτερη, αφού κάθε μιγαδική συνοδεύεται από την συζυγή της.

Ακόμη επειδή

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} \equiv$$

$$\frac{x^7 + 1}{x + 1} - \frac{1}{4}, \quad x \neq -1$$

αρκεί να δείξουμε ότι το:

$$\phi(x) = \frac{x^7 + 1}{x + 1} - \frac{1}{4}, \; x \neq -1$$

δηλαδή ο αριθμητής του $\phi(x) = \frac{4x^7 - x + 3}{4(x + 1)}, \; x \neq -1$

δεν έχει δυο πραγματικές ρίζες

Επειδή

$$(1) \qquad 4x^7 - x + 3 > 0 \qquad \forall x > \frac{1}{\sqrt[6]{28}}$$

(η απόδειξη στο τέλος)

συμπεραίνουμε ότι για να δείξουμε την δοθείσα πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = 4x^7 - x + 3$$

δεν έχει δυο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right]$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο αριθμοί

$$\rho_1 \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right] \quad \text{και} \quad \rho_2 \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right]$$

τέτοιοι ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, τότε κατά το θεώρημα του Rolle

$$\exists \, \xi \in (\rho_1, \rho_2): \phi'(\xi) = 0.$$

Αλλά

$$f'(x) = 28x^6 - 1 \quad \text{άρα}$$

$$28\xi^6 - 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt[6]{28}} \quad \text{αφού} \quad \xi > 0$$

αυτό όμως είναι άτοπο διότι πρέπει

$$\xi \in (\rho_1, \rho_2) \Rightarrow \xi \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right)$$

Άρα το δοθέν πολυώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη της (1)

1ος τρόπος

Αφού $x > \sqrt[6]{28} \Rightarrow \exists \, \varepsilon > 0$: $x = \sqrt[6]{28} + \varepsilon$

και $\forall \varepsilon > 0$ η (1) γίνεται:

$$4\left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}} + \varepsilon\right)^7 - \left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}} + \varepsilon\right) + 3 >$$

$$4\left[\left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right)^7 + 7\left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}}\right)^6 \varepsilon\right] - \left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}} + \varepsilon\right) + 3 =$$

$$4\left(\frac{1}{28\sqrt[6]{28}} + 7 \cdot \frac{1}{28}\varepsilon\right)\left(\frac{1}{\sqrt[6]{28}} + \varepsilon\right) + 3 =$$

$$\frac{1}{7\sqrt[6]{28}} - \frac{1}{\sqrt[6]{28}} + 3 =$$

$$-\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{28}} + 3 > -1 + 3 > 0$$

$\left(\text{διότι } \frac{6}{7}<1, \frac{1}{\sqrt[6]{28}}<1 \Rightarrow \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{28}}<1 \Rightarrow\right.$

$$\left. -\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{28}} > -1\right)$$

άρα πράγματι είναι $4x^7 - x + 3 > 0 \ \forall x > \frac{1}{\sqrt[6]{28}}$

2ος τρόπος

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

(i) αν $x \geqslant 1 \Rightarrow x^7 \geqslant x \Rightarrow 4x^7 \geqslant x \Rightarrow 4x^7 - x \geqslant > \Rightarrow$

$$4x^7 - x + 3 > 0$$

(ii) αν $\frac{1}{\sqrt[6]{28}} < x < 1 \ \Rightarrow -x + 1 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x + 3 > 0 \Rightarrow 4x^7 - x + 3 > 0$$

αφού $\qquad 4x^7 > 0$

Απόδειξη: (2ος τρόπος)

Λήμμα: Θα δείξουμε την πρόταση

$\forall x \in \mathbb{R}$ και $\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι

(1) $\qquad x^{2\nu} - x^{2\nu-1} + \frac{1}{2\nu} > 0$

Για $x \leqslant 0$ είναι $-x^{2\nu-1} \geqslant 0$ και η (1) ισχύει, μένει να την αποδείξουμε για $x > 0$. Θέτουμε

$$f(x) = x^{2\nu} - x^{2\nu-1} + \frac{1}{2\nu} \qquad \text{οπότε}$$

$$f'(x) = (2\nu)\, x^{2\nu-1} - (2\nu-1)\, x^{2\nu-2}$$

$$f''(x) = (2\nu-1)(2\nu)\, x^{2\nu-2} - (2\nu-2)(2\nu-1)\, x^{2\nu-3}$$

....

$$f^{(2\nu)}(x) = (2\nu)! > 0$$

Επειδή η πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγος είναι άρτιος τάξης η f έχει άκρα τιμή $f^{(2\nu)}(x) > 0$ η f έχει ελάχιστο. Το ελάχιστο παίρνει την τιμή του x που μηδενίζει την πρώτη παράγωγο της f.

$f'(x) = 0 \Rightarrow (2\nu)\, x^{2\nu-1} - (2\nu-1)\, x^{2\nu-2} = 0 \Rightarrow$

$x^{2\nu-2}\,[(2\nu)\,x - (2\nu-1)] = 0$ αλλά $x > 0$ άρα

$$(2\nu)\,x - (2\nu-1) = 0 \ \Rightarrow x = \frac{2\nu-1}{2\nu}$$

Το αντίστοιχο ελάχιστο είναι:

$$y_{min} = f\left(\frac{2\nu-1}{2\nu}\right) = \left(\frac{2\nu-1}{2\nu}\right)^{2\nu} - \left(\frac{2\nu-1}{2\nu}\right)^{2\nu-1} +$$

$$+\frac{1}{2\nu} = \ldots = \frac{1}{2\nu}\left[1 - \left(\frac{2\nu-1}{2\nu}\right)^{2\nu-1}\right] > 0,$$

διότι $\quad \frac{2\nu-1}{2\nu} < 1 \quad$ και $\quad 2\nu - 1 \in \mathbb{N}$

Αφού η ελάχιστη τιμή της f είναι θετική προκύπτει ότι $f(x) > 0 \quad \forall \in \mathbb{R}^*_+$

Άρα η (1) ισχύει $\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: (3ος τρόπος)

Επειδή $\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ το δοθέν πολυώνυμο γράφεται

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} =$$

$$= \left(x^6 - x^5 + \frac{1}{6}\right) + \left(x^4 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + x^2 - x + \frac{1}{3}\Big)$$

Οι δυο πρώτοι προσθετέοι του δεξιού μέλους αυτής, σύμφωνα με την (1), είναι θετικοί. Ο τρίτος προσθετέος είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 1 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{3} < 0 \quad \text{και} \quad \alpha = 1 > 0$$

άρα $\qquad x^2 - x + \frac{1}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Συνεπώς είναι

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

πράγμα που σημαίνει ότι το δοθέν πολυώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Παρατήρηση:

Αντί της (1) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$x^{2\nu} - x^{2\nu-1} + \frac{1}{2\,(2\nu)} \geqslant 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

το ίσον ισχύει όταν $\nu = 1$.

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να προσδιορίσουμε τον μικρότερο αριθμό $\kappa > 0$, που μπορούμε να δώσουμε για σταθερό όρο, ώστε ένα πολυώνυμο της μορφής:

$$x^{2\nu} - x^{2\nu-1} + \ldots + x^2 - x + \kappa$$

έχει πραγματικές ρίζες, αυτός είναι:

$$\kappa = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu-1} + \ldots + 1\right)$$

Έτσι για την συγκεκριμένη άσκηση μπορούσε, αντί του $\frac{3}{4}$, να δοθεί ο αριθμός

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{24} < \frac{3}{4}.$$

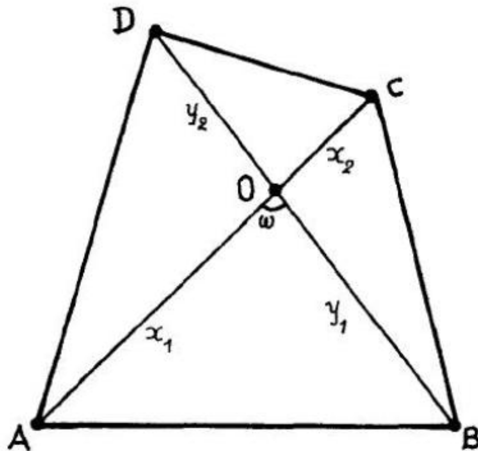
O$_6$ Οι διαγώνιες AC και BD του τετραπλεύρου ABCD τέμνονται στο εσωτερικό του σημείο O. Τα εμβαδά AOB και COD είναι S_1 και S_2 αντίστοιχα, ενώ το εμβαδόν του ABCD είναι S. Να δείξετε ότι:

(1) $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leqslant \sqrt{S}$

Απόδειξη

Έστω $OA = x_1$, $OC = x_2$, $OB = y_1$ και $OD = y_2$

Ως γνωστόν είναι:



(2) $(ABCD) = S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\,ημω$

(3) $(OAB) = S_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1\,ημω$

(4) $(OCD) = S_2 = \frac{1}{2} x_2 y_2\,ημω$

Η (1) λόγω των (2), (3), (4) γίνεται:

$$\sqrt{\frac{1}{2} x_1 y_1\,ημω} + \sqrt{\frac{1}{2} x_2 y_2\,ημω} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\,ημω} \Leftrightarrow$$

(5) $\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} \leqslant \sqrt{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$

Προκειμένου να δείξουμε την (1) αρκεί να δείξουμε την (5) και επειδή $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+^*$ από την (5) έχουμε διαδοχικά

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2\sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2} \leqslant$$

$$\leqslant (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \Leftrightarrow$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2\sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2} \leqslant$$

$$\leqslant x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2\sqrt{x_1 y_2 x_2 y_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x_1 y_2} - \sqrt{x_2 y_1}\right)^2 \geqslant 0$$

Η τελευταία ισχύει, συνεπώς λόγω των ισοδυναμιών ισχύει και η (1).

Το ίσον ισχύει όταν $x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow AB \parallel CD.$$

Μια γενίκευση του 1ου προβλήματος της 4ης Βαλκανιάδας

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(1) $f(x + y) = f(x)\,f(\alpha - y) + f(y)\,f(\alpha - x)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

(2) $f(0) \cdot f(\alpha) > 0$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερά.

Απόδειξη

Θέτοντας $x = y = 0$ στην (1) παίρνουμε:

(3) $f(0) = 2f(0)f(\alpha)$ και λόγω της (2) $\Rightarrow$

(4) $f(0) > 0$

Από την (3) έχουμε:

(5) $f(0)\,[1 - 2f(\alpha)] = 0$

Από την (5) λόγω της (4) βρίσκουμε

(6) $$f(\alpha) = \frac{1}{2}$$

Θέτοντας $x = \alpha, y = 0$ στην (1) παίρνουμε:

$$f(\alpha) = f(\alpha)\, f(\alpha) + f(0)\, f(0) \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + [f(0)]^2 \Rightarrow [f(0)]^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$f(0) = \frac{1}{2}$ αφού από την (4) έχουμε $f(0) > 0$.

Η συνέχεια της λύσης όπως στον Ευκλείδη β΄ τεύχος 1, τόμος κα΄, Οκτ. 87, σελ. 21.

Την παραπάνω **γενίκευση** την έκαναν οι Μαθηματικοί:
1. Παπαρίζος Κων/νος, λέκτορας Πολυτεχνικής Σχολής Ξάνθης
2. Κεσογλίδης Μιχ., λέκτορας Πολυτεχνικής Σχολής Ξάνθης

λύσεις στα θέματα της Iberoamericana πήραμε απ' τον **Γ. Κυριακόπουλο** (Μαθητής Β΄ Λυκείου) ενώ λύσεις στο 3ο θέμα της 27ης διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας του '87 πήραμε απ' την **Κ. Μπαγιάτη** (Ιωάννινα) και από τον **Π. Θεοδοσίου** (Φλώρινα) καλές λύσεις σε μιά καλή επιλογή λύσεων απ' την 27η Διεθνή Ολυμπιάδα.

70 ΧΡΟΝΙΑ Ε.Μ.Ε.
ΘΕΜΑΤΑ 1ου
Προπαρασκευαστικού Διαγωνισμού

6-2-1988

Τα θέματα της 4ης Εθνικής Ολυμπιάδας και οι λύσεις της καθώς και οι εσωτερικοί μαθητικοί προπαρασκευαστικοί διαγωνισμοί Ολυμπιάδας **2, 3** και ένα πλούσιο υλικό σε θέματα Ολυμπιάδας θα δημοσιευτούν στο τεύχος 4 του Μάρτη '88.

Ο προπαρασκευαστικός διαγωνισμός **1** δημοσιεύεται σ' αυτό το τεύχος και περιμένει λύσεις μέχρι 26 Μάρτη '88.

ΘΕΜΑ 1ο: Οι μαθητές που έμειναν στο 'Ιδρυμα Νεότητος για να πάρουν μέρος στην 4η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα παρατήρησαν ότι:

α) Κάθε μαθητής γνώριζε έναν τουλάχιστον άλλο μαθητή. (Θεωρούμε ότι αν ο μαθητής Α γνωρίζει το μαθητή Β, τότε και ο μαθητής Β γνωρίζει το μαθητή Α).

β) Αν δυο μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό γνωστών, τότε δεν έχουν κοινό γνωστό μαθητή.

Να δείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους μαθητές έχει μόνο ένα γνωστό μαθητή.

ΘΕΜΑ 2ο: Οι ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, ...$ ικανοποιούν τη σχέση $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}\, \alpha_\nu + 1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν (δηλ. $\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \alpha_1 + 1$, $\alpha_4 = \alpha_3\, \alpha_2 + 1$ κ.λπ.). Να δείξετε ότι αν $\nu > 5$, τότε ο αριθμός $\alpha_\nu - 7$ είναι σύνθετος.

ΘΕΜΑ 3ο: Μπορούμε να τοποθετήσουμε στα τετράγωνα μιας 6 Χ 6 σκακιέρας αριθμούς από το σύνολο $\{-1, 0, 1\}$ έτσι ώστε σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε μια από τις διαγώνιες της σκακιέρας το άθροισμα των αριθμών να είναι διαφορετικό;

ΘΕΜΑ 4ο: 'Εστω ΑΒ μια χορδή κύκλου Κ. Με κέντρο το Α και ακτίνα μικρότερη από τη χορδή ΑΒ γράφουμε κύκλο Κ΄ που τέμνει τον Κ στα σημεία Μ, Ν και τη χορδή ΑΒ στο σημείο Γ. Αν Μ είναι το σημείο του μικρού τόξου ΑΒ και αν η μεσοκάθετος επί του ΒΓ τέμνει το μικρό τόξο ΑΒ στο σημείο Ζ, ν' αποδειχθεί ότι το Ζ είναι το μισό του $\widehat{BM}$.

---

*Κυριακή 13 Μάρτη '88 θα γίνει ο **2ος Προπαρασκευαστικός** διαγωνισμός με θέματα κυρίως Β΄ Λυκείου. Ο 3ος προπαρασκευαστικός διαγωνισμός και τελικός θα γίνει τον Απρίλη '88, η ακριβής ημερομηνία θα γνωστοποιηθεί έγκαιρα και θα αφορά κυρίως ύλη Γ΄ Λυκείου. Οι τρεις αυτοί προπαρασκευαστικοί διαγωνισμοί είναι διαγωνισμοί για τη στελέχωση της εξάδας που θα αποτελέσει την Εθνική ομάδα που θα πάρει μέρος στην 5η Βαλκανιάδα (Μάιος '88 - Κύπρος) και στην 29η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ιούλιος '88 - Καμπέρα και Σίδνεϋ Αυστραλίας).

Αθλοθέτες Π.Μ.Δ. (1987)

1. **ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΙΣΚΥΡΑΣ** (Οι τόκοι των 100.000 που έχουν καταθεί για ΕΜΕ) περίπου 15.000 δρχ.

Στη μνήμη των γονέων του ΑΝΔΡΕΑ και ΜΕΤΑΞΙΑΣ του αδελφού του Ηλία και του γαμπρού του Νίκου, ακόμη στη μνήμη των εκπαιδευτικών αγωνιστών της Εθνικής Αντίστασης, της Δημοκρατίας και της Εθνικής Ανεξαρτησίας στα δυο καλύτερα γραπτά Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου.

2 σειρές βιβλίων του

2. **ΧΟΛΗ ΑΘΗΝΑΙΣ** (αρ. απόδ. 9809) 15.000 δρχ.
3. **ΘΡΟΥΜΟΥΛΟΠΟΥΛΟΣ ΛΑΖΑΡΟΣ** (αρ. απόδ. 9810) 5.000 δρχ.
4. **ΠΑΛΛΑ ΑΛΙΚΗ** (αρ. απόδ. 235) 40.000 δρχ.
5. **ΕΘΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ ΕΛΛΑΔΟΣ** (αρ. απόδ. 312) 100.000 δρχ.
6. **Ο.Τ.Ε.** 100.000 δρχ.
7. **ΓΕΝΙΚΗ ΤΡΑΠΕΖΑ** 10.000 δρχ.
8. **Ε.Τ.Β.Α.** 15.000 δρχ.
9. **ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΑΣΤΥΝΟΜΙΑ** (αρ. απόδ. 9967) 10.000 δρχ.

Απομυθοποίηση των Ολυμπιάδων

Τ. Λαμπρόπουλος - Αθήνα

Φίλε μαθητή,

Στο πρώτο τεύχος του Ευκλείδη Β΄ έτους 1988-89 διάβασες ένα άρθρο με τίτλο «απομυθοποίηση των ολυμπιάδων» και το οποίο σε παρώτρυνε να γράψεις τις εντυπώσεις σου, τις παρατηρήσεις σου και τις προτάσεις που πιθανόν να έχεις για την **νέα** αυτή στήλη. Μην ξεχνάς ότι ο Ευκλείδης β΄ είναι δικό σου περιοδικό και ότι εσύ είσαι ο τελικός αποδέκτης των όσων γράφονται.

Επομένως εσύ θα κρίνεις τα γραφόμενα και εσύ θα εκφράζεις την επιθυμία σου στο τι θέλεις να γράφεται και βέβαια με ποιον τρόπο θα γράφεται.

Τώρα που θέλουμε να αρχίσουμε τη συνέχεια του άρθρου δεν έχει κυκλοφορήσει το α΄ τεύχος του Ευκλείδη β΄ και επομένως δεν έχουμε καμία κρίση ώστε να αποφασίσουμε αν θα γράψουμε, τι θα γράψουμε και πως θα το γράψουμε.

Οι υπεύθυνοι της σύνταξης ζήτησαν το άρθρο να απευθύνεται σ' όλους τους μαθητές του Λυκείου.

Υπάρχει επομένως **αντικειμενική δυσκολία** στην επιλογή του θέματος ώστε να αρχίσουμε. «Αρχή το ήμισυ του παντός»... θα έχετε διαβάσει. Ευτυχώς, σαν από μηχανής θεός, **συνέβησαν** τρία γεγονότα ώστε να βρεθεί το θέμα. Αυτά είναι:

1) Ο ανηψιός μου ο Γρηγόρης μαθητής της Ε΄ Δημοτικού ήρθε στον «σοφό» θείο να μάθει τα κριτήρια διαιρετότητας δηλαδή πότε διαιρείται ένας ακέραιος με το 2, πότε με το 4, πότε με το 5, πότε με το 3 και πότε με το 9. Ο Γρηγόρης είχε μάθει από τον δάσκαλό του τους σχετικούς κανόνες οπότε ο θείος σκέφτηκε, ότι σαν μαθηματικός, έπρεπε να δείξει στον ανηψιό του περισσότερα πράγματα και εφαρμογές πάνω σ' αυτό το θέμα από τον δάσκαλο.

Ρώτησε τον ανηψιό του πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 6 και ακόμα έχοντας υπ' όψι του ένα θέμα μιας Κινέζικης Μαθηματικής Ολυμπιάδας που έλεγε. ***«Αν ο αριθμός 62αβ427 διαιρείται με το 99 να βρεθούν τα α, β»*** προσπάθησε να του μάθει εμπειρικά, πότε ένας αριθμός διαιρείτε με το 11.

2) Μελετώντας τα θέματα του Πανελλήνιου διαγωνισμού του 1986 πρόσεξα ότι το 4ο θέμα έλεγε ***«Αν*** $A = 2^{4\lambda+1} - 2^{2\lambda} - 1$ ***και*** $B = 2^{2\rho} + 15\rho - 1$ ***να δείξετε ότι ο*** $A \cdot B$ ***είναι πολλαπλάσιο του 81».***

3) Οι μαθητές του A_1 μου είπαν ότι ο συνάδελφος στο A_4 έβαλε διαγώνισμα την άσκηση.
«Να δειχτεί ότι $\forall \nu \in N$ ***ο 5 διαιρεί τον*** $3^{3\nu+2} + 2^{\nu+4}$***».***

΄Ετσι αποφάσισα λοιπόν να σας παρουσιάσω την διαιρετότητα, ένα σπουδαίο κεφάλαιο των Μαθηματικών που δυστυχώς δε διδάσκεται στο Λύκειο και για το οποίο έχεις μια γενική εποπτική αντίληψη. Μαθητής στο δημοτικό είχατε μάθει.

«Ο Διαιρετέος είναι ίσος με τον διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο δηλαδή $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$***».*** Μηχανικά γνώριζες την έννοια της αλγοριθμικής διαίρεσης και το θεώρημα:

«Αν α και β ακέραιοι τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι π και υ τέτοιοι ώστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{με} \quad 0 \leqslant \upsilon < \beta \text{ »}$$

Οι ακέραιοι που γνώριζες στο Δημοτικό είναι αυτοί που σήμερα τους ξέρεις σαν φυσικούς. Επομένως το θεώρημα στο σύνολο των ακέραιων που γνωρίζεις τώρα γίνεται:

«Αν $\alpha \in Z$ ***και*** $\beta \in Z^*$***, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι π και υ τέτοιοι ώστε:***

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{με} \quad 0 \leqslant \upsilon < |\beta| \text{»}$$

Προσέξτε, τώρα οι α και β μπορεί να είναι και αρνητικοί ακέραιοι το υπόλοιπο όμως είναι πάντα φυσικός αριθμός. Παράδειγμα.

« $39 = 5 \cdot 7 + 4$, διαιρέτης το 5, υπόλοιπο το 4
$-39 = 5(-8) + 1$ διαιρέτης το 5, πηλίκο το -8, υπόλ. 1»

Και τώρα ας λύσουμε την άσκηση.

«Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ όταν $\gamma \leqslant 4$, $\beta \leqslant 5$, $\alpha \leqslant 3$ ***και*** $\alpha + 4\beta + 24\gamma + 120\delta = 826$***».***

Λύση:

Αναφέραμε ότι αν $\alpha, \beta, \in Z$ και $\beta \neq 0$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι π και υ ώστε $\alpha = \beta\pi + \upsilon$ με $0 \leqslant \upsilon < |\beta|$.

Επομένως τη δοσμένη σχέση μπορούμε να τη γράψουμε: $826 = 4(\beta + 6\gamma + 30\delta) + \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

Ισχύει όμως $826 = 4 \cdot 206 + 2$.

οπότε $4 \cdot 206 + 2 = 4(\beta + 6\gamma + 30\delta) + \alpha$

και επειδή από τον ορισμό οι π και υ είναι μοναδικοί τότε:

$$\alpha = 2 \quad \text{και} \quad 206 = \beta + 6\gamma + 30\delta \quad \text{ή}$$

$$206 = 6(\gamma + 5\delta) + \beta \quad \text{ή} \quad 6 \cdot 43 + 2 = 6(\gamma + 5\delta) + \beta$$

με $0 \leqslant \beta \leqslant 5$ οπότε $\beta = 2$ και $\gamma + 5\delta = 34$

Η τελευταία σχέση γράφεται:

$$5 \cdot 6 + 4 = 5\delta + \gamma \quad \text{με} \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 4$$

και επομένως $\gamma = 4$ και $\delta = 6$.
Άρα τελικά έχουμε: $\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = 4,\ \delta = 6$.

Ακολουθώντας τον ίδιο δρόμο προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση:

«Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί $\alpha \leqslant 4$, $\beta \leqslant 5$, $\gamma \leqslant 8$ όταν $\alpha + 5\beta + 20\gamma + 180\delta = 539$».

Μη διστάζετε να την λύσετε. Είναι πολύ εύκολο. Μπορείτε ακόμα να φτειάξετε και εσείς ασκήσεις αυτής της μορφής και θα χαρούμε πολύ αν μας τις στείλετε.

Και τώρα ας δώσουμε δυο ορισμούς.

Ορισμός 1:

«Τους αριθμούς α και β που διαιρούμενοι με τον δ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο τους λέμε ισοϋπόλοιπους ή ισοδύναμους κατά μέτρο δ και γράφουμε $\alpha \equiv \beta$ (mod δ)».

Δηλαδή οι αριθμοί 23 και (− 33) είναι ισοϋπόλοιποι κατά μέτρο 4 επειδή:

$$23 = 4 \cdot 5 \quad \text{και} \quad -33 = 4(-9) + 3$$

δηλαδή το υπόλοιπο των διαιρέσεων 23 : 4 και − 33 : 4 είναι το 3.

Ορισμός 2:

Αν α, β, ∈ Z με $\alpha \neq 0$, θα λέμε ότι ο β διαιρείται με τον α ή ότι ο α διαιρεί τον β και θα γράψουμε α/β, όταν και μόνο όταν υπάρχει ακέραιος γ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε επίσης ότι:

i) ο α είναι πολλαπλάσιο του β και

ii) ο β είναι διαιρέτης ή παράγοντας του α.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικές βασικές προτάσεις της θεωρίας αριθμών.

Πρόταση 1

Αν α, β, γ, ∈ Z, τότε ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες

i) Αν α/β, τότε για κάθε $\kappa \in Z$ ισχύει α/κβ

ii) Αν α/β και β/γ, τότε α/γ

iii) Αν α/β και α/γ, τότε α/β + γ

iv) Αν α/β, β ≠ τότε $|\alpha| \leqslant |\beta|$

v) Αν α/β και β/α με α, $\beta \in Z^*$ τότε $\alpha = +\beta$

Θα δώσουμε σύντομες αποδείξεις μερικών ιδιοτήτων.

i) Από α/β ⇒ ότι υπάρχει $\lambda \in Z$ τέτοιος ώστε

$$\beta = \lambda\alpha \Rightarrow \kappa\beta = \kappa\lambda\alpha \quad \text{ή} \quad \kappa\beta = (\kappa\lambda)\alpha$$

που σημαίνει ότι α/κβ.

ii) Από α/β ⇒ ότι $\exists\, \lambda \in Z$ τέτοιος ώστε $\beta = \lambda\alpha$ και από β/γ ⇒ ότι $\exists\, \rho \in Z$ τέτοιος ώστε $\gamma = \rho\beta$.

Επομένως από $\gamma = \rho\beta = \rho(\lambda\alpha) = (\rho\lambda)\alpha$

δηλαδή $\gamma = (\rho\lambda)\alpha$ που σημαίνει ότι α/γ.

iii) Από α/β ⇒ ότι $\exists\, \lambda \in Z$ τέτοιος ώστε $\beta = \lambda\alpha$ και από α/γ ⇒ ότι $\exists\, \mu \in Z$ τέτοιος ώστε $\gamma = \mu\alpha$.

Επομένως $\beta \pm \gamma = \lambda\alpha \pm \mu\alpha \Rightarrow \beta \pm \gamma = (\lambda \pm \mu)\,\alpha$

που σημαίνει ότι α/β ± γ.

Τις υπόλοιπες ιδιότητες μπορείς με τον ίδιο τρόπο να τις αποδείξετε μόνοι σας.

Πρόταση 2.

Έστω α, β ∈ Z και γ ∈ Z*. Τότε οι διαιρέσεις των α και β με τον γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν και μόνο όταν η διαφορά α − β είναι πολλαπλάσιο του γ.

Απόδειξη:

Ευθύ: Θα αποδείξουμε ότι αν οι διαιρέσεις των α και β με το γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο τότε η διαφορά α − β είναι πολλαπλάσιο του γ.

Έστω $\alpha = \gamma\pi_1 + \upsilon$ και $\beta = \gamma\pi_2 + \upsilon$. Τότε θα έχουμε: $\alpha - \beta = (\gamma\pi_1 + \upsilon) - (\gamma\pi_2 + \upsilon) =$

$$\gamma\pi_1 + \upsilon - \gamma\pi_2 - \upsilon = \gamma\pi_1 - \gamma\pi_2 = (\pi_1 - \pi_2)\gamma$$

που σημαίνει ότι γ/α − β.

Αντίστροφα: Αν γ/α − β θα αποδείξουμε ότι οι διαιρέσεις των α και β με το γ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Από γ/α − β ⇒ ότι υπάρχει $\lambda \in Z$ με $\alpha - \beta = \lambda\gamma \Rightarrow \alpha = \lambda\mu + \beta$. Έστω ότι $\alpha = \rho\gamma + \upsilon$ με $0 \leqslant \upsilon < |\gamma|$.

Τότε θάχουμε $\lambda\gamma + \beta = \rho\gamma + \upsilon \Rightarrow$

$$\beta = \rho\gamma - \lambda\gamma + \upsilon\theta \Rightarrow \beta = \gamma(\rho - \lambda) + \upsilon$$

με $0 \leqslant \upsilon < |\gamma|$ που σημαίνει ότι υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης της β με το γ. Επομένως αν ένας ακέραιος α διαιρούμενος με τον δ δίνει υπόλοιπο υ,

τότε ισχύει $\alpha \equiv \upsilon$ (mod δ) γιατί από τη σχέση

$$\alpha = \delta\pi + \upsilon \Rightarrow \alpha - \upsilon = \delta\pi \Rightarrow \delta/\alpha - \upsilon.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.

Αν $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ (mod ν) και $\beta_1 \equiv \beta_2$ (mod ν) τότε ισχύει:

i) $\alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2$ (mod ν)

ii) $\alpha_1 - \beta_1 \equiv$ (mod ν)

iii) $\alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_2\beta_2$ (mod ν)

Απόδειξη:

Επειδή οι ακέραιοι α_1 και α_2 είναι ισοϋπόλοιποι κατά μέτρο ν, δηλαδή οι διαιρέσεις α_1 : ν και α_2 : ν δίνουν το ίδιο υπόλοιπο τότε ο υ θα διαιρεί την διαφορά $\alpha_1 - \alpha_2$ και επομένως θα υπάρχει ακέραιος K τέτοιος ώστε:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \kappa\nu.$$

Όμοια θα υπάρχει $\lambda \in Z$ έτσι ώστε $\beta_1 - \beta_2 = \lambda\nu$. Άρα

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) = \kappa\nu + \lambda\nu \Rightarrow (\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2)$$

$$= (\kappa + \lambda)\,\nu \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \equiv \alpha_2 + \beta_2 \ (\text{mod } \nu)$$

ακόμα έχουμε: $(\alpha_1 - \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2) =$

$$\kappa\nu - \lambda\nu \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) = (\kappa - \lambda)\,\nu$$

που σημαίνει ότι $\alpha_1 - \beta_1 \equiv \alpha_2 - \beta_2$ (mod ν)

Την τρίτη ιδιότητα προσπαθήστε να την κάνετε μόνοι σας και εύκολα ακόμα μπορείτε να αποδείξετε επαγωγικά ότι αν:

$\alpha_1 \equiv \beta_1$ (mod ν), $\alpha_2 \equiv \beta_2$ (mod ν), ..., $\alpha_\nu \equiv \beta_\nu$ (mod ν) τότε:

i) $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu \equiv \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu$ (mod ν)

ii) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 ... \alpha_\nu \equiv \beta_1 \cdot \beta_2 ... \beta_\nu$ (mod ν)

και αν $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu$ και $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\nu$

τότε έχουμε

iii) $\nu\alpha \equiv \nu\beta$ (mod ν)

iv) $\alpha^\nu \equiv \beta^\nu$ (mod ν)

Ας δούμε τώρα πότε ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται με το 11.

Κάθε αριθμός $\alpha = \alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \dots \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0$

όπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$

στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται:

$$\alpha = \alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \dots + \alpha_2 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0, \quad \nu \in \mathbf{N}$$

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων του Modulo παίρνουμε.

$\alpha_0 \equiv \alpha_0$ Mod11
$10 \equiv (-1)$ Mod11 $\Rightarrow 10\alpha_1 \equiv (-1)\, d_1$Mod11 $\Rightarrow$
$10d_1 \Rightarrow 10\alpha_1 \equiv -\alpha_1$ Mod11
$100 \equiv 1$Mod11 $\Rightarrow 10^2 \equiv 1$ Mod11 $\Rightarrow \alpha_2 \cdot 10^2 \equiv \alpha_2$ Mod11
$1000 = (-1)$ Mod11 $\Rightarrow 10^3 \equiv (-1)$ Mod11 $\Rightarrow$
$\alpha_3 \cdot 10^3 \equiv -\alpha_3$ Mod11

και γενικά βρίσκουμε ότι

$$10^\nu = (-1)^\nu \text{ Mod11} \Rightarrow \alpha_\nu 10^\nu \equiv (-1)^\nu \alpha_\nu \text{ Mod11}$$

Γιατί αν **ν περιττός** τότε

$$10^\nu - (-1)^\nu = 10^\nu + 1 = (10+1)(10^{\nu-1} - 10^{\nu-2} + \dots + 10^2 - 10 + 1) = \text{πολ } 11$$

αν **ν άρτιος** τότε

$$10^\nu - (-1)^\nu = 10^\nu - 1 = (10+1)(10^{\nu-1} - 10^{\nu-2} + \dots + 10^2 - 10 + 1) = \text{πολ } 11$$

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha_0 + \alpha_1 10 + \alpha_2 10^2 + \dots + \alpha_\nu 10^\nu \equiv (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^\nu \alpha_\nu) \text{ Mod11}$$

ή $\alpha \equiv (\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^\nu \alpha_\nu)$ Mod11

Που σημαίνει ότι ο αριθμος $\alpha = \alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \alpha_{\nu-2} \dots \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0 2$ διαιρείται με το 11 αν το άθροισμα:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^\nu \alpha_\nu = \text{πολ } 11$$

Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα εφαρμογής των Modulo.

«Να εξεταστεί αν υπάρχει ακέραιος Κ τέτοιος ώστε $\kappa^2 = 1989^{1988} + 6$

Λύση:

Θα βρούμε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $1989^{1988} + 6$ δηλαδή το ψηφίο των μονάδων. Έχουμε ότι οι αριθμοί 1989 και (-1) είναι ισοϋπόλοιποι κατά μέτρο 10 γιατί $1989 + 1 = 1990 =$ πολ. 10.

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων των Modulo παίρνουμε:

$$1989 \equiv (-1) \text{ Mod10} \Rightarrow 1989^{1988} \equiv (-1)^{1988} \text{ Mod10} \Rightarrow$$

$$1989^{1988} \equiv 1\text{Mod10} + 6 \equiv 6 \text{ Mod10}$$

Επομένως $1989^{1988} + 6 \equiv 7$ Mod10

που σημαίνει ότι $1989^{1988} + 6 = 10\lambda + 7$, λ ακέραιος

δηλαδή ο αριθμός $1989^{1988} + 6$ έχει ψηφίο μονάδων το 7 και άρα δεν είναι τετράγωνο ακεραίου γιατί κανενός ακεραίου το τετράγωνο δεν λήγει σε 7.

Και τώρα για να δείτε ότι θα τα καταφέρετε λύστε την άσκηση.

«Να δειχτεί ότι ο αριθμός $2029^{1988} + 8501^{1989}$ είναι πολλαπλάσιο του 13».

Και μια εφαρμογή των Modulo που μετατρέπει το διώνυμο του Newton.

«Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ ισχύει $(\alpha + \beta)^\nu =$ πολα $+ \beta^\nu$»

Πραγματικά έχουμε

$\alpha \equiv 0 \pmod{\alpha}$ γιατί $\alpha - 0 = 1 \cdot \alpha$
$\beta \equiv \beta \pmod{\alpha}$ γιατί $\beta - \beta = 0 \cdot \alpha$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha + \beta \equiv \beta \pmod{\alpha} \Rightarrow (\alpha + \beta)^\nu \equiv \pmod{\alpha}$$

που σημαίνει ότι ο α είναι διαιρέτης της διαφοράς $(\alpha + \beta)^\nu - \beta^\nu$ οπότε υπάρχει $\kappa \in Z$ τέτοιος ώστε

$$(\alpha + \beta)^\nu - \beta^\nu - \beta^\nu = \kappa\alpha \Rightarrow (\alpha + \beta)^\nu = \kappa\alpha + \beta^\nu = \text{πολα} + \beta^\nu$$

όμοια μπορείτε να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^\nu = \alpha^\nu +$ πολβ

Και μια εφαρμογή αυτής της ιδιότητας.

«Να δειχτεί ότι ο αριθμός $9589^{2222} + 6051^{1111}$ είναι πολλαπλάσιο του 17».

Απόδειξη.

Έχουμε $9589 = 17 \cdot 564 + 1$
$6051 = 17 \cdot 356 + (-1)$

οπότε: $9589^{2222} + 6051^{1111} = (17 \cdot 564 + 1)^{2222} +$

$$[17 \cdot 356 + (-1)]^{1111} = \text{πολ}17 + 1^{2222} + \text{πολ}17 + (-1)^{1111} = \text{πολ}17 + 1 + \text{πολ}17 - 1 = \text{πολ}17$$

Αφού μελετήσετε όλη την πιο πάνω θεωρία και εφαρμογές θα αναρωτηθείτε. Μα είναι δυνατόν να λύσουν οι μαθητές της Α΄ λυκείου την άσκηση που δόθηκε στον πανελλήνιο διαγωνισμό; Μην βιάζεστε. Σκοπός αυτών που γράφτηκαν παραπάνω είναι να μπορείτε να δώσετε διαφορετικές λύσεις από αυτές που περίμενε η επιτροπή διαγωνισμού αλλά και να μπορείτε να αντιμετωπίσετε ευκολότερα παρόμοια θέματα.

Την άσκηση του διαγωνισμού θα την λύσετε μόνοι σας για να δοκιμάσετε τις δυνατότητές σας και θα διαπιστώσετε ότι θα τα καταφέρετε με άνεση. Σίγουρα σ' αυτό το σημείο χρειάζεται κάποια συγκρότηση και συνέπεια στο τρόπο της αντιμετώπισης αυτών των ασκήσεων. Εμείς στρέφουμε αυτή τη προσπάθεια ακριβώς προς αυτή την κατεύθυνση. Έτσι θα λύσουμε μια παρόμοια με πολλούς τρόπους λύσης.

«Αν $A = 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1}$ και $B = 2^{2\nu-1} \cdot 3^{\nu+2} + 1$ τότε να δειχτεί ότι το γινόμενο $A \cdot B$ είναι πολλαπλάσιο του 121».

Λύση:

Επειδή $121 = 11 \cdot 11$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$11/3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1} \quad \text{και} \quad 11/2^{2\nu-1} \cdot 3^{\nu+2} + 1$$

έχουμε: $A = 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1} =$

$$3^{2\nu} \cdot 3^2 + 2^{6\nu} \cdot 2 = (3^2)^\nu \cdot 9 + (2^6)^\nu \cdot 2 = 9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu$$

α΄ τρόπος: *Με Modulo*

$$64 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow 64^\nu \equiv 9^\nu \pmod{11} \Rightarrow 2 \cdot 64^\nu \equiv 2 \cdot 9^\nu \pmod{11}$$

$9 \equiv 9(\text{mod}11) \Rightarrow 9^\nu \equiv 9^\nu(\text{mod}11) \Rightarrow 9 \cdot 9^\nu \equiv$
$9 \cdot 9^\nu\ (\text{mod}11)$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2 \cdot 64^\nu + 9 \cdot 9^\nu \equiv 2 \cdot 9^\nu + 9 \cdot 9^\nu\ (\text{mod}11) =$$
$$11 \cdot 9^\nu\ (\text{mod } 11)$$

και επειδή $11 \cdot 9^\nu = \pi o\lambda 11$ τότε $2 \cdot 64^\nu + 9 \cdot 9^\nu = \pi o\lambda 11$

Παρατήρηση:

Μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

$9 \equiv (-2)\ \text{Mod}11 \Rightarrow 9^\nu \equiv (-2)^\nu\ \text{Mod}11 \Rightarrow 9 \cdot 9^\nu \equiv$
$9\,(-2)^\nu\ \text{Mod}11$
$64 \equiv (-2)\ \text{Mod}11 \Rightarrow 64^\nu \equiv (-2)^\nu\ \text{Mod}11 \Rightarrow 2 \cdot 64^\nu \equiv$
$2(-2)^\nu\ \text{Mod}11$

Επομένως: $9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu \equiv 11(-2)^\nu\ \text{Mod}11 \equiv 0\ \text{Mod}11$
που σημαίνει ότι: $11/9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu = A$

β΄ τρόπος: *Με θεώρημα υπολοίπων*

Στην τρίτη γυμνασίου μάθατε να κάνετε διαίρεση πολυωνύμων. Είχατε να διαιρέσετε ένα πολυώνυμο A(x) με ένα άλλο B(x). Κάναμε την διαίρεση και βρίσκαμε πηλίκο το πολυώνυμο Π(x) και ένα υπόλοιπο Y(x) με βαθμό Y(x) < βαθμού B(x). Δοκιμάσατε ποτέ να κάνετε δοκιμή αν εκτέλεσαμε σωστά την διαίρεση; Τότε θα διαπίστωνατε ότι

$$A(x) = B(x)\,\Pi(x) + Y(x)$$

που το σχολικό βιβλίο ονομάζει **«ταυτότητα της διαίρεσης»**.

Αν $B(x) = (x - \alpha)$ τότε το Y(x) θάναι ο σταθερός αριθμός υ. και επομένως θάχουμε

$$A(x) = (x - \alpha)\,\Pi(x) + \upsilon$$

και αν βάζαμε στη θέση του x το α θα βρίσκαμε

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)\,\Pi(\alpha) + \upsilon \Rightarrow$$
$$A(\alpha) = 0 \cdot \Pi(\alpha) + \upsilon \Rightarrow A(\alpha) = \upsilon.$$

«Δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου του x διά του δυωνύμου x − α είναι ίσο με το εξαγόμενο που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο το x με το α».

Με τα ποιο πάνω ήθελα να υπενθυμίσω τη θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε την άσκηση.

«΄Εχουμε να δείξουμε ότι: $11/9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu$».

Αν αντικαταστήσουμε το 9 με το x και το 64 με το α θάχουμε:

$$A = 9x^\nu + 2\alpha^\nu$$

και η διαίρεση του Α με το x − α δίνει υπόλοιπο την παράσταση που προκύπτει αν βάλουμε όπου x το α, δηλαδή

$$\upsilon = 9\alpha^\nu + 2\alpha^\nu = 11\alpha^\nu$$

Επομένως: $9x^\nu + 2\alpha^\nu = (x - \alpha)\,\Pi(x) + 11\alpha^\nu \Rightarrow$
$9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu = (9 - 64)\theta + 11 \cdot 64^\nu \Rightarrow$
$9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu = -55\theta + 11 \cdot 64^\nu =$
$11(64^\nu - 5\Pi),\ \theta \in Z.$

που σημαίνει ότι το $11/9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu$ δηλαδή $11/A$.

γ΄ τρόπος: *Με μαθηματική επαγωγή.*

Για $\nu = 0$ έχουμε:

$$3^{2\cdot 0+2} + 2^{2\cdot 0+1} = 3^2 + 2 = 11 = \pi o\lambda 11$$

Δεχόμαστε ότι αληθεύει η πρόταση

$$P(\nu) : 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1} = \pi o\lambda 11 \Rightarrow$$
$$3^{2\nu+2} = 11\kappa - 2^{6\nu+1}\ (\kappa \in Z) \qquad (I)$$

Τότε θάχουμε για την $P(\nu + 1)$:

$$3^{2(\nu+1)+2} + 2^{6(\nu+1)+1} = 3^{2\nu+2} \cdot 3^2 + 6^{6\nu+1} \cdot 2^6 =$$
$$9 \cdot 3^{2\nu+2} + 64 \cdot 2^{6\nu+1} = (\text{από I})\ 9 \cdot (11\kappa - 2^{6\nu+1}) +$$
$$64 \cdot 2^{6\nu+1} = 9 \cdot 11\kappa - 9 \cdot 2^{6\nu+1} + 64 \cdot 2^{6\nu+1} =$$
$$9 \cdot 11K + 55 \cdot 2^{6\nu+1} = 11(9\kappa + 5 \cdot 2^{6\nu+1}) = \pi o\lambda 11$$

δ΄ τρόπος: *Με δυώνυμο του Newton.*

$$\begin{aligned} 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1} &= 9 \cdot 9^\nu + 2 \cdot 64^\nu \\ &= 9\,[11 + (+2)]^\nu + 2[6 \cdot 11 + (-2)]^\nu \\ &= 9[\pi o\lambda 11 + (-2)^\nu] + 2[\pi o\lambda 11 + (-2)^\nu] \\ &= \pi o\lambda 11 + 9(-2)^\nu + \pi o\lambda 11 + 2(-2)^\nu \\ &= \pi o\lambda 11 + 11(-2)^\nu = \pi o\lambda 11. \end{aligned}$$

Για να ολοκληρώσουμε την λύση της άσκησης μας μένει να αποδείξουμε ότι:

$$\mathbf{11/2^{2\nu-1} \cdot 3^{\nu+2} + 1 = B \quad \text{με} \quad \nu \in N^*}$$

΄Εχουμε $B = 2^{2\nu} \cdot 2^{-1} \cdot 3^\nu \cdot 3^2 + 1 = \frac{1}{2} 4^\nu \cdot 3^\nu \cdot 9 + 1$

$$= \frac{9}{2}(3 \cdot 4)^\nu + 1 = \frac{1}{2}[9 \cdot 12^\nu + 2]$$

θα κάνουμε την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή.

Δείχνουμε ότι η πρόταση αληθεύει για $\nu = 1$, δηλαδή

$$\frac{1}{2}(9 \cdot 12^1 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 110 = 55 = 11 \cdot 5 = \pi o\lambda 11$$

Δεχόμαστε ότι αληθεύει η P(υ):

$$\frac{1}{2}(9 \cdot 12^\nu + 2) = 11\kappa\ (\kappa \in N)$$

από την οποία συνεπάγεται:

$$9 \cdot 12^\nu + 2 = 2 \cdot 11\kappa \Rightarrow 9 \cdot 12^\nu = 2 \cdot 11\kappa - 2 \Rightarrow$$
$$9 \cdot 12^\nu = 2(11\kappa - 1) \qquad (I)$$

Τότε θάχουμε:

$$P(\upsilon + 1): \frac{1}{2}(9 \cdot 12^{\nu+1} + 2) = \frac{1}{2}(9 \cdot 12^\nu \cdot 12 + 2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\,(9 \cdot 12^\nu \cdot 6 + 1 = (\text{από I})$$
$$= [2(11\kappa - 1)] \cdot 6 + 1 = 12(11\kappa - 1) + 1 =$$
$$12 \cdot 11\kappa - 12 + 1 = 12 \cdot 11\kappa - 11 = 11(12\kappa - 1) = \pi o\lambda 11$$

Αρα δείκτηκε και η $P(\upsilon + 1)$.

Προσπάθησε να αποδείξεις ότι $11/2^{2\nu-1} \cdot 3^{\nu+2} + 1$ με Modulo και με δυώνυμο του Newton. Η απόδειξη είναι εύκολη αν παρατηρήσουμε ότι ο ακέραιος $9 \cdot 12^\nu + 2$

είναι άρτιος και αν αποδείξουμε ότι $11/9 \cdot 12^{\nu} + 2$ τότε ο $9 \cdot 12^{\nu} + 2$ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του 11 δηλαδή

$$9 \cdot 12^{\nu} + 2 = 2\kappa \cdot 11 \ (\kappa \in Z)$$

οπότε $\frac{1}{2}(9 \cdot 12^{\nu} + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2\kappa \cdot 11 = 11\kappa = \text{πολ } 11.$

Ας ασχοληθούμε τώρα με την άσκηση της Κινέζικης Μαθηματικής Ολυμπιάδας (οι Κινέζοι στην 29η Δ.Μ.Ο. που έγινε στην Καμπέρα της Αυστραλίας από 9-21 Ιουλίου 1988 ήρθαν 2οι με 201 βαθμούς με πρώτη την Ε.Σ.Σ.Δ. με 217 βαθμούς), που έλεγε «Να προσδιοριστούν τα α και β ώστε ο αριθμός 62αβ427 είναι πολλαπλάσιο του 99».

Λύση:

Για να διαιρείται ένας αριθμός με το 99 πρέπει να διαιρείται με το 9 και με το 11.

Γνωρίζετε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9 και μελετώντας το άρθρο έμαθες ότι ο αριθμός 62αβ427 διαιρείται με το 11 όταν

$$11/7 + 4 + \alpha - 6 - (2 + \beta + 2) \Rightarrow 9/13 + \alpha - \beta$$

Επομένως

$$\begin{cases} 9/62\alpha\beta427 \\ 11/62\alpha\beta427 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9/21 + (\alpha + \beta) \\ 11/13 + \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9/3 + (\alpha + \beta) \\ 11/2 + (\alpha - \beta) \end{cases} \text{(I)}$$

Η σχέση $9/21 + (\alpha + \beta)$ είναι ισοδύναμη με την $9/3 + (\alpha + \beta)$ επειδή

$$\frac{21 + (\alpha + \beta)}{9} = \frac{18}{9} + \frac{3 + (\alpha + \beta)}{9} = 2 + \frac{3 + (\alpha + \beta)}{9}$$

Επομένως από την σχέση (I) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 3 + \alpha + \beta = 9\lambda \\ 2 + \alpha - \beta = 11\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 9\lambda - 3 \\ \alpha - \beta = 11\kappa - 2 \end{cases} \quad \text{με } \kappa, \lambda \in Z \text{ (II)}$$

και επειδή α, β μονοψήφιοι ακέραιοι, τότε

$$\begin{cases} 0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 18 \\ -9 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant 9\lambda - 3 \leqslant 18 \\ -9 \leqslant 11\kappa - 2 \leqslant 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 \leqslant 9\lambda \leqslant 21 \\ -7 \leqslant 11\kappa \leqslant 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3/9 \leqslant \lambda \leqslant 21/9 \\ -7/11 \leqslant \kappa \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1,2 \\ \kappa = 0,1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (II) δίνει

$$\alpha = \frac{1}{2}(9\lambda + 11\kappa - 5)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(9\lambda - 11\kappa - 1)$$

Προφανώς οι παρενθέσεις πρέπει να είναι άρτιος ακέραιος. Τούτο συμβαίνει όταν οι κ, λ δεν είναι και οι δύο άρτιος ή και οι δύο περιττοί. Επομένως

Για $\lambda = 1, \quad \kappa = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \quad \text{και} \quad \beta = 4$
Για $\lambda = 2, \quad \kappa = 1 \Rightarrow \alpha = 12$ απορρίπτεται

Άρα πρέπει $\alpha = 2$ και $\beta = 4$, οπότε ο αριθμός είναι ο 6224427

Σε κάποια βιβλιογραφία διάβασα ότι στην 14η Ισπανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 1977 δόθηκε η άσκηση «Να δείξετε, ότι το άθροισμα 5 διαδοχικών ακέραιων, δεν είναι τέλειο τετράγωνο». Αυτό προφανώς είναι λάθος του μεταφραστή γιατί εμείς θα δείξουμε ότι: «Υπάρχουν άπειρες πεντάδες διαδοχικών ακέραιων που το άθροισμά τους είναι τέλειο τετράγωνο».

Εάν σας ζητήσω να γράψετε πέντε διαδοχικούς ακέραιους το πιο πιθανό είναι να γράψετε:

$$x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4.$$

Αυτό που γράψατε είναι σωστό και λογικό. Χάρη της λειτουργικότητας συνήθως εμείς οι μαθηματικοί τους γράφουμε σαν συμμετρική παράσταση ως εξής:

$$x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2, \quad \text{με} \quad x \in Z$$

Οι 5 αυτοί αριθμοί έχουν άθροισμα:

$$(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 5x$$

Θέλουμε να ισχύει $5x = \kappa^2, \quad \kappa \in Z.$

Γράψετε το $\kappa = 5\lambda$, δεν σας εξηγώ γιατί και ποιες πολύπλοκες μαθηματικές ορολογίες και θεωρήματα πρέπει να εφαρμόσετε αλλά γιατί νομίζω ότι το μαθηματικό σου ένστικτο έτσι πρέπει να λειτουργήσει, και θα έχεις:

$$5x = (5\lambda)^2 \Leftrightarrow 5x = 25\lambda^2 \Leftrightarrow x = 5l^2, \lambda \in Z^* - \{\pm 1\}$$

Νομίζω τώρα πως για κάθε τιμή του ακέραιου λ θάχεις τον ακέραιο x και κατά συνέπεια θάχεις και μια πεντάδα φυσικών με τη ζητούμενη ιδιοτητα.

Και τελειώνοντας αναφέρω ένα θέμα που δόθηκε σε μαθηματικό διαγωνισμό Τορίνου-Βενετίας που έλεγε: «Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς υ, για τους οποίους είναι $3/2^{\nu} + 1$».

Επειδή $3 = 2 + 1$ εύκολο είναι όχι μόνο να απαντήσετε αλλά και να αποδείξετε με πολλούς τρόπους ότι πρέπει το υ να είναι περιττός ακέραιος.

Θα αντιμετωπίσουμε τώρα γενικότερα το θέμα:

«Να προσδιορισθούν οι φυσικοί αριθμοί ν, για τους οποίους είναι $y + 1/y^{\nu} + 1$.

Με Modulo θάχουμε:

$$y \equiv -1 \text{ Mod } (y + 1) \Rightarrow \begin{matrix} y^{\nu} \equiv (-1)^{\nu} \text{ Mod } (y + 1) \\ 1 \equiv 1 \text{ Mod } (y + 1) \end{matrix}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$y^{\nu} + 1 \equiv (-1)^{\nu} + 1 \text{ Mod } (y + 1)$$

που σημαίνει ότι για να είναι $y + 1/y^{\nu} + 1$ πρέπει

$$(-1)^{\nu} + 1 = 0 \Rightarrow \nu = 2\kappa + 1, \quad \kappa \in N$$

Μπορείτε να εργαστείτε και με δυώνυμο του Newton έχετε:

$$y^{\nu} + 1 = [(y + 1) - 1]^{\nu} + 1 = \text{πολ}(y + 1) + (-1)^{\nu} + 1$$

Για να ισχύει $y^{\nu} + 1 = \text{πολ } (y + 1)$ πρέπει

$$(-1)^{\nu} + 1 = 0 \Rightarrow \nu = 2\kappa + 1, \kappa \in N.$$

Τώρα θα σας προτείνουμε μερικές ασκήσεις τις οποίες μπορείτε να λύσετε. Η Συντακτική Επιτροπή περιμένει τις λύσεις που θα δώσετε καθώς και δικές σας ασκήσεις που θα φτιάξετε, με λίγη προσπάθεια.

A_1 Να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{\nu^5 - 5\nu^3 + 4\nu}{\nu + 2}$ διαιρείται με το 24, $\forall \nu \in N$.

Υπόδειξη

Παραγουτοποιήστε τον αριθμητή και τελικά θάχεις 4 διαδοχικούς ακέραιους.

A_2 Να βρείτε με πόσους φυσικούς αριθμούς διαιρείται ο αριθμός $3^{2\cdot3\cdot5} - 1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $\kappa \in N$, $\kappa > 2$ και $\lambda \in N^*$ με λ σύνθετος που διαιρείται από ν διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς, τότε ο αριθμός $\kappa^\lambda - 1$, διαιρείται με ν τουλάχιστον φυσικούς αριθμούς.

Υπόδειξη:

$2^{2\cdot3\cdot5} - 1 = (2^2)^{3\cdot5} - 1 = (2^3)^{2\cdot5} - 1 = (2^5)^{2\cdot3} - 1 = ...$

A_3 Αν $\nu \in N$, τότε $5/\nu^2$ ή ο ν^2 διαφέρει κατά μονάδα, από ένα πολλαπλάσιο του 5.

A_4 Να βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία της διαφοράς $99^{99} - 51^{51}$.

Υπόδειξη:

Προφανές είναι ότι όταν ένας φυσικός αριθμός διαιρεθεί με το 100, τα δύο τελευταία ψηφία του είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Επομένως $99 \equiv (-1) \text{ Mod}100 \Rightarrow$

$$99^{99} \equiv (-1)^{99} \text{ Mod } 100 \Rightarrow 99^{99} \equiv -1 \text{ Mod}100$$

Ακόμα

$$51^{51} = 51 \cdot 51^{50} = 51 \cdot (51^2)^{25} = 51 \cdot (2601)^{25}$$

και $2601 = 1 \text{ Mod}100 \Rightarrow 51 \cdot (2601)^{25} \equiv 51 \cdot 1^{25} \text{ Mod}100$

Άρα τελικά $99^{99} \equiv -1 \text{ Mod}100$ και $51^{51} \equiv 51 \text{ Mod}100$...

A_5 Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 2^{100}

Υπόδειξη

$$2^{100} = 2^{64} \cdot 2^{32} \cdot 2^4 \equiv 16 \cdot 95 \cdot 16 \text{ (Mod100)} \equiv$$

$$256 \cdot 96 \text{ (Mod100)} = 56 \cdot (-4) \text{ (Mod100)} \equiv$$

$$-224 \text{ (Mod100)} = -24 \text{ (Mod100)} \equiv 76\text{(Mod100)}$$

A_6 Να δειχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων πέντε διαδοχικών ακεραίων δεν είναι ίσο με το τετράγωνο ακεραίου.

Υπόδειξη

Να γράψετε τους 5 διαδοχικούς ακέραιους σε συμμετρική παράσταση και θάχετε τελικά:

$$5(\nu^2 + 2) = \kappa^2 \Rightarrow \nu^2 + 2 = 5\rho^2 \Rightarrow 5/\nu^2 + 2$$

Η διαίρεση του ν με το 5 δίνει υπόλοιπα 0, 1, 2, 3, 4....

A_7 Να δειχτεί ότι καθε ακέραιος αριθμός ρ, που είναι πρώτος και έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από 3 είναι της μορφής $6\kappa \pm 1$, όπου κ κατάλληλος ακέραιος αριθμός και στη συνέχεια να δειχτεί ότι το τετράγωνο κάθε πρώτου αριθμού μεγαλύτερου από το 3, αν διαιρεθεί με το 12, δίνει υπόλοιπο 1.

Υπόδειξη

Έστω ο $\rho = 6\kappa + \lambda$, $\kappa, \lambda \in Z$ με $0 \leqslant \lambda < 6$. Αποκλείονται οι τιμές $\lambda = 0, 1, 3, 4$ γιατί;...

A_8 Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε: $3x^2 - y^2 = 7$.

Υπόδειξη

$$3x^2 - y^2 = 7 \Leftrightarrow 3x^2 = y^2 + 7 \Rightarrow 3/y^2 + 7 \Rightarrow 3/y^2 + 1$$

δείξε ότι το 3 δεν διαιρεί το $y^2 + 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όλες οι πιο πάνω προτεινόμενες ασκήσεις έχουν δοθεί σε διάφορους μαθηματικούς διαγωνισμούς ή μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Και τώρα να αποδείξετε τις πιο κάτω βασικές προτάσεις και ασκήσεις.

B_1 Να δειχτεί ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

B_2 Αν από έναν αριθμό αφαιρέσουμε το άθροισμα των ψηφίων του τότε η διαφορά που προκύπτει είναι πολλαπλάσιο του 9.

B_3 Αν $\nu \in N$ να δείξετε ότι $6/\nu(\nu + 1)(\nu + 2)$ και ότι

$$24/\nu(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3)$$

και $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5/(\nu^2 - 1)\nu^2(\nu^2 - 4)$, $\nu \geqslant 2$.

B_4 Αν η διαίρεση του 802 με έναν ακέραιο α δίνει πηλίκο 14, βρείτε τις δυνατές τιμές του α και των υπολοίπων

B_5 Να δειχτεί ότι $7/2222^{5555} + 5555^{2222}$.

B_6 Μέσα στο σύνολο των φυσικών N^* να λυθεί η εξίσωση $8x^2 = 9y^3$.

Υπόδειξη:

$$8x^2 = 9y \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{3^2\lambda^6}{2^3\lambda^6} = \frac{(3\lambda^3)^2}{(2\lambda^2)^3} = ..., \lambda \in Z$$

Να δικαιολογήσετε τις ισότητες

B_7 Οι διαιρέσεις του 253 και 525 με ένα φυσικό αριθμό α δίνουν υπόλοιπο 15. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του α.

B_8 Με ποιο φυσικό αριθμό πρέπει να διαιρεθούν οι 1268 και 1802 για να πάρουμε αντίστοιχα υπόλοιπα 8 και 17.

B_9 Για κάθε $\nu \in N$ να δειχτεί ότι $133/11^{\nu+2} + 12^{2\nu+1}$

B_{10} Να δειχτεί ότι $5^{2^{\nu-2}} - 1 = \pi o\lambda\ 2^\nu$, $\nu \in N$, $\nu \geqslant 2$

Βιβλιογραφία: Οι ασκήσεις που δόθηκαν σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς ή Μαθηματικές Ολυμπιάδες πάρθηκαν από τον Ευκλείδη Β΄ και από το βιβλίο Μαθηματικές Ολυμπιάδες του Δ. Γ. Κοντογιάννη.

Τυπογραφική επανόρθωση: Στη στήλη απομυθοποίηση των Ολυμπιάδων **τεύχος 1** σελίδα 29 η παράγραφος 6 να διορθωθεί ως εξής: ***Για να δεχτείτε κάτι πρέπει να το έχετε αποδείξει εκτός αν η αληθειά του έχει θεμελειωθεί αξιωματικά».***

Επίσης στην άσκηση 4 σελίδα 32 η υπόδειξη να διορθωθεί:

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{2}y)^2 + (2z)^2 = 28$$

οπότε

$$[2^2 + (-2\sqrt{2})^2 + 4^2][x^2 + (\sqrt{2}y)^2 + (2z)^2] \geqslant ....$$

Ζητούμε συγγνώμη απ' τους αναγνώστες μας γι' αυτές τις παραδρομές και ευχαριστούμε για τα καλά λόγια προς τη στήλη. Αλλά θα επανέλθουμε αναλυτικά στο επόμενο τεύχος...

5η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Δυστυχώς ο χώρος του περιοδικού δεν επιτρέπει να παρουσιάσουμε όλες τις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές που πήραν μέρος στην 5η Ε.Μ.Ο. και που μερικές από τις σχέσεις ήταν πάρα πολύ καλές. Οι λύσεις είναι της επιτροπής, ενώ όπου υπάρχει ένδειξη μαθητών είναι από τα καλύτερα γραπτά του διαγωνισμού.

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

θ_1 Έστω Α το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων και Β το άθροισμα των αμέσως επομένων τριών διαδοχικών. Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = 33333$;

► Όχι, γιατί αν $\nu-1$, ν, $\nu+1$ οι αριθμοί και $\nu+2$, $\nu+3$, $\nu+4$ οι επόμενοι τους τότε

$$A = 3\nu, \quad B = 3\nu + 9$$

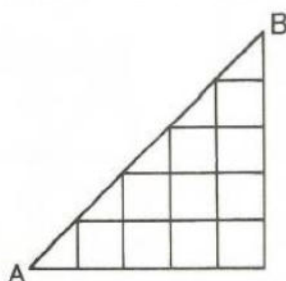
οπότε $\quad A \cdot B = 9\nu(\nu+3)$ άρτιος $\neq 33333$.

(μαθητών)

$$A \cdot B = 9\nu(\nu+3).$$

Οι αριθμοί $A \cdot B$ είναι πολ. 9 ενώ ο 33333 όχι.

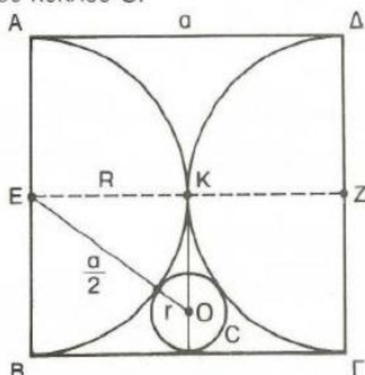
θ_2 Πόσοι δρόμοι υπάρχουν από το Α στο Β τέτοιοι ώστε να αποτελούνται από 5 οριζόντια τμήματα και 5 κατακόρυφα τμήματα μήκους 1 το καθένα; (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

► Απάντηση 42.

θ_3 Σ' ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α θεωρούμε τον κύκλο C που εφάπτεται της πλευράς ΒΓ και των δύο ημικυκλίων διαμέτρων ΑΒ και ΓΔ. Να υπολογιστεί η ακτίνα του κύκλου C.



► Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΚΟ βρίσκουμε $\quad r = \dfrac{\alpha}{8}$

θ_4 Ν' απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$(\alpha):\ 1 + \frac{2\alpha + \dfrac{2}{\alpha}}{\alpha + \dfrac{1}{\alpha}} \qquad (\beta):\ \frac{3\beta + \dfrac{3}{\beta} + \dfrac{3}{\beta^2}}{\beta + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta^2}}$$

$$(\gamma):\ \frac{\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha\beta}\right)\alpha^6\beta^2 - \alpha^6 - \alpha^5\beta}{\alpha^4\beta}$$

► (α) 3, (β) 3, (γ) β

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

θ_1 Αν α, β, γ, δ, x, y, z, ω είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned} \alpha x - \beta y - \gamma z - \delta\omega &= 0 \\ \beta x + \alpha y - \delta z + \gamma\omega &= 0 \\ \gamma x + \delta y + \alpha z - \beta\omega &= 0 \\ \delta x - \gamma y + \beta z + \alpha\omega &= 0 \end{aligned}$$

να δειχτεί ότι $\quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

ή $\quad x = y = z = \omega = 0$

► **(μαθητών)** Έστω ότι

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την 1η με α, τη 2η β, την 3η με γ την 4η με δ και προσθέτουμε. Παίρνουμε

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)x = 0.$$

Τότε $x = 0$ και όμοια $y = z = \omega = 0$.

Άλλη λύση μαθητών

Υψώνω τις σχέσεις στο τετράγωνο και μετά προσθέτω κατά μέλη. Θα πάρω

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2) = 0,$$

οπότε $\quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

είτε $\quad z = y = z = \omega = 0$

θ_2 Μία συλλογή διηγημάτων του Α. Παπαδιαμάντη περιέχει 70 διηγήματα, ένα μιας σελίδας, ένα δύο σελίδων... ένα 70 σελίδων και όχι αναγκαστικά με αυτή τη σειρά. Κάθε διήγημα αρχίζει από καινούργια σελίδα και η αρίθμηση των σελίδων του βιβλίου αρχίζει από την πρώτη σελίδα. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός διηγημάτων που αρχίζουν από σελίδα με περιττό αριθμό;

➤ **(μαθητών)** Από τα 70 διηγήματα τα μισά έχουν περιττό αριθμό σελίδων και τα 35 θα έχουν άρτιο. Το 1ο θα αρχίζει από την σελ. 1. Τα επόμενα θα αρχίζουν από σελίδα με περιττό αριθμό, μέχρις ότου φτάσει το πρώτο διήγημα με περιττό αριθμό σελίδων. Το επόμενο θα αρχίζει από σελίδα με άρτιο αριθμό (αφού περιττός + περιττός = άρτιος), όπως και όσα θα το ακολουθήσουν μέχρι να φτάσουμε σε διήγημα με περιττό αριθμό σελίδων, οπότε το επόμενο του θα φτάσει σε σελίδα περιττού αριθμού.

Έτσι από σελίδα άρτιου αριθμού θα αρχίζουν τα διηγήματα που ακολουθούν το 1ο, το 3ο, ..., το 33ο, το 35ο. Άρα τουλάχιστον 17 διηγήματα θα αρχίζουν από σελίδα άρτιου αριθμού.

Αν τα πρώτα 35 διηγήματα είναι αυτά με τον άρτιο αριθμό σελίδων, θα αρχίζουν από περιττή σελίδα. Από τα υπόλοιπα 17 θα αρχίζουν από άρτια σελίδα και τα 18 από περιττή σελίδα.

Άρα συνολικά $53 = 35 + 18$ θα αρχίζουν από περιττή σελίδα.

θ₃ Από σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε την κάθετο ΑΒ επί της ε και τρεις πλάγιες ΑΓ, ΑΔ και ΑΕ που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ και έτσι ώστε $(ΑΔ) > \frac{1}{2}((ΑΓ) + (ΑΕ))$. Ν' αποδειχτεί ότι $(ΓΔ) > (ΔΕ)$. [Τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε κείνται επί της ευθείας ε].

➤ Έστω Μ το μέσο του ΓΕ. Είναι γνωστό ότι

$$(ΑΜ) < \frac{1}{2}[(ΑΓ) + (ΑΕ)].$$

Άρα $(ΑΔ) > (ΑΜ)$

και συνεπώς $(ΒΔ) > (ΒΜ)$ δηλ. $(ΓΔ) > (ΔΕ)$

θ₄ Να λυθεί η εξίσωση $2\,|3 - 2x| - |x - 2| = x$ $(x \in \mathbb{R})$

➤ $x = 1, \quad x = 2.$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

θ₁ Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάποιο $α > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x + α)$$

Αν η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση, να δειχτεί ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι περιοδικές.

➤ **(μαθητών)** Είναι

$$g(x + 4α) - g(-x - 4α) =$$
$$-f(-x - 3α) = -f(x + 3α) = -g(x + 2α) =$$
$$f(-x - 2α) = f(-x - α) = f(x + α) = g(x)$$

Όμοια με την f.

θ₂ Έστω Μ ένα σημείο επί της πλευράς ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και έστω Ν ένα σημείο επί της προέκτασης της ΒΓ τέτοιο ώστε $(ΑΜ)^2 + (ΑΝ)^2 = 2(ΑΒ)^2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ν όταν το σημείο Μ κινείται πάνω στην πλευρά ΒΓ.

➤ Είναι $ΑΜ^2 = ΑΒ^2 - ΒΜ \cdot ΜΓ$

και $ΑΝ^2 = ΑΓ^2 + ΒΝ \cdot ΝΓ$.

Θα πρέπει λοιπόν

$ΒΜ \cdot ΜΓ = ΓΜ \cdot ΓΝ$.

Αν θέσουμε $ΒΓ = α$,

$ΒΜ = x, \quad ΓΜ = y$

θα έχουμε

$x(α - x) = y(α + y)$

ή $α(x - y) = x^2 + y^2 \geqslant 0$

Λ Β Μ ΓΝ Κ

Άρα $x \geqslant y$. Για $x = 0$, $y = 0$.

Για $x = \frac{α}{2}, \quad y = \frac{α(\sqrt{2} - 1)}{2}$

δηλ. ο γεωμετρικός τόπος είναι τα τμήματα ΒΛ, ΓΚ

όπου $ΒΛ = ΓΚ = \frac{α(\sqrt{2} - 1)}{2}$

θ₃ Αν $α \geqslant 0$ να δειχτεί ότι

$$α^4 + α^3 - 10α^2 + 9α + 4 > 0$$

➤ Είναι $α^4 + 4 \geqslant 2\sqrt{α^4 \cdot 4} = 4α^2$

$α^3 + 9α \geqslant 2\sqrt{9α^4} = 6α^2$

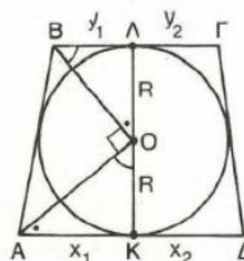
Άρα $α^4 + α^3 + 9α + 4 > 10α^2$

θ₄ Ένα τραπέζιο με βάσεις α και β και ύψος υ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο. Ν' αποδειχτεί ότι $υ^2 \leqslant αβ$.

➤ **(μαθητών)** Τα τρίγωνα ΑΚΟ, ΟΛΒ είναι προφανής όμοια. Άρα

$\frac{R}{x_1} = \frac{y_1}{R} \Rightarrow R^2 = x_1 y_1$

Όμοια $R^2 = x^2 y^2$



Οπότε $υ^2 = 4R^2 = 4R \cdot R = 4\sqrt{x_1 y_1} \cdot \sqrt{x_2 y_2} =$

$$4\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{y_1 y_2} \leqslant (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = αβ$$

ΘΕΜΑΤΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

θ₁ Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\sqrt{9 + x_1} + \sqrt{9 + x_2} + ... + \sqrt{9 + x_{100}} = 100\sqrt{10}$$
$$\sqrt{16 - x_1} + \sqrt{16 - x_2} + ... + \sqrt{16 - x_{100}} = 100\sqrt{15}$$

➤ Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{α}_j = (\sqrt{y + x_j}, \sqrt{16 - x_j}), \quad j = 1, 2, ..., 100$$

και $\vec{α} = 100(\sqrt{10}, \sqrt{15})$.

Τότε $\sum_{j=1}^{100} \vec{\alpha}_j = \vec{\alpha}$

και θα είναι $\left|\sum_{j=1}^{100} \vec{\alpha}_j\right| = |\vec{\alpha}| = 500$

Αλλά $|\vec{\alpha}| = 5$ και $\sum_{j=1}^{100} |\vec{\alpha}| = 500,$

δηλ. $\left|\sum_{j=1}^{100} \vec{\alpha}_j\right| = \sum_{j=1}^{100} |\vec{\alpha}_j|$

'Αρα $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2 = ... = \vec{\alpha}_{100}$, δηλ. $x_1 = x_2 = ... = x_{100}$

Τότε $\sqrt{y + x_i} = \sqrt{10}$ δηλ. $x_1 = 1 = x_j$.

θ₂ Στο επίπεδο θεωρούμε 70 σημεία $A_1, A_2, ..., A_{70}$ με ακέραιες συντεταγμένες. Υποθέτουμε ότι κάθε σημείο έχει βάρος 1 μονάδας και ότι τα κέντρα βάρους των τριάδων $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, ..., A_{68}A_{69}A_{70}, A_{69}A_{70}A_1, A_{70}A_1A_2$ έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Ν' αποδειχτεί ότι το κέντρο βάρους οποιασδήποτε τριάδας $A_iA_jA_k$ έχει ακέραιες συντεταγμένες.

► **(μαθητών)** Κέντρο βάρους των σημείων A_i, A_j, A_K είναι το σημείο

$$\frac{1}{3}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \equiv y_i + y_i + y_{i+2} \equiv 0 \bmod 3,$$
$$i = 1, 2, ..., 70$$

και οι δείκτες παίρνονται mod 70.

Αρκεί να δουλέψουμε με τις τετμημένες.

'Εστω $S = \sum_{j=1}^{70} x_j$ Τότε

$S - x_j = 0 \bmod 3$ (γιατί $70 - 1 = 69 = 0 \bmod 3$

και οι προσθεταίοι μπορούν να ομαδοποιηθούν ανά 3 διαδοχικούς).

Τώρα $x_i + x_j + x_K =$

$3S - (S - x_i) - (S - x_j) - (S - x_K) = 0 \bmod 3.$

θ₃ Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_ν) που ορίζεται από την αναδρομική σχέση.

$$x_\nu + 2 = \frac{1}{12} x_{\nu+1} + \frac{1}{2} x_\nu + 1 \qquad \nu = 0, 1, 2, ...$$

για οποιεσδήποτε αρχικές τιμές x_0, x_1.

► **(μαθητών)** Είναι $x_{\nu+2} = \frac{1}{12} x_{\nu+1} + \frac{1}{2} x_\nu + 1 \Leftrightarrow$

$$x_{\nu+2} - \frac{12}{5} = \frac{1}{12} x_{\nu+1} + \frac{1}{2} x_\nu - \frac{7}{5} =$$
$$\frac{1}{12}\left(x_{\nu+1} - \frac{12}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(x_\nu - \frac{12}{5}\right)$$

Θέτω $y_\nu - \frac{12}{5}$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$y_{\nu+2} = \frac{1}{12} y_{\nu+1} y_\nu \qquad (1)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1) είναι η

$$r^2 - \frac{1}{12} r - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 12r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(4r - 3)(3r + 2) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad r = -\frac{2}{3}$$

και έχει συνεπώς 2 πραγματικές, άνισες λύσεις. Προκύπτει, ως γνωστόν, ότι υπάρχουν σταθερές λ και μ (που εξαρτώνται από τους y_0, y_1) ώστε

$$y_\nu = \lambda\left(\frac{3}{4}\right)^\nu + \mu\left(-\frac{2}{3}\right)^\nu$$

Επειδή προφανώς $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^\nu = \lim\left(-\frac{2}{3}\right)^\nu = 0$

έχουμε $\lim y_\nu = 0$, άρα και $\lim x_\nu = 0 + \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$.

θ₄ Σε μια ομάδα G έχουμε δύο στοιχεία x και y τέτοια ώστε $x^n = e$, $y^2 = e$, $yxy = x^{-1}$ $(n \geqslant 1)$.

Ν' αποδειχτεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $(x^k y)^2 = e$.

► **(μαθητών)** Για $K = 0$ γίνεται $(ey)^2 = e \Leftrightarrow y^2 = e$ αληθές είναι

$$y^2 = e \Leftrightarrow y = y^{-1} \text{ και } y \times y = x^{-1} \Leftrightarrow$$
$$x(y \times y)\, y^{-1} = xx^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow (xyx)(yy^{-1}) =$$
$$ey^{-1} \Leftrightarrow xyx = y^{-1} \Leftrightarrow xyx = y \qquad (1)$$

'Εστω ότι αποδεικτέα σχέση ισχύει για τον $\kappa \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(x^{\kappa+1}y)^2 = x^{\kappa+1}yx^{\kappa+1}y = x^\kappa(xyx)x^\kappa y \overset{(1)}{=}$$
$$x^\kappa y x^\kappa y = (x^\kappa y)^2 = e$$

(από την υπόθεση της επαγωγής). Συνεπώς ισχύει και για τον $\kappa + 1$, άρα και για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$).

Παρατηρήσεις: Στο 3ο θέμα εάν δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε θεωρία σχετική με την $x^{n+2} = \kappa_1 x^{n+1} + \kappa_2 x_n$ (όπως έγινε παραπάνω), προσδιορίζουμε τους λ και μ από το σύστημα $y_0 = \lambda + \mu$, $y_1 = \rho_1\lambda + \rho_2\mu$ (που έχει μοναδική λύση, αφού $\rho_1 \equiv \rho_2$) και αποδεικνύουμε ότι $y_\nu = \lambda\rho_1^\nu + \mu\rho_2^\nu$ ως εξής: για $\nu = 0,1$ ισχύει. Εάν ισχύει για τους ν, $\nu + 1$, τότε

$$y_{\nu+2} = \frac{1}{12} y_{\nu+1} + \frac{1}{2} y_\nu =$$
$$\frac{1}{12}(\lambda\rho_1^{\nu+1} + \rho_2^{\nu+1}) + \frac{1}{2}(\lambda\rho_1^\nu + \mu\rho_2^\nu) =$$
$$\lambda\left(\frac{1}{12}\rho_1^{\nu+1} + \frac{1}{2}\rho_1^\nu\right) + \mu\left(\frac{1}{12}\rho_2^{\nu+1} + \frac{1}{2}\rho_2^\nu\right) =$$
$$\lambda\rho_1^{\nu+2} + \mu\rho_2^{\nu+2},$$

οπότε $\rho_i^2 = \frac{1}{12}\rho_i + \frac{1}{2}$,

επομένως ισχύει και για $\nu + 2$, δηλ. για κάθε ν.

Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

θ₁. Να αποδειχτεί ότι

α) $$\frac{1}{100}-\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}<\frac{1}{100}$$

β) $$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{2}$$

► α) Επειδή $-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}=-\frac{1}{\nu(\nu+1)}<0$, έχουμε

$$\left(-\frac{1}{101}+\frac{1}{102}\right)+\left(-\frac{1}{103}+\frac{1}{104}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}\right)<0$$

β) $$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}>\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{102}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}.$$

θ₂. Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3, 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.

► Έστω $\hat{A}', \hat{B}', \hat{\Gamma}'$ οι εξωτερικές γωνίες και $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι εσωτερικές γωνίες του τριγώνου. Τότε

$$\frac{\hat{A}'}{2}=\frac{\hat{B}'}{3}=\frac{\hat{\Gamma}'}{4}=\frac{\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{\Gamma}'}{9}=\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$$

Άρα $\hat{A}'=80^\circ$, $\hat{B}'=120^\circ$, $\hat{\Gamma}'=160^\circ$

και επομένως $\hat{A}=100^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$, $\hat{\Gamma}=20^\circ$.

θ₃. Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 2^{70}.

► Έχουμε $2^{22}=2^{11}\cdot 2^{11}$. Το $2^{11}=2048$ λήγει σε 48 το 2^{22} λήγει σε 04, το 2^{44} λήγει σε 16 και το 2^{66} λήγει σε 48. Άρα το $2^{70}=2^{66}\cdot 4^4$ λήγει σε 68.

θ₄. Στο παρακάτω σχήμα πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν;

► Τετράγωνα με πλευρά 1: Υπάρχουν 16
» » » 2: » 9
» » » 3: » 4
» » » 4: » 1

⇒ σύνολο τετραγώνων: 30

Ορθογώνια διαστάσεων 1 × 2 Υπάρχουν 24
» » 1 × 3: » 16
» » 1 × 4: » 8
» » 2 × 3: » 12
» » 2 × 4: » 6
» » 3 × 4: » 4

⇒ σύνολο ορθογωνίων: 70

τελικό σύνολο 100

Το 1 α) γενικεύεται:

$$\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}+\frac{1}{\kappa+2}+\ldots+(-1)\frac{1}{\kappa+\nu}<\frac{1}{\kappa}$$

Το 2 γενικεύεται: οι αριθμοί 2, 3, 4 αντικαθίστανται με κ, λ, μ με κάποια συνθήκη (ποια;) το 3: 2^ν αντί 2^{70}.
Το 4: το μεγάλο τετράγωνο ν × ν ή ν − μ. Και το 1 β) γενικεύεται:

$$\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}>\frac{1}{2}$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

θ₁. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ) < (ΑΓ). Πάνω στην ημιευθεία ΑΒ παίρνουμε σημείο Β' τέτοιο ώστε (ΑΒ') = (ΑΓ) και πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Γ' τέτοιο ώστε (ΑΓ') = (ΑΒ). Έστω Ι το σημείο τομής των ευθειών ΒΓ και Β'Γ'. Να αποδειχτεί ότι η ΑΙ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α.

► Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ'Γ' είναι ίσα και

άρα $\hat{B}'=\hat{\Gamma}$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒ'Ι και ΑΓΙ είναι ίσα και

άρα $B\hat{A}I=I\hat{A}\Gamma$.

θ₂. Αν $\alpha>0$ και $\alpha^5-\alpha^3+\alpha=3$, ν' αποδειχτεί ότι $\alpha^6\geq 5$.

► $$\alpha^6+1=(\alpha^2)^3+1=(\alpha^2+1)(\alpha^4-\alpha^2+1)=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha^5-\alpha^3+\alpha)=3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\geq 6.$$

θ₃. Αν Μ, Ν, Ρ είναι σημεία επί των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ, ν' αποδειχτεί ότι

$$(B\Gamma)+(\Gamma A)+(AB)<2\left[(AM)+(BN)+(\Gamma P)\right]<3\left[(B\Gamma)+(\Gamma A)+(AB)\right].$$

➤ Φέρνουμε τα τμήματα ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ. Έχουμε:

$$(ΒΓ) < (ΒΝ) + (ΝΓ), \quad (ΒΓ) < (ΡΓ) + (ΒΡ)$$
$$(ΑΓ) < (ΑΜ) + (ΜΓ), \quad (ΑΓ) < (ΡΓ) + (ΑΡ)$$
$$(ΑΒ) < (ΑΜ) + (ΒΓ), \quad (ΑΒ) < (ΒΝ) + (ΑΝ)$$

Προσθέτουμε όλες αυτές τις ανισότητες και παίρνουμε

$$(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΑΓ) < 2\,((ΒΝ) + (ΑΜ) + (ΓΡ)).$$

Επίσης $(ΑΜ) < (ΑΓ) + (ΓΜ)$,

$(ΑΜ) < (ΑΒ) + (ΒΜ)$

και άρα $2(ΑΜ) < (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΑΓ)$.

Το ίδιο για τις ΒΝ και ΡΓ. Προσθέτοντας βρίσκουμε ότι

$$2\,((ΑΜ) + (ΒΝ) + (ΓΡ)) < 3\,((ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΑΓ))$$

θ₄. Στην Κάτω Σλοβουδία παίζουν ένα ΠΡΟ-ΠΟ με 19 αγώνες αντί για 13 του δικούς μας ΠΡΟ-ΠΟ. Ένας περήφανος Σλοβουδός θέλει να έχει τουλάχιστον 7 σωστές προβλέψεις σε μία τουλάχιστον στήλη του δελτίου του. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στηλών που πρέπει να συμπληρώσει;

➤ Στη νικήτρια στήλη θα υπάρχουν 7 (1) ή 7 (2) ή 7 (x). Άρα 3 σταθερές στήλες αρκούν!

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

θ₁. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε οι παράλληλες ευθείες από το Μ προς τις άλλες δύο πλευρές να ορίζουν με τις πλευρές αυτές ίσα τμήματα. (Δηλ. αν ΜΧ ∥ ΑΒ, ΜΥ ∥ ΑΓ, το σημείο τομής των ΜΧ και ΑΓ είναι Δ και το σημείο τομής των ΜΥ και ΑΒ είναι Ε, θα πρέπει να έχουμε $(ΜΔ) = (ΜΕ)$).

➤ $$\frac{(ΜΔ)}{(ΑΒ)} = \frac{(ΜΓ)}{(ΒΓ)}, \quad \frac{(ΜΕ)}{(ΑΓ)} = \frac{(ΜΒ)}{(ΒΓ)}$$

$$(ΜΔ) = (ΜΕ) \Rightarrow \frac{(ΜΒ)}{(ΜΓ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)}$$

δηλαδή το σημείο Μ είναι ο πόδας της διχοτόμου της γωνίας Α.

θ₂. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt[\nu]{x^2} + \sqrt[\nu]{(x-1)^2} = 2\alpha\sqrt[\nu]{x^2 - x}$$

όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

➤ Επειδή το 0 και 1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης μπορούμε να διαιρέσουμε διά του $\sqrt[\nu]{x^2 - x}$, οπότε παίρνουμε

$$\sqrt[\nu]{\frac{x}{x-1}} + \sqrt[\nu]{\frac{x-1}{x}} = 2\alpha$$

θέτουμε $$y = \sqrt[\nu]{\frac{x-1}{x}},$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y^2 - 2\alpha y + 1 = 0$$

Άρα $y = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1})$

και $x = 1 / [1 - (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1})^\nu]$,

$|\alpha| \geq 1, \quad \alpha \neq 1$

ν άρτιος $\Rightarrow \alpha > 1$ και μόνο το − είναι αποδεκτό

ν περιττός $\Rightarrow \alpha \in (-\infty, 1] \cup (1, +\infty)$.

θ₃. Τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 70 τους χωρίζουμε σε δύο υποσύνολα με 35 στοιχεία το καθένα. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{35}$ τα στοιχεία του ενός υποσυνόλου και $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{35}$ τα στοιχεία του άλλου και έστω ότι

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < ... < \alpha_{35}, \quad \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > ... > \beta_{35}$.

Να αποδειχτεί ότι

$|\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + ... + |\alpha_{35} - \beta_{35}| = (35)^2$.

➤ Δεν μπορούμε να έχουμε $\alpha_1 > 35$ και $\beta_1 > 35$ ταυτόχρονα. Πράγματι, αν

$\alpha_1 > 35$, τότε $\alpha_{35} > 70$, άτοπο.

Επίσης $\beta_1 < 35$ είναι αδύνατο. Περαιτέρω, δεν μπορούμε να έχουμε $\alpha_\kappa > 35$ και $\beta_\kappa > 35$ ταυτόχρονα ούτε $\alpha_\kappa < 35$ και $\beta_\kappa < 35$ ταυτόχρονα. Δηλαδή

ή $\alpha_\kappa \geq 35$ και $\beta_\kappa \leq 35$,

ή $\alpha_\kappa \leq 35$ και $\beta_\kappa \geq 35$

Άρα

$$|\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| + ... + |\alpha_{35} - \beta_{35}| =$$
$$36 + 37 + ... + 70 - 1 - 2 - ... - 35 =$$
$$35 + 35 + ... + 35 = (35)^2$$

[Γενίκευση: αντί 35 θέσατε ν]

θ₄. Προεκτείνουμε τις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου και για κάθε πλευρά του τετραπλεύρου θεωρούμε τον κύκλο που εφάπτεται στην πλευρά αυτή και στις προεκτάσεις των δύο γειτονικών της πλευρών.

Ν' αποδειχτεί ότι τα κέντρα των κύκλων αυτών κείνται επί ενός κύκλου (δηλ. είναι ομοκυκλικά).

➤ Υπολογίστε το άθροισμα των απέναντι γωνιών του τετραπλεύρου που ορίζεται από τα κέντρα των κύκλων.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

θ₁. Έστω ένας 4 × 4 πίνακας με στοιχεία ακέραιους αριθμούς. Να αποδειχτεί ότι αν η ορίζουσα D του πίνακα Α είναι περιττός αριθμός, τότε μεταξύ των στοιχείων του Α υπάρχουν τουλάχιστον 3 άρτιοι αριθμοί.

➤ Αν μεταξύ των στοιχείων του Α υπάρχουν το πολύ 2 άρτιοι αριθμοί, τότε θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο στήλες του Α, τα στοιχεία των οποίων θα είναι περιττοί. Προσθέτουμε δύο απ' αυτές τις στήλες και αντικαθιστούμε τη μία απ' αυτές με το άθροισμά τους. Η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, το άθροισμα των στηλών έχει άρτια στοιχεία και επομένως η ορίζουσα είναι άρτιος αριθμός. Άτοπο.

(Γενίκευση: Αντί για 4 θέσατε ν).

θ_2. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n^{-n}(1+2^2+3^3+\ldots+n^n).$$

► $1 < n^{-n}(1+2^2+\ldots+n^n) < n^{-n}(n+n^2+\ldots+n^n) =$

$$n^{-n}\cdot n\frac{(n^n-1)}{n-1} = \frac{n^{n+1}-n}{n^{n+1}-n} = \frac{1-n^{-n}}{1-n^{-1}} \to 1$$

θ_3. Στο επίπεδο δίνονται 6 διαφορετικά σημεία A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Θεωρούμε τις ευθείες που ορίζονται από το βαρύκεντρο του τριγώνου $A_iA_jA_k$ και το βαρύκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τα υπόλοιπα σημεία $\left(\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cdot\right.$ αν τα δύο βαρύκεντρα συμπίπτουν, θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το κοινό βαρύκεντρο$\left.\right)$.

Να αποδειχτεί ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

► Έστω Ο ένα σημείο του επιπέδου. Το διάνυσμα

$$\frac{1}{6}[\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}+\vec{OA_5}+\vec{OA_6}]$$

έχει πέρας επί της ευθείας που ορίζεται από τα άκρα των διανυσμάτων των

$$\frac{1}{3}[\vec{OA_i}+\vec{OA_j}+\vec{OA_k}], \quad \frac{1}{3}[\vec{OA_{i'}}+\vec{OA_{j'}}+\vec{OA_{k'}}]$$

όπου $\{i', j', k'\}$ αποτελεί το συμπλήρωμα του συνόλου $\{i, j, k\}$

θ_4. Να αποδειχτεί ότι για οποιαδήποτε $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, ισχύει $[2x]+[2y] \geqslant [x]+[y]+[x+y]$.

► $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$ με $\alpha, \beta, \in [0, 1)$ τότε

$[2x]=[2[x]+2\alpha]=2[x]+[2\alpha]$, $\quad [2y]=[2y]+[2\beta]$,

$$[x+y]=[x]+[y]+[\alpha+\beta].$$

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις.

$$\alpha+\beta \in [0, 1), \quad \alpha+\beta \in [1, 2)$$

και εξετάζουμε την (ισοδύναμη ανισότητα)

$$[2\alpha]+[2\beta] \geqslant [\alpha+\beta].$$

Βραβευθέντες μαθητές Ν. Αττικής

Τάξης Γ΄ Γυμνασίου

Θεοδοσίου Διονύσης, *32ο Αθήνας*, Λιόγας Δημήτρης, *30ο Αθήνας*, Αναγνωστόπουλος Γιάννης, *3ο Ηλιούπολης*, Σιφναίος Γιάννης, *30ο Αθήνας*, Γαλιώτος Κώστας, *32ο Αθήνας*, Χρυσικόπουλος Ανδρέας, *32ο Αθήνας*, Ιωάννου Κώστας, *32ο Αθήνας*, Βαρδάκης Μιχάλης, *5ο Ζωγράφου*

Τάξης Α΄ Λυκείου

Βάρσου Αικατερίνη, *2ο Αθήνας*, Θεοδωρόπουλος Παναγιώτης, *2ο Αθήνας*, Γουλές Ανδρέας, *2ο Αθήνας*, Αργυρίου Ανδρέας, *35ο Αθήνας*, Μαρκοπούλου Αθηνά, *Λ. Μελισσίων*, Παγουλάτος Νίκος, *1ο Βούλας*, Γιαννόπαπας Βασίλης, *4ο Καλλιθέας*, Ξενογιάννης Απόστολος, *Λεόντειο Πατησίων*, Ασλανίδης Τιμόθεος, *Βαρβάκειο*, Κωλέττης Βύρων, *Λεόντειο Πατησίων*, Σιδηράς Γιώργος, *1ο Ελευσίνας*

Τάξης Β΄ Λυκείου

Σταθόπουλος Δημήτρης, *6ο Ζωγράφου*, Ματέκοβιτς Αθηνά, *2ο Ζωγράφου*, Πιζάνιας Νίκος, *Κολλέγιο Αθήνας*, Φραγκάκης Κων/ντίνος, *Κολλέγιο Αθήνας*, Βελένης Δημήτρης, *37ο Αθήνας*, Καραβέλας Μενέλαος, *6ο Πειραιά*, Κούρτης Σταμάτης, *13ο Αθήνας*, Βλάμου Ελένη, *1ο Μοσχάτου*, Δρίτσας Χρήστος, *1ο Ηλιούπολης*, Κόκκινος Κώστας, *59ο Αθήνας*, Μαυροφοράς Νίκος, *2ο Νίκαιας*, Ζούκης Φοίβος, *Σχ. Μωραΐτη*, Κιτσιώνας Σπυρίδων, *37ο Αθήνας*

Τάξης Γ΄ Λυκείου

Μουρούκος Βαγγέλης, *Λ. Κοντοπεύκου*, Οικονόμου Αντώνης, *35ο Αθήνας*, Κασιμάτης Αλέξανδρος, *Κολλέγιο Αθήνας*, Καλάκος Θανάσης, *2ο Αθήνας*, Τσιμπής Δημήτρης, *1ο Κηφισιάς*, Στεργιόπουλος Βασίλης, *2ο Κερατσινίου*, Πραματάρης Κώστας, *2ο Κερατσινίου*, Παρασκευοπούλου Ζαχαρούλα, *2ο Κερατσινίου*, Μιχαήλ Αναστάσιος, *Λεόντειο Ν. Σμύρνης*, Μπέλσης Γιώργος, *8ο Καλλιθέας*, Αργύρης Παναγιώτης, *1ο Γαλατσίου*, Βασιλόπουλος Λεωνίδας, Γεωργαντόπουλος Βύρων, *Ε.Π.Λ. Ηλιούπολης*, Δραβόπουλος Γιάννης, *1ο Αθήνας*, Μπαλατσούκας Νίκος, *2ο Ζωγράφου*

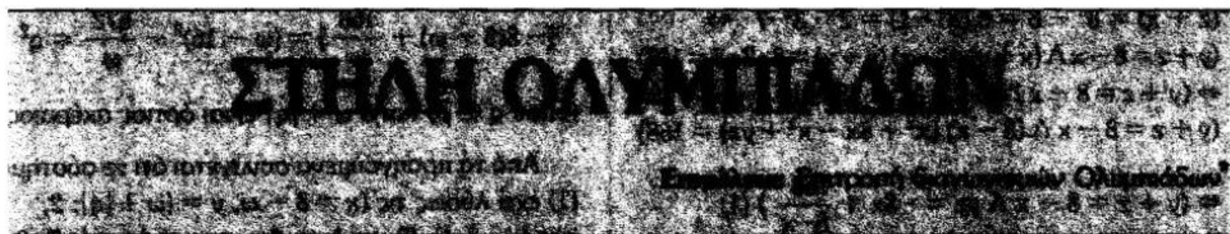
5η ΕΜΟ

Τάξης Γ΄ Γυμνασίου

Οικονομίδου Βασιλική, *Γερμ. Σχ. Θεσ/κης*, Μάρκου Βιργινία, *2ο Χαλανδρίου*, Ξηρουχάκης Ιωάννης, *3ο Χανίων*, Τερζούδη Αικατερίνη, *4ο Αλεξ/λεως*, Θεοδοσίου Διονύσιος, *32ο Αθηνών*, Αναγνωστόπουλος Ιωάννης, *3ο Ηλιουπόλεως*, Βανδώρου Χριστίνα, *Πειραματικό Πατρών*, Μητσιάδης Κων/νος, *Λεόντειος*, Γραβάνης Ιορδάνης, *1ο Ιωαννίνων*, Μαργαριτίδης Χαράλαμπος, *Παππάδου Λέσβου*, Σιώμος Αντώνιος, *4ο Καρδίτσας*, Σταθακόπουλος Μιχαήλ, *2ο Πειρ. Γυμνάσιο*, Σπανόπουλος Στέφανος, *Στ΄ Δημοτικού*

Τάξης Α΄ Λυκείου

Βάρσου Αικατερίνη, *2ο Αθηνών*, Κυριακόπουλος Ηλίας, *1ο Μεσολογγίου*, Αδαμάρας Χρήστος, *Ανατόλια*, Γουλές Ανδρέας, *2ο Αθηνών*, Κων/πουλος Παναγιώτης, *Πειρ. Πατρών*, Παγουλάτος Νικόλαος, *1ο Βούλας*, Ευγενίου Θεόδωρος, *Ν. Μουδανιών*, Θεοδωρόπουλος Παναγιώτης, *2ο Αθηνών*, Αργυρίου Ανδρέας, *35ο Αθηνών*, Δημόπουλος Δημήτριος, *1ο Λειβαδιάς*, Αθήτσος Βασίλειος, *Αμερ. Κολλ. Θεσ/κης*, Ασλανίδης Τιμόθεος, *Βαρβάκειος*, Καραγιάννης Γεώργιος, *Ν. Μουδανιών*, Μαρκοπούλου Αθηνά, *Μελισσίων*, Σταθάκη Μάρθα, *2ο*





Θέμα (Γ. Τζήκας - **Σέρρες**) [ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ]

• Έστω f: [0, 1] → [0, 1] για την οποία ισχύει:

ι) $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

ιι) $f(x + y) - f(x) = f(x) - f(x - y)$ για κάθε x, y τέτοια ώστε:

$$x \in [0, 1] \text{ και } [x - y, x + y] \subset [0, 1].$$

Να δείξετε ότι: $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Λύση

• Πρώτα-πρώτα, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ και $y = x$,

$[x - y, x + y] = [x - x, x + x] = [0, 2x] \subset [0, 1]$.

Συνεπώς η σχέση (ιι) δίνει $f(2x) - f(x) = f(x) - f(0)$

ή $$f(2x) = 2f(x) \qquad (1).$$

Από την άλλη πλευρά, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$ και $y = 1 - x$,

$$[x - y, x + y] = [2x - 1, 1] \subset [0, 1].$$

Άρα ή σχέση (ιι) δίνει $f(1) - f(x) = f(x) - f(2x - 1)$

ή $$f(2x - 1) = 2f(x) - 1 \qquad (2)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) - x$.

Είναι φανερό ότι $F([0, 1]) \subseteq [-1, 1]$, αφού:

$\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ και $-1 \leqslant -\chi \leqslant 0 \Rightarrow$

$$F(x) = f(x) - x \in [-1, 1].$$

Συνεπώς αν $M = \text{Sup}|F(x)| = \text{Sup}|f(x) - x|$,

τότε $0 \leqslant M \leqslant 1$ (αφού $\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant |F(x)| \leqslant 1$).

Θα αποδείξουμε ότι $M = 0$.

Πράγματι αν $M > 0$, τότε $\exists\, x_1 \in [0, 1]$, $\frac{M}{2} < |F(x_1)| \leqslant M$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ τότε από (1) έχουμε: $|F(2x_1)| =$

$= |f(2x_1) - (fx_1)| = |2(f(x_1) - 2x_1| = 2|f(x_1) - x_1|$

$= 2|F(x_1)| > 2\frac{M}{2} = M$ ή $|F(2x_1)| > M$, το οποίο

είναι άτοπο (αφού: $2x_1 \in [0, 1] \Rightarrow |F(2x_1)| \leqslant M$).

β) Αν $\frac{1}{2} < x_1 \leqslant 1$ τότε από την (2) έχουμε:

$$|F(2x_1 - 1)| = |f(2x_1 - 1) - (2x_1 - 1)| =$$

$$|2f(x_1) - 1 - 2x_1 + 1| = 2|f(x_1) - x_1| =$$

$2|F(x_1)| > 2\frac{M}{2} = M$ ή $|F(2x_1 - 1)| > M$,

το οποίο είναι άτοπο (αφού: $2x_1 - 1 \in [0, 1] \Rightarrow$

$$|F(2x_1 - 1)| \leqslant M).$$

Επομένως τελικά, $M = 0 = \sup|F(x)|\ x \in [0, 1] \Rightarrow$

$$\forall x \in [0, 1], |F(x)| = |f(x) - x| \leqslant M = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in [0, 1], |F(x)| = |f(x) - x| = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - x = 0 \text{ ή } f(x) = x.$$

Θέμα (Γ. Τζήκας - **Σέρρες**) [ΕΣΣΔ]

• Να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων το σύστημα: $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 8$.

Λύση

• Είναι φανερό ότι: $\forall\ x, y, z, \in \mathbb{Z}$, $(x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 8) \Leftrightarrow (x + y + z = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 8 \wedge 3(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^3 + (x^3 + y^3 + z^3) \Leftrightarrow (x + y + z = 8 \wedge 3(x + y)(y + z)$

(Θ. Μπόλης, Δ. Κοντογιάννης, Β. Ζώτος, Γ. Ωραιόπουλος, Β. Ντζιαχρήστος, Γ. Τυρλής).

$(z + x) = 8^3 - 8 = 8\,(8^2 - 1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \Leftrightarrow$
$(y + z = 8 - x \wedge (x+y)(8-x)(z+x) = 8 \cdot 3 \cdot 7 = 168)$
$\Leftrightarrow (y + z = 8 - x \wedge (8-x)\,[x^2 + (8-x)x + yz] = 168$
$(y + z = 8 - x \wedge (8-x)\,(x^2 + 8x - x^2 + yz) = 168)$

$$\Leftrightarrow (y + z = 8 - x \wedge yz = -8x + \frac{168}{8-x}\ )\ (1)$$

Το σύστημα (1) έχει ακέραιες λύσεις τότε ακριβώς, όταν:

ι) ο $8 - x = \omega \in \Delta\,(168) = \Delta\,(2^3 \cdot 3 \cdot 7)$

ιι) η ως προς t εξίσωση: $t^2 - (y + z)\,t + yz = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 - \omega t + [-8\,(8-\omega) + \frac{168}{\omega}] = 0$$

με ρίζες τους $y, z \in \mathbb{Z}$, έχει διακρίνουσα $D = \omega^2 - 4$

$$[-8(8-\omega) + \frac{168}{\omega}] = (\omega - 16)^2 - \frac{672}{\omega} = q^2$$

(όπου $q \in \mathbb{Z}$) και ο $\omega + |q|$ είναι άρτιος ακέραιος.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι το σύστημα (1) έχει λύσεις τις $(x = 8 - \omega,\ y = (\omega + |q|): 2,$ $z = (\omega - |q|): 2)$ και $(x = 8 - \omega,\ y = (\omega - |q|): 2,$

$z = (\omega + |9|): (2)$ όπου $\omega \in \Delta\,(168) =$ $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 14, \pm 21, \pm 24, \pm 28, \pm 42, \pm 56, \pm 84, \pm 168\}$, $q^2 = (\omega - 16)^2$

$- \frac{672}{\omega}$ με $q \in \mathbb{Z}$, και $\omega + |q| \in \mathbb{Z}_2 =$ $\{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$. Έτσι λοιπόν έχουμε τις παρακάτω λύσεις:

ω	$D = q^2$	$\omega + \lvert q\rvert$	$x = 8 - \omega$	$y = (\omega \pm q):2$	$z = (\omega \mp q):2$
24	6^2	30	−16	15	9
24	6^2	30	−16	9	15
−1	31^2	30	9	15	−16
−1	31^2	30	9	−16	15
−7	25^2	18	15	9	−16
−7	25^2	18	15	−16	9

Λύσεις στα θέματα της 27ης Δ.Μ.Ο (Απ' τα προηγούμενα) χρόνια. Δείτε τεύχος 2 (σχ. χρονιά 86-87). Από τον Χ. Αθανασιάδη **Θεσ/νίκη.**

3ο Θέμα: (Κίνα) : Έστω Z_i ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο σημείο A_i, ω_i ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο P_i στο μιγαδικό επίπεδο. Αφού το $P_{\kappa+1}$ προκύπτει με στροφή του P_κ γύρω απ' το $A_{\kappa+1}$ κατά $-\frac{2\pi}{3}$ το διάνυσμα $\vec{OM'} = \overrightarrow{A_{\kappa+1}P_{\kappa+1}}$ προκύπτει από στροφή του $\vec{OM} = \overrightarrow{A_{\kappa+1}P_\kappa}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{3}$ και αφού στα M', M απεικονίζονται οι $\omega_{\kappa+1} - z_{\kappa+1}$ αντίστοιχα θα έχουμε

$$\omega_{x+1} - z_{\kappa+1} =$$

$$= (\omega_\kappa - z_{\kappa+1}) \left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Θέτοντας $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = A$

παίρνουμε $\omega_{\kappa+1} - z_{\kappa+1} =$

$$= (\omega_\kappa - z_{\kappa+1})\,A \Leftrightarrow \omega_{\kappa+1} - A\omega_\kappa = (1-A)\,z_{\kappa+1}$$

$$\forall \kappa \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

ή

$$\omega_1 - A\omega_0 = (1-A)\,z_1$$
$$\omega_2 - A\omega_1 = (1-A)\,z_2$$
$$\vdots$$
$$\omega_{1986} - A\omega_{1985} = (1-A)\,z_{1986})$$
$$\vdots$$

Εύκολα όμως απ' αυτές τις σχέσεις υπολογίζουμε τον ω_ν. Πράγματι επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$\omega_\nu = (1-A)$$

$$(A^{\nu-1}z_1 + A^{\nu-2}z_2 + \dots + Az_\nu + z_\nu) + A^\nu \omega_0 \quad (1)$$

Το A όμως είναι κυβική ρίζα της μονάδας άρα

$$A^{3k} = 1,\ A^2 = -A-1.$$

Για $\nu = 1986$ και εφόσον $\omega_{1986} = \omega_0$ η (1) δίνει:

$$\omega_0 = (1-A)$$

$$(A^{1985}z_1 + A^{1984}z_2 + \dots + Az_{1985} + z_{1986}) +$$
$$+ A^{3 \cdot 662}\omega_0 \Leftrightarrow (1 - A)$$

$$(A^{1985}z_1 + A^{1984}z_2 + ... + Az_{1985} + z_{1986}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{3\cdot661+2}z_1 + A^{3\cdot661+1}z_2 + A^{3\cdot661}z_3 + ... +$$

$$+ Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2z_1 \cdot 662 + Az_2\,662 + z_3 \cdot 662 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2z_1 + Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -z_1 - Az_1 + Az_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)(-A) \Leftrightarrow$$

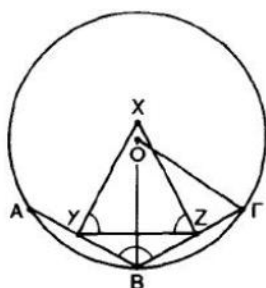
$$\Leftrightarrow z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\left(\frac{1}{2} + \iota\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

πράγμα που σημαίνει ότι το z_3 προκύπτει από στροφή του z_2 γύρω απ' το z_1 κατά γωνία $\frac{\pi}{2} = 60^0$, άρα το $A_1 \hat{A}_2 A_3$ είναι ισόπλευρο.

4ο Θέμα (Ισραήλ): Εύκολα βλέπουμε ότι το XYBZ είναι εγγράψιμο ($Y \in AB$, $Z \in B\Gamma$, $X\hat{Y}Z = O\hat{B}\Gamma$, όπου A, B, Γ διαδοχικές κορυφές του κανονικού πολυγώνου), αφού

$$\hat{X} + A\hat{B}\Gamma = B\hat{O}\Gamma + O\hat{B}\Gamma + + O\hat{\Gamma}B = 180^0,$$

άρα $\quad Y\hat{B}X = Y\hat{Z}X = Y\hat{B}O,$



δηλ. το X κινείται στην προέκταση της BO. Θα βρω τη μέγιστη απόσταση XO. Είναι

$$XB \cdot YZ = BY \cdot R + + BZ \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XB = \frac{R(BY+BZ)}{AB} = \frac{R}{\alpha}(BY + BZ),$$

όπου $AB = \alpha$. Επομένως το XB γίνεται μέγιστο όταν το $BY + BZ$ γίνεται μέγιστο.

Αλλά $\quad YZ = \alpha, \quad Y\hat{B}Z = 2\phi = \sigma\tau\alpha\theta.$

άρα ως γνωστόν το $BY + BZ$ γίνεται μέγιστο όταν

$$BY_0 = BZ_0, \quad \text{άρα} \quad BO \perp Y_0Z_0,$$

οπότε $\frac{\alpha/2}{BY_0} = \eta\mu\phi \Rightarrow 2BY_0 = \frac{\alpha}{\eta\mu\phi} = BY_0 + BZ_0$

και συνεπώς

$$XB_{\mu\varepsilon\gamma.} = \frac{R}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\eta\mu\phi} = \frac{R}{\eta\mu\phi} = BX_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OX_0 = R\left(\frac{1}{\eta\mu\phi} - 1\right),$$

όπου $\quad \phi = O\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\nu}.$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι όλα τα (ν σε πλήθος) τμήματα $O\Delta_i$, $i = 1, 2, ..., \nu$ με $\Delta_i \in OA_i$ και

$$O\Delta_i = OX_0 = R\left(\frac{1}{\eta\mu\phi} - 1\right), \qquad \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\nu}.$$

5ο Θέμα (Αγγλία): Από την

$$f[xf(y)] \cdot f(y) = f(x + y)$$

για $y = 2$ είναι

$$f(x+2) = f[xf(2)] \cdot f(2) = 0,$$

άρα $\quad f(x) = 0 \; \forall x > 2.$

Έστω $x + y = 2$, $x, y > 0$, τότε

$$f[xf(2 - x)]\, f(y) = f(2) = 0$$

$$\text{όπου} \Rightarrow [f(y) \neq 0] \Rightarrow f[xf(2-x)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot f(2-x) \geqslant 2 \Rightarrow \phi(2-x) \geqslant \frac{2}{x}$$

ή αν βάλουμε το $2 - x$ όπου x,

$$f(x) \geqslant \frac{2}{2-x} \; (1) \; \forall x \in [0, 2].$$

Έστω $\quad x+y < 2.$

$$f[xf(y)]\, f(y) = f(x+y) \neq 0 \Rightarrow f[xf(y)] \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf(y) < 2 \Rightarrow f(y) < \frac{2}{x}$$

για $x + y < 2$, δηλ. $f(x) < \frac{2}{y}$ όταν $x+y < 2$.

Έστω $\quad x+y+\varepsilon = 2, \quad \varepsilon > 0,$

τότε $$f(x) < \frac{2}{2-x-\varepsilon} \qquad (2)$$

Εάν όμως $f(x) > \frac{2}{2-x}$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ όπως εύκολα αποδεικνύεται τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq \frac{2}{2-x-\varepsilon}, \qquad 2-x-\varepsilon > 0$$

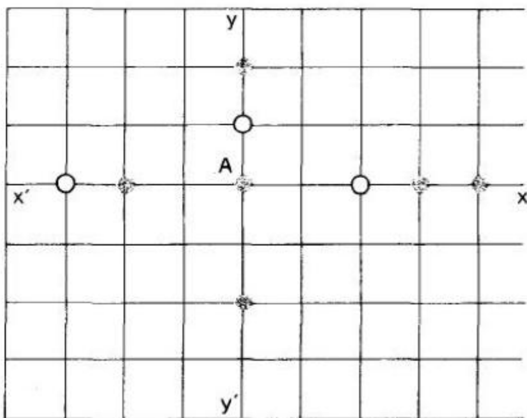
(διότι αρκεί να είναι $\varepsilon < 2-x - \dfrac{2}{f(x)}$), άτοπο ως προς τη (2).

'Αρα $\quad f(x) \leq \dfrac{2}{2-x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{2-x}$.

Δηλ. $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \\ \dfrac{2}{2-x}, & \text{αν } x \in [0,2) \end{cases}$

6ο Θέμα (Ανατ. Γερμανία): Θα αποδείξω την πρόταση επαγωγικά (ότι δηλαδή $\forall$ Ε μπορούμε να χρωματίσουμε τα σημεία του μ' αυτόν τον τρόπο).

'Οταν τα σημεία είναι 1 ή 2, η πρόταση είναι φανερή. 'Εστω ότι ισχύει για πλήθος κ. Θεωρούμε κ+1 σημεία με ακέραιες συντεταγμένες και διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.



α) Κάποιος άξονας περιέχει περιττό πλήθος σημείων απ' τα κ+1, έστω ο xx'. Διαλέγουμε ένα σημείο του Α στην τύχη και θεωρούμε το χρωματισμό των υπόλοιπων κ σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής ώστε σε κάθε οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα η διαφορά των άσπρων απ' τα κόκκινα σημεία να είναι −2, 0 ή 1. Αφού όμως ο xx'' έχει άρτιου πλήθους σημεία απ' τα κ, περιέχει τόσα άσπρα όσα και κόκκινα σημεία. Επομένως ό,τι κι αν βάψουμε το Α η διαφορά των άσπρων απ' τα κόκκινα στον xx' (ας τη συμβολίσουμε Δxx') είναι 1 ή −1. Αν yy'' ο κάθετος άξονας στον xx' στο Α, τότε αν Δyy' = 1 (τα άσπρα είναι περισσότερα κατά 1) ή Δyy' = 0 βάφουμε το Α κόκκινο, ενώ το βάφουμε άσπρο αν Δyy' = 1 και η πρόταση αποδείχτηκε και για τον κ+1.

β) 'Ολοι οι άξονες έχουν άρτιο πλήθος σημείων (εννοώ τα αρχικά κ+1 σημεία).

Εξαιρούμαι τυχαία πάλι σημείο Α και θεωρούμε το χρωματισμό, σύμφωνα με την υπόθεση, των υπολοίπων κ. 'Εστω xx', yy' οι δυο άξονες που περνούν απ' το Α. Για κάθε άξονα $x_1 x_1'$, $\neq$ xx', yy' είναι $\Delta x_1 x_1' = 0$ αφού ο $x_1 x_1'$ έχει άρτιο πλήθος σημείων, ενώ

$$\Delta xx' = \pm 1, \qquad \Delta yy' = \pm 1.$$

Αλλά $\Delta xx' = \Delta yy'$, διότι αν $x_i x_i'$ είναι οι οριζόντιοι, $y_i y_i'$ οι κάθετοι άξονες τότε

$$\sum_{i \in Z} \Delta x_i x_i' = \sum_{i \in Z} \Delta y_i y_i' \Rightarrow \Delta xx' = \Delta yy'.$$

Αν λοιπόν $\quad \Delta xx' = \Delta yy' = -1$ (σχ. 1)

τότε βάφουμε το Α άσπρο, ενώ αν

$$\Delta xx' = \Delta yy' = 1,$$

το βάφουμε κόκκινο και η πρόταση ισχύει και για τον κ+1.

'Αρα και για κάθε ν, δηλ. για οποιοδήποτε Ε.

Θέμα 5ο: (Χ. Αθανασιάδης - **Θεσ/νίκη**)*

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε στο επίπεδο ν σημεία μη συνευθειακά ανά 3 ώστε οι αποστάσεις ανά 2 να είναι άρρητες και τα εμβαδά όλων των τριγώνων να είναι ρητά.

Απόδειξη

'Εστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και τα σημεία

$$A_i\,(x_i, y_i),\ i \in \{1, 2, \ldots, \nu\} = S$$

στο επίπεδο. Είναι

$$d(A_i A_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad \forall i,\ j \in S,\ \ i \neq j$$

και $\quad \pm 2\,(E_{A_iA_jA_\kappa}) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_\kappa & y_\kappa & 1 \end{vmatrix}$

για $\quad i, j, \kappa \in S,\ i \neq j \neq \kappa \neq i$

Αν θέσουμε $\quad x_i = i^2,\ y_i = i\ \forall i \in S$,

τότε $\quad d(A_i A_j) = |i - j| \cdot \sqrt{(i + j)^2 + 1}$,

όπου προφανώς $\quad \sqrt{(i + j)^2 + 1} \notin Q$

γιατί θα έπρεπε $\ i + j = 0\ $ άτοπο και

$$\pm 2(A_i\, A_j\, A_\kappa) = (i-j)\,(j-\kappa)\,(i-\kappa) \in Q^*$$

(ορίζουσα Vandermonde).

Οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται.

* συνέχεια απ' το προηγούμενο τεύχος

4η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Έγινε στις 19 Δεκέμβρη '87 στην Αθήνα η 4η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα με συμμετοχή 200 περίπου ατόμων απ' όλη την Ελλάδα, που είχαν διακριθεί στον Πανελλήνιο Μαθηματικό Διαγωνισμό της 6ης Νοέμβρη '87. Έχει κιόλας γίνει ο 1ος και 2ος προπαρασκευαστικός γύρος και θα υπάρξει ο αντίστοιχος (6 Φεβρ. '88) και (12 Μάρτη '88) τελικός γύρος τον Απρίλη '88 με έγκαιρη γνωστοποίηση της ημερομηνίας προς τους προκριθέντες μαθητές. Ο 2ος προπαρασκευαστικός γύρος περιλαμβάνει ύλη Β' Λυκείου, ενώ ο 3ος τελικός γύρος περιλαμβάνει ύλη Γ' Λυκείου. Σ' αυτό το τεύχος δημοσιεύουμε:

- Τα θέματα της 4ης Εθνικής Ολυμπιάδας Μαθηματικών και τις λύσεις των βραβευθέντων μαθητών, ενώ:
- Τα θέματα του 2ου και 3ου προπαρασκευαστικού κύκλου και οι λύσεις τους (του 1ου είχαν δημοσιευτεί στο 3ο τεύχος).
- Τα ονόματα των βραβευθέντων μαθητών στον 1ο Πανελλήνιο Μαθηματικό διαγωνισμό καθώς και τα ονόματα των βραβευθέντων μαθητών στην 4η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών.
- Την Εθνική ομάδα που πήρε μέρος στην Κύπρο (5η Βαλκανιάδα) και 29η Διεθνή Ολυμπιάδα (Καμπέρα - Σίδνεϋ - Αυστραλία), θα δημοσιευτούν στο τεύχος (1) της επόμενης σχολικής χρονιάς.

Γ' Γυμνασίου

Θ1: α) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\left(\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \beta\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)$$

έτσι ώστε η παράσταση να πάρει την απλούστερη μορφή.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{2x^2 - (3\alpha+\beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - (\alpha+3\beta)x + \alpha\beta + \beta^2}$$

Λύση:

α) $$\left(\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \beta\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha(\alpha+\beta) - 4\alpha\beta + \beta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right) :$$

$$: \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{-(\alpha-\beta)} - \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 4\alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha+\beta} : \frac{\alpha(\alpha-\beta) + \beta(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha+\beta} : \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta} : \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta} : \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} = \alpha - \beta$$

β) $$\frac{2x^2 - (3\alpha+\beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - (\alpha+3\beta)x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3\alpha x - \beta x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - \alpha x - 3\beta x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2\alpha x - \alpha x - \beta x + \alpha^2 + \alpha\beta}{2x^2 - \alpha x - 2\beta x - \beta x + \beta^2 + \alpha\beta} =$$

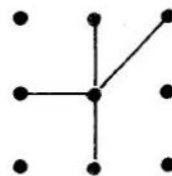
$$= \frac{2x(x-\alpha) + \alpha(\alpha-x) + \beta(\alpha-x)}{2x(x-\beta) + \alpha(\beta-x) + \beta(\beta-x)} =$$

$$= \frac{(\alpha-x)(-2x+\alpha+\beta)}{(\beta-x)(-2x+\alpha+\beta)} = \frac{\alpha-x}{\beta-x}$$

Θ2: Να φέρετε το μικρότερο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν σημεία του σχήματος έτσι, ώστε το νέο σχήμα που θα προκύψει να έχει ακριβώς

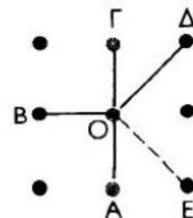
α) έναν άξονα συμμετρίας
β) δυο άξονες συμμετρίας
γ) τέσσερις άξονες συμμετρίας.

Να γίνει ξεχωριστό σχήμα για κάθε περίπτωση.

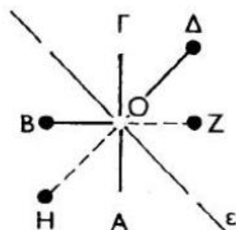


Λύση:

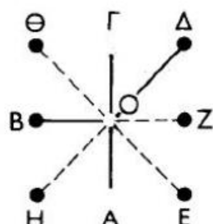
α) Στο σχήμα φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. Έτσι το σχήμα αποκτά έναν άξονα συμμετρίας την ευθεία ΒΟ.



β) Στο σχήμα φέρνουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα, τα ΟΖ, ΟΗ. Έτσι το σχήμα αποκτά δυο άξονες συμμετρίας, τις ευθείες ΔΗ και ε.



γ) Στο σχήμα φέρνουμε 4 ευθύγραμμα τμήματα, τα ΟΕ, ΟΗ, ΟΒ, ΟΖ. Έτσι το σχήμα αποκτά 4 άξονες συμμετρίας τις ευθείες ΘΕ, ΔΗ, ΒΖ, ΑΓ.



Θ3: Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3, \qquad q(x) = x^2 - 2x - 3,$$
$$R(x) = -x^2 - 5x + \alpha$$

α) Να ορίσετε το α έτσι ώστε το πολυώνυμο R(x) να διαιρείται από το x − 2. β) Να αναλύσετε σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώμυμα P(x), Q(x), R(x). γ) Να δείξετε ότι η παράσταση $-x^2 + x + \frac{P(x)}{Q(x)} + 15$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

α) Αφού το πολυώνυμο $R(x) = -x^2 - 5x + \alpha$, διαιρείται από το $x - 2$, τότε το R(2) θα είναι ίσο με το 0, όπως ξέρουμε: Δηλαδή:

$$R(2) = -2^2 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 10 + 4 \Leftrightarrow \alpha = 14$$

Άρα το R(x) διαιρείται από το x − 2, όταν α = 14.

β) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3 = x^3(x - 3) + (x - 3) =$
$= (x - 3)(x^3 + 1) = (x - 3(x + 1)(x^2 - x + 1) \qquad (1)$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \qquad (2)$$

$$R(x) = -x^2 - 5x + 14$$

Το πολυώνυμο αυτό θα το αναλύσουμε σε γινόμενο παραγόντων

$$R(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) =$$
$$= -(x + 7)(x - 2) = (x + 7)(2 - x)$$

γ) $-x^2 + x + \frac{P(x)}{Q(x)} + 15 \overset{(1)(2)}{=}$

$$\overset{(1)(2)}{=} -x^2 + x + \frac{(x - 3)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} + 15 =$$

$$= -x^2 + x + x^2 - x + 1 + 15 = 16 = 4^2$$

Θ4: α) Αν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad \beta \neq \pm\gamma$ να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^3 - \gamma^3}{\beta - \gamma}$.

β) Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \kappa$, $\alpha \neq 0$ να βρεθεί η παράσταση $\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$ σαν έκφραση του κ.

Λύση:

α) $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \qquad (1)$

$$\frac{\beta^3 + \gamma^3}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^3 - \gamma^3}{\beta - \gamma} = \frac{(\beta^3 + \gamma^3)(\beta - \gamma) + (\beta^3 - \gamma^3)(\beta + \gamma)}{(\beta + \gamma)(\beta - \gamma)}$$

$$= \frac{\beta^4 - \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 - \gamma^4 + \beta^4 + \beta^3\gamma - \beta\gamma^3 - \gamma^4}{\beta^2 - \gamma^2} =$$

$$= \frac{2(\beta^4 + \gamma^4)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)}{\beta^2 - \gamma^2} \overset{(1)}{=} 2\alpha^2$$

β) $\alpha = \frac{1}{\alpha} = \kappa \qquad (1)$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 \qquad (2)$$

$$x + \frac{1}{\alpha} = \kappa \Leftrightarrow \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2\right]^2 = (\kappa^2)^2 \Leftrightarrow \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2\right)^2 = \kappa^4 \Leftrightarrow$$

$$= \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} + 4 + 2 + 4\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2} = \kappa^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\left[\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 - 2\right] \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4(\kappa^2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 6 - 4\kappa^2 + 8 \Leftrightarrow \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4} = \kappa^4 - 4\kappa^2 + 2$$

Οι λύσεις έχουν δοθεί απ' τον βραβευθέντα μαθητή Μαργαριτόπουλο Θωμά του **4ου γυμνασίου Βέροιας**.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Έστω ότι $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ και

$$\sqrt{1987 + \alpha} + \sqrt{1987 + \beta} = 2\sqrt{1987 + \gamma}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \geqslant \gamma$.

Λύση:

$$\sqrt{1987 + \alpha} + \sqrt{1987 + \beta} = 2\sqrt{1987 + \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1987+\alpha}+\sqrt{1987+\beta}\right)^2=\left(2\sqrt{1987+\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 1987+(\alpha+\beta)=4\,(1987+\gamma)-$$
$$-2\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)}\quad :2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1987+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\,(1987+\gamma)-$$
$$-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\cdot 1987+2\gamma-1987-$$
$$-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)=2\gamma+1987-\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$\alpha>0,\ \beta>0\ (\gamma>0)\ \Rightarrow$ (με Ανισότητα των Μέσων ή Ανισότητα του Couchy) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(1987+\alpha)+(\beta+1987)}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)\,(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

που λέει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{αν}\quad \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_\nu>\alpha_n\\ \Rightarrow \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\geqslant\sqrt{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha>0\\ 1987>0\end{array}\right\}\Rightarrow 1987+\alpha>0 \qquad \left.\begin{array}{l}\beta>0\\ 1987>0\end{array}\right\}\Rightarrow 1987+\beta>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 1987+\alpha+1987+\beta}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 1987+(\alpha+\beta)}{2}\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1987+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\sqrt{(1987+\alpha)(1987+\beta)}-1987 \qquad (2)$$

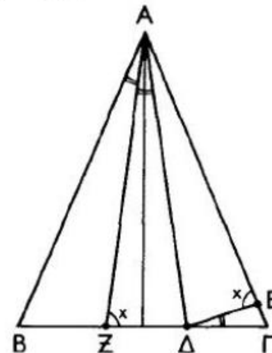
$$(1),(2)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geqslant\gamma$$

Γ. Μιχάι **(5ο Λύκειο Αιγάλεω)**

Θ2: Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ στη βάση ΒΓ και σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}E$. Να αποδειχθεί ότι ΑΔ = ΑΕ.

Λύση:

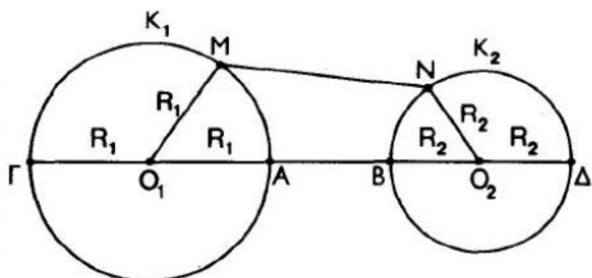
Απόδειξη: Φέρνω τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$, που τέμνει το ΒΓ στο Ξ και σχηματίζονται οι γωνίες $B\hat{A}\Xi=\Xi\hat{A}\Delta=x$ αλλά και $E\hat{\Delta}\Gamma=x$. Άρα η γωνία $A\hat{\Xi}\Delta=x+\hat{B}$ (εξωτερική του τριγώνου ΑΞΒ) και η γωνία $A\hat{E}\Delta=x+\hat{\Gamma}$ (εξωτερική του τριγώνου ΔΕΓ). Όμως $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ (αφού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές) και συνεπώς $A\hat{\Xi}\Delta=A\hat{E}\Delta$.



Η γωνία $A\hat{\Delta}E=A\hat{\Delta}\Gamma-E\hat{\Delta}\Gamma \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E=x+\hat{\Gamma}+x-\Delta$ (όπου $A\hat{\Delta}\Gamma=x+\hat{\Gamma}+x$ σαν εξωτερική στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$). Άρα, $A\hat{\Delta}E=x+\hat{\Gamma}=A\hat{E}\Delta \Rightarrow \overset{\triangle}{A\Delta E}$ ισοσκελές τρίγωνο $\Rightarrow$ ΑΔ = ΑΕ.

Α. Ματέκοβιτς **(Λύκειο Ζωγράφου)**

Θ3: Δυο κύκλοι (O_1, R_1), (O_2, R_2) βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου. Να βρεθεί ότι: α) το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων, β) το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων.



Απόδειξη: 1) Παίρνουμε δυο τυχαία σημεία
$M\in K_1(O_1, R_1)$ και $N\in K_1(O_2, R_2)$.
Φέρνουμε επίσης την ευθεία O_1O_2 (ενώνει τα κέντρα των δυο κύκλων) που τέμνει το K_1 στο Α και το K_2 στο Β (Α, Β είναι εσωτερικά σημεία του ευθ. τμήματος O_1O_2). Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε θέση των Μ και Ν, η τεθλασμένη γραμμή O_1MNO_2 περιβάλλει το τμήμα O_1O_2 και συνεπώς:

$$O_1M+MN+NO_2\geqslant O_1O_2 \Leftrightarrow R_1+MN+R_1+AB+R_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow MN\geqslant AB.$$

Άρα το ελάχιστο μήκος του ευθ. τμήματος ΜΝ που συνδέει σημεία των δυο κύκλων είναι ίσο με το μήκος του ΑΒ, όπου ΑΒ βρίσκεται στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα του K_1 και K_2 και $A\in K_1$, $B\in K_2$ αλλά $O_1, O_2\in AB$.

2) Με τα παραπάνω δεδομένα βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε σημεία Μ και Ν (που τα ορίσαμε προηγουμένως), η τε-

θλασμένη γραμμή MO_1O_2N περιβάλλει το τμήμα MN και άρα:

$MO_1 + O_1O_2 + O_1N \geqslant MN \Leftrightarrow R_1 + O_1O_2 + R_2 \geqslant MN$ (1)

Αν προεκτείνουμε την O_1O_2 μέχρι να τμήσει το K_1 δεύτερη φορά στο Γ και το K_2 στο Δ (Γ, Δ εξωτερικά σημεία του O_1O_2) θα έχουμε ότι: $\Gamma\Delta = R_1 + O_1O_2 + R_2$ (2)

Από την (1) και (2) $\Rightarrow$ $\Gamma\Delta \geqslant MN$.

Επομένως, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μήκος του MN είναι ίση με το μήκος ΓΔ. Και άρα, το μεγαλύτερο ευθ. τμήμα που συνδέει σημεία των κύκλων K_1, K_2 είναι αυτό που περνάει από τα κέντρα των δυο κύκλων και έχει άκρα τα $\Gamma \in K_1$ και $\Delta \in K_2$ ε.ω. $\Gamma, \Delta \in O_1O_2$ (τμήμα).

Α. Ματέκοβιτς **(Λύκειο Ζωγράφου)**

Θ4: Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\kappa^2 + 2\lambda$, $\lambda^2 + 2\kappa$ να είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

Λύση: Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa^2 + 2\lambda = x^2 \Rightarrow 2\lambda = x^2 - \kappa^2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x^2-\kappa^2}{2}\\ \lambda^2 + 2\kappa = y^2\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-\kappa^2}{2}\right)^2 + 2\kappa = y^2 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 2x^2\kappa^2 + \kappa^4}{4} + 2\kappa = y^2 \mid 4 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x^4 - 2x^2\kappa^2 + \kappa^4 + 8\kappa = 4y^2 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2(x^2)(\kappa^2) + (\kappa^4 + 8\kappa) = (2y)^2\\ y \in \mathbb{N} \Rightarrow 2y \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

για να έχουμε ένα τετράγωνο πρέπει:

$$(\kappa^2)^2 = \kappa^4 + 8\kappa \Leftrightarrow \kappa^4 = \kappa^4 + 8\kappa \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \kappa = 0$ μα από την υπόθεση $\kappa \neq 0$.

Άρα δεν υπάρχουν κ και λ φυσικοί θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $\kappa^2 + 2\lambda$ και $\lambda^2 + 2\kappa$ να είναι τετράγωνα φυσικών αριθμών.

Γ. Μιχάι **(5ο Λύκειο Αιγάλεω)**

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Δίνεται ότι $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ και

$$x + y = 2\alpha - 4, \quad xy = \alpha^2 - 3\alpha + 5.$$

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $x^2 + y^2$;

Λύση: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy =$

$$= 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 - 2\alpha^2 + 6\alpha - 10 = 2\alpha^2 - 10\alpha + 6.$$

Όπως είναι γνωστό η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι συμβιβαστό το σύστημα

$x + y = S$, $xy = p$ είναι η $S^2 \geqslant 4p$,

άρα στην περίπτωσή μας η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η

$$(2\alpha - 4)^2 \geqslant 4(\alpha^2 - 3\alpha + 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 \geqslant 4\alpha^2 - 12\alpha + 20 \Leftrightarrow 4\alpha \leqslant -4 \Leftrightarrow \alpha \leqslant -1$$

Επομένως ζητάμε να βρούμε το min f(α) $\alpha \in (-\infty, -1]$ όπου $f(\alpha) = 2\alpha^2 - 10\alpha + 6$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, επομένως είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, άρα το min f(α) $\alpha \in (-\infty, -1]$ είναι το

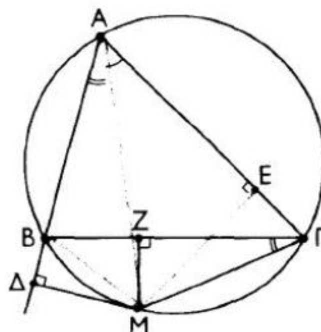
$$f(-1) = 2 + 10 + 6 = 18 \quad (\text{για } x = y = -3).$$

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Θ2: Δίνεται ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O, R). Αν M είναι σημείο του τόξου ΒΓ και αν Δ, Ε, Ζ είναι οι πόδες των καθέτων που άγονται από το σημείο M επί των ευθειών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(B\Gamma)^2}{(MZ)^2} \geqslant B\,\frac{R\,U_\alpha}{(M\Delta)\cdot(ME)}$$

όπου U_α είναι το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.



Λύση:

Κατ' αρχήν θα δείξω ότι:

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} + \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} \qquad (1)$$

Είναι

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ} + \overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} + \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}}$$

Αλλά $M\hat{B}\Gamma = M\hat{A}\Gamma \Rightarrow \overset{\triangle}{MBZ} \approx \overset{\triangle}{MAE} \Rightarrow \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{ME}}$ (2)

και $M\hat{\Gamma}B = M\hat{A}B \Rightarrow \overset{\triangle}{M\Gamma Z} \approx \overset{\triangle}{MA\Delta} \Rightarrow \dfrac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} = \dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{M\Delta}}$ (3)

(τα τρίγωνα είναι και ορθογώνια).

Ώστε

$$\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{MZ}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{MZ}} + \frac{\overline{Z\Gamma}}{\overline{MZ}} \overset{(2),(3)}{=\!=} \frac{\overline{AE}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{M\Delta}} =$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma} - \overline{E\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB} + \overline{B\Delta}}{\overline{M\Delta}} = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} - \frac{\overline{E\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{B\Delta}}{\overline{M\Delta}} =$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{ME}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{M\Delta}} \qquad \text{αφού } \Delta\hat{B}M = A\hat{\Gamma}M$$

διότι το ΑΒΜΓ είναι εγγράψιμο, οπότε

$$\overset{\triangle}{ΜΕΓ} \approx \overset{\triangle}{ΜΔΒ} \Rightarrow \frac{\overline{ΕΓ}}{\overline{ΜΕ}} = \frac{\overline{ΒΔ}}{\overline{ΜΔ}}.$$

Ώστε η (1) αποδείχτηκε (κατά τη διάρκεια της απόδειξης θεώρησα τις φορές των μοναδιαίων διανυσμάτων τέτοιες ώστε τα $\overline{ΑΒ}$, $\overline{ΑΓ}$, $\overline{ΒΓ}$, $\overline{ΜΔ}$, $\overline{ΜΕ}$, $\overline{ΜΖ}$ να είναι θετικά). Επομένως η (1) γράφεται και

$$\frac{ΒΓ}{ΜΖ} = \frac{ΑΒ}{ΜΔ} + \frac{ΑΓ}{ΜΕ} \qquad (4)$$

(όπου ΒΓ, ΜΖ, κ.λπ. τα μέτρα των τμημάτων).

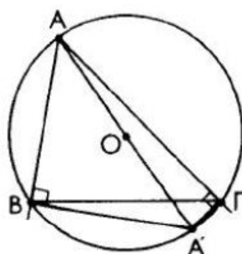
$$(4) \Rightarrow \frac{ΒΓ^2}{ΜΖ^2} = \left(\frac{ΑΒ}{ΜΔ} + \frac{ΑΓ}{ΜΕ}\right)^2 \geqslant 4 \cdot \frac{ΑΒ}{ΜΔ} \cdot \frac{ΑΓ}{ΜΕ} =$$

$$= \frac{4 \cdot ΑΒ \cdot ΑΓ}{ΜΔ \cdot ΜΕ} = \frac{4 \cdot 2RU_α}{ΜΔ \cdot ΜΕ} = \frac{8RU_α}{ΜΔ \cdot ΜΕ}$$

αφού $(x+y)^2 \geqslant 4xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ και ως γνωστόν

$$ΑΒ \cdot ΑΓ = βγ = 2RU_α$$

σε κάθε τρίγωνο.



Διευκρίνιση: Στη λύση όπως φάνηκε δεν ήταν αναγκαία η χρήση αλγεβρικών τιμών. Μένει ακόμα να δειχτεί ότι τυχαίο σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ προβάλλεται σε μια από τις ΑΒ, ΑΓ σε εσωτερικό σημείο και στην άλλη σε εξωτερικό (στην προηγούμενη απόδειξη υπέθεσα πως το Μ προβάλλεται σε εσωτερικό σημείο της ΑΓ).

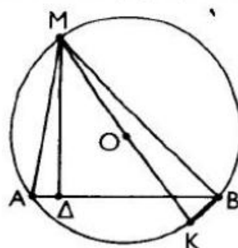
Έστω λοιπόν Α΄ το αντιδιαμετρικό του Α, και έστω Α΄ ∈ ΒΓ. Τότε αν Μ ∈ $\overset{\frown}{ΒΑ'}$ τότε το ίχνος του Μ στην ΑΓ είναι εσωτερικό της σημείο, της ΑΒ εξωτερικό. Αντίθετα αν Μ ∈ $\overset{\frown}{Α'Γ}$ και η πρόταση αποδείχτηκε.

Είναι επίσης φανερή αν Α΄ ∈ $\overset{\frown}{ΒΓ}$.

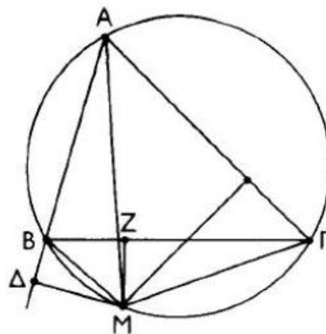
Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

2η λύση: Για την απόδειξη της ζητουμένης ανισοτικής σχέσης θα χρησιμοποιήσω την παρακάτω πρόταση.

Η απόσταση ΜΔ, ενός σημείου Μ του κύκλου (Ο, R) από μια τυχαία χορδή ΑΒ του κύκλου (Ο, R) είναι ίση με $\dfrac{ΜΑ \cdot ΜΒ}{2R}$



Απόδειξη: Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΜΑΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΜΚΒ}$ είναι όμοια (γιατί $\hat{Δ} = \hat{Β} = 1$ και $\hat{Α} = \hat{Κ}$) επομένως: $(ΜΔ) = \dfrac{(ΜΑ) \cdot (ΜΒ)}{2R}$.



Στο τετράπλευρο ΑΒΜΓ ισχύει το θεώρημα του Πτολεμαίου δηλαδή

$$(ΒΓ) \cdot (ΜΑ) = (ΑΒ) \cdot (ΜΓ) + (ΒΜ) \cdot (ΑΓ) \Rightarrow$$

$$α \cdot (ΜΑ) = γ \cdot (ΜΓ) + (ΒΜ) \cdot β \Rightarrow$$

$$[α \cdot (ΜΑ)]^2 = [γ \cdot (ΜΓ) + (ΒΜ) \cdot β]^2 \Rightarrow$$

$$α^2 \cdot (ΜΑ)^2 = γ^2 \cdot (ΜΓ)^2 + (ΒΜ)^2 \cdot β^2 + 2βγ \cdot (ΒΜ)\,(ΓΜ) \Rightarrow$$

$$α^2 \cdot (ΜΑ)^2 - 4βγ \cdot (ΒΜ)\,(ΓΜ) = [γ \cdot (ΜΓ) - (ΒΜ) \cdot β]^2 \Rightarrow$$

$$α^2 \cdot (ΜΑ)^2 - 4βγ \cdot (ΒΜ)\,(ΓΜ) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$α^2 \cdot (ΜΑ)^2 \geqslant 4βγ \cdot (ΒΜ)\,(ΓΜ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{α^2}{(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \geqslant 4\frac{βγ}{(ΜΑ)^2} \Rightarrow \frac{α^2}{(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \geqslant 8\frac{\frac{βγ}{2}}{(ΜΑ)^2}$$

Επειδή ισχύει $βγ = 2RU_α$

$$\Rightarrow \frac{α^2}{(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \geqslant 8\frac{R \cdot U_α}{(ΜΑ)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{α^2}{(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \geqslant \frac{8RU_α}{(ΜΑ)^2\,(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2α^2}{(ΜΒ)^2\,(ΜΓ)^2} \geqslant 8\frac{4R^2RU_α}{(ΜΑ)^2\,(ΜΒ)\,(ΜΓ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{α^2}{\left(\frac{(ΜΒ) \cdot (ΜΑ)}{2R}\right)^2} \geqslant 8\frac{RU_α}{\left(\frac{ΜΑ \cdot ΜΒ}{2R}\right)\left(\frac{ΜΑ \cdot ΜΓ}{2R}\right)} \Rightarrow$$

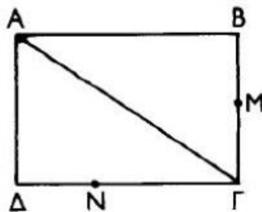
(Βλέπε θεώρημα στην αρχή)

$$\Rightarrow \frac{α^2}{(ΜΖ)^2} \geqslant 8\frac{RU_α}{(ΜΔ)\,(ΜΕ)} \Rightarrow \frac{(ΒΓ)^2}{(ΜΖ)^2} \geqslant 8\frac{RU_α}{(ΜΔ)\,(ΜΕ)}$$

Α. Οικόνομου **(35ο Λύκειο Αθήνας)** - Ειδικό βραβείο Γεωμετρίας

Θ3: Οι διχοτόμοι των γωνιών $Β\hat{Α}Γ$ και $Γ\hat{Α}Δ$ σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ και ΓΔ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{(MB)}{(M\Gamma)} + \frac{(N\Delta)}{(N\Gamma)} > 1.$$



Λύση: Από το 1ο θεώρημα των διχοτόμων (και αφού προσθέσουμε κατά μέλη) έχουμε:

$$\frac{MB}{M\Gamma} + \frac{N\Delta}{N\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} + \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB + A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB + B\Gamma}{A\Gamma} > 1$$

γιατί οι ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ είναι πλευρές τριγώνου ή εφόσον

$$AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2, \quad \left(\text{επίσης } \frac{MB}{M\Gamma} + \frac{NB}{N\Gamma} \leq \sqrt{2}\right)$$

$$AB + B\Gamma > A\Gamma \Leftrightarrow AB^2 + B\Gamma^2 + 2AB \cdot B\Gamma > A\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot B\Gamma > 0 \quad \text{αληθές.}$$

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Θ4: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

i) Αν $\alpha, \beta \in A$, τότε $\sqrt{\alpha\beta} \in A$

$1 \in A$ και $2 \in A$.

Να αποδειχτεί ότι: $\sqrt[2^{1453}]{2^{1821}} \in A$.

Λύση: i) $\alpha \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in A$.

Πράγματι $\alpha \in A \wedge 1 \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha \cdot 1} \in A \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in A$

ii) $\alpha \in A \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{2^\nu}} \in A \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

Για $\nu = 1$ προκύπτει $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha} \in A$ αληθής (πρόταση 1).

Έστω πως ισχύει για $\nu = \kappa$, δηλ. $\alpha^{\frac{1}{2^\kappa}} \in A$. Τότε από την πρόταση (1) παίρνουμε:

$$\sqrt{\alpha^{\frac{1}{2^\kappa}}} \in A \Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{1}{2^\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{2^\kappa \cdot 2}} \in A \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{2^{\kappa+1}}} \in A$$

και η πρόταση ισχύει και για $\nu = \kappa + 1$, άρα η (2) αποδείχτηκε.

3) $2^{\frac{1}{2^\nu}} \in A \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (ισχύει λόγω της (2) αφού $2 \in A$).

4) $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+1}{2^{\nu+1}}} \in A \quad \forall \kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$

Έχουμε $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ και από την πρόταση (3) $2^{\frac{1}{2^\nu}} \in A$.

Άρα και

$$\left(2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \cdot 2^{\frac{1}{2^\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow \left(2^{\frac{\kappa+1}{2^\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{\kappa+1}{2^{\nu+1}}} \in A$$

και η (4) αποδείχτηκε.

5) $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+\lambda}{2^{\nu+\lambda}}} \in A \quad \forall \kappa, \nu, \lambda \in \mathbb{N}^*$ (ή $\lambda = 0$).

Για $\lambda = 0$ ισχύει όπως και για $\lambda = 1$ (πρόταση (4)).

Έστω πως ισχύει για $\lambda = \mu \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή

$$2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A \Rightarrow 2^{\frac{\kappa+\mu}{2^{\nu+\mu}}} \in A.$$

Αν τώρα για κάποιους $\kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ θα δείξω ότι $2^{\frac{\kappa+\mu+1}{2^{\nu+\mu+1}}} \in A$.

Πράγματι αν $2^{\frac{\kappa}{2^\nu}} \in A$ τότε σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής $2^{\frac{\kappa+\mu}{2^{\nu+\mu}}} \in A$, οπότε σύμφωνα με την (4) $2^{\frac{\kappa+\mu+1}{2^{\nu+\mu+1}}} \in A$ και η (5) αποδείχτηκε.

Θα δείξω τώρα ότι $2^{\frac{1821}{2^{1453}}} \in A$.

Σύμφωνα με την (3) ισχύει $2^{\frac{1}{2^{542}}} \in A$. Σύμφωνα με την (5) για $\lambda = 909$,

$$2^{\left(\frac{1+909}{2^{542+909}}\right)} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{910}{2^{1451}}} \in A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{2\cdot 910}{2\cdot 2^{1453}}} \in A \Leftrightarrow 2^{\frac{1820}{2^{1452}}} \in A$$

άρα σύμφωνα με την (4) $2^{\frac{1821}{2^{1453}}} \in A$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Χ. Αθανασιάδης **(2ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ1: Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f: R \to R$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$2f(x + y + xy) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) + f(xy),$$

$\forall x, y \in R$ όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha^2 - \alpha \neq \beta^2 - \beta$.

Λύση:

Στη συνθήκη $2f(x + y + xy) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) + f(xy)$,

$\forall x, y \in P \quad (1)$

θέτω $x = y = 0$ και έχω

$$2f(0 + 0 + 0 \cdot 0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(0) + f(0 \cdot 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot (\alpha + \beta - 1) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ ή } \alpha + \beta - 1 = 0$$

Αν όμως

$\alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha$ ή $\alpha^2 - \alpha \neq \beta^2 - \beta \quad (2)$

γίνεται:

$$\alpha^2 - \alpha \neq \beta(\beta - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq (1 - \alpha)\cdot(1 - \alpha - 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq (1 - \alpha) \cdot (-\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha \neq \alpha^2 - \alpha.$$

άτοπο. Συνεπώς $f(0) = 0$.

Έστω τώρα ότι υπάρχει $x_0 \in R$ με $f(x_0) \neq 0$.

Στην (1) θέτω $x = x_0$ και $y = 0$ και έχω:

$$2f(x_0 + 0 + 0) = \alpha \cdot f(x_0) + \beta \cdot f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) + 0 + 0 \quad [f(0) = 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) = \alpha \cdot f(x_0) \Rightarrow \alpha = 2 \quad [f(x_0) \neq 0].$$

Θέτω πάλι στην (1) $x = 0$, $y = x_0$ και παίρνω

$f(0) = 0$

$$2f(0 + x_0 + 0) = \alpha \cdot f(0) + \beta \cdot f(x_0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x_0) = \beta \cdot f(x_0) \Rightarrow \beta = 2.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί

$$\alpha = \beta = 2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \beta^2 - \beta.$$

Συνεπώς δεν υπάρχει $x_0 \in R$ με $f(x_0) \neq 0$ και η μόνη συνάρτηση $f: R \to R$ που ικανοποιεί τις (1), (2) είναι η

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in R.$$

Γ. Ιβρισιμιτζής **(3ο Λύκειο Θεσσαλονίκης)**

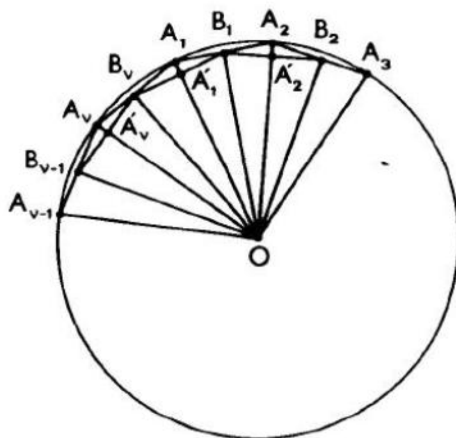
Θ2: Δίνεται κανονικό 1987-γωνο στο επίπεδο με κορυφές $A_1, A_2, \ldots, A_{1987}$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου τέτοιων ώστε:

$$|\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}}| \leqslant 1987.$$

Λύση:

Για κανονικό ν-γωνο, γνωρίζω ότι:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{O}$$



Απόδειξη:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} = 2\vec{OB_1}$$
$$\vec{OA_2} + \vec{OA_3} = 2\vec{OB_2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\vec{OA_\nu} + \vec{OA_1} = 2\vec{OB_\nu}$$

$$2(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu}) = 2(\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu} \qquad (1)$$

Και επίσης, κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \ldots + \vec{OB_\nu} = \vec{OA_1'} + \vec{OA_2'} + \ldots + \vec{OA_\nu'} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2)

$$\Rightarrow \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{OA_1'} + \vec{OA_2'} + \ldots + \vec{OA_\nu'} \qquad (3)$$

Επειδή το $A_1A_2 \ldots A_\nu$ είναι κανονικό ν-γωνο και O το κέντρο του, το A_1' κείται πάνω στην A_1. 'Αρα

$$\vec{OA_1'} = \lambda \vec{OA_1} \quad \text{με} \quad \lambda < 1.$$

'Αρα από (3) $\Rightarrow$

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \lambda\vec{OA_1} + \lambda\vec{OA_2} + \ldots + \lambda\vec{OA_\nu} \Rightarrow$$

$$(1 - \lambda)(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu}) = \vec{O}$$

Επειδή όμως $\lambda \neq 1$ είναι:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_\nu} = \vec{O}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση του 1987-γώνου, αν M σημείο του γεωμετρικού τόπου, είναι:

$$\vec{MA_1} = \vec{MO} + \vec{OA_1}$$
$$\vec{MA_2} = \vec{MO} + \vec{OA_2}$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\vec{MA_{1987}} = \vec{MO} + \vec{OA_{1987}}$$

$$\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots \vec{MA_{1987}} = 1987 \cdot \vec{MO} + (\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots \vec{OA_{1987}})$$

$$\Rightarrow \vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}} = 1987\vec{MO} + \vec{O} \Rightarrow$$

$$\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}} = 1987\vec{MO}$$

Για το σημείο M ισχύει

$$|\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{1987}}| \leqslant 1987 \Leftrightarrow$$

$$|1987\,\vec{MO}| \leqslant 1987 \Leftrightarrow$$

$$1987\,|\vec{MO}| \leqslant 1987 \qquad |\vec{MO}| \leqslant 1$$

Επομένως το M ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο O, το κέντρο του 1987-γωνου, και ακτίνα 1.

Λόγω ισοδυναμιών, κάθε σημείο του κυκλικού αυτού δίσκου ανήκει στον τόπο.

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου O και ακτίνας 1.

Ν. Παπασπύρου **(7ο Λύκειο Αθήνας)**

Θ3: 'Εστω A είναι $\eta \times \eta$ πίνακας πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = A$, όπου I ο μοναδιαίος $\eta \times \eta$ πίνακας. Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας $A^{3\nu}$, όπου $\nu \in Z$ παίρνει μόνο δυο δυνατές τιμές και να βρεθούν οι τιμές αυτές.

Λύση:

Υπολογίζω τον πίνακα A^3

$$A^3 = A^2 \cdot A \Leftrightarrow \text{ και αφού } A^2 + I = A \Leftrightarrow A^2 = A - I$$

$$A^3 = (A - I) \cdot A \Leftrightarrow A^3 = A^2 - A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^3 = (A - I) - A \Leftrightarrow A^3 = A - I - A \Leftrightarrow A^3 = -I$$

$$\text{Επειδή } (-I)(-I) = -[I(-I)] = -(-I) = I$$

$$\text{συμπεραίνω ότι } (-I)^{-1} = -I$$

$$\text{'Αρα } (A^3)^{-1} = A^{-3} = (-I)^{-1} = -I$$

Επομένως, αν $\nu \in Z$ με $\nu > 0$ τότε:

$$A^{3\nu} = (A^3)^\nu = (-I)^\nu = \begin{cases} I & \nu = 2\rho, \ \rho \in N \\ -I & \nu = 2\rho + 1, \ \rho \in N \end{cases}$$

Αν $\nu \in Z$ με $\nu < 0$ τότε $\mu = -\nu > 0$

$$\text{και} \quad A^{3\nu} = A^{-3\mu} = (A^3)^{-\mu} = (-I)^{-\mu} = [(-I)^{-1}]^\mu = (-I)^\mu =$$

$$= \begin{cases} I & \mu = 2\rho, \quad \rho \in N \Rightarrow -\nu = 2\rho \Rightarrow \nu = -2\rho \\ -I & \mu = 2\rho + 1, \ \rho \in N \Rightarrow -\nu = 2\rho + 1 \Rightarrow \nu = -2\rho - 1 \end{cases}$$

Αν $\nu = 0$ τότε εξ ορισμού $A^{3\nu} = A^0 = I$

Επομένως, συνοψίζοντας

$$\forall \nu \in Z \qquad A^{3\nu} = \begin{cases} I & \nu = 2\rho, \ \rho \in Z \\ -I & \nu = 2\rho + 1, \ \rho \in Z \end{cases}$$

Δηλαδή, ο πίνακας $A^{3\nu}$ μπορεί να πάρει μόνο δυο τιμές, τις **I** και − **I**.

Ν. Παπασπύρου **(7ο Λύκειο Αθήνας)**

Θ4: 'Εστω $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu^2 - 2$ για $\nu = 1, 2, \dots$

α) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\,\alpha_2\,\dots\,\alpha_\nu}$

β) Να υπολογιστεί το

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right)$$

Λύση:

α) Είναι $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu-2}^2 = \alpha_\nu^2\,(\alpha_{\nu-1}^2 - 2)^2 - 2 =$

$\alpha_{\nu-1}^2 - 4\alpha_{\nu-1}^2 + 2 = \alpha_{\nu-1}^2\,(\alpha_{\nu-1}^2 - 4) + 2.$

Αλλά

$$\alpha_\nu^2 - 4 = \alpha_{\nu-1}^2\,(\alpha_{\nu-1}^2 - 4) = \dots = \alpha_{\nu-1}^2\,\alpha_{\nu-2}^2\dots\alpha_1^2\,(\alpha_1^2 - 4)$$

'Αρα

$$\alpha_{\nu+1}^2 = 21\prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i^2 + 2 \Rightarrow \left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right)^2 = 21 + \frac{2}{(\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu)^2}$$

Τότε $\lim\left(\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right)^2 = 21 \Rightarrow \lim\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} = \sqrt{21}.$

β) Θέτουμε $\beta_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} = \dfrac{\alpha_\nu^2 - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} =$

$$= \frac{\alpha_\nu}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_{\nu-1}} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} = \beta_{\nu-1} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} =$$

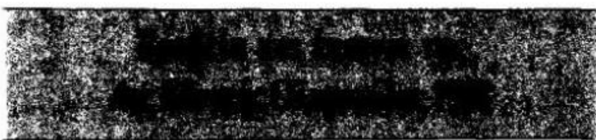
$$= \frac{\alpha_{\nu+1}^2 - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} - \frac{\alpha_\nu - 2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} -$$

$$- \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} - \frac{2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu} =$$

$$= \dots = \alpha_{1-2}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right) = \beta_\nu$$

Τότε $\lim\left(\alpha_1 - 2\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dots+\dfrac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right)\right) = \sqrt{21}$

ή $\lim 2\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dots+\dfrac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\dots\alpha_\nu}\right) = \dfrac{1}{2}(5 - \sqrt{21}).$



Γ' Γυμνασίου

Πρώτο βραβείο

1) Αθηνά Μαρκοπούλου, 1ο Γυμνάσιο Μελισσίων, 2) Θωμάς Μαργαριτόπουλος, 4ο Γυμνάσιο Βεροίας

Δεύτερο βραβείο

1) Ανδρέας Γουλές, 2ο Γυμνάσιο Αθήνας 2) Ανδρέας Αργυρίου, 35ο Γυμνάσιο Αθήνας.

Τρίτο βραβείο

1) Κυριάκος Χουρδάκης, Αμερικάνικο Κολλέγιο Αθηνών, 2) Χρήστος Αδαμάρας, Κολλέγιο Ανατόλια, 3) Δημήτριος Δημόπουλος, 1ο Γυμνάσιο Λειβαδιάς, 4) Θεόδωρος Ευγενίου, Γυμνάσιο Ν. Μουδανιών, 5) Αικατερίνη Βάρσου, 2ο Γυμνάσιο Αθήνας, 6) Δημήτριος Μουρατίδης, 2ο Κάτω Τούμπα Θεσ/νίκης.

'Επαινοι

1) Γεώργιος Μάτσος, 4ο Γυμνάσιο Βέροιας, 2) Βασίλειος Αγγελόπουλος, 7ο Γυμνάσιο Πάτρας, 3) Αντώνιος Μπιλλίρης, 2ο Γυμνάσιο Καλύμνου, 4) Μάρθα Σταθάκη, 2ο Γυμνάσιο Χανίων, 5) Αγγελίνα Κουρουμπαλή, Κολλέγιο Αθηνών, 6) Πασχάλης Αναστασόπουλος, 6ο Γυμν. Θεσ/νίκης, 7) Απόστολος Κακκάβας, Γυμνάσιο Ν. Πεντέλης, 8) Νικόλαος Μόσχος, Γυμνάσιο Ν. Χαλκηδόνας, 9) Λυδία Τσιούκα, Γυμνάσιο Σοφάδων Καρδίτσας, 10) Νικόλαος Αλεξόπουλος, 6ο Γυμνάσιο Λαμίας, 11) Ευαγγελία Καρδάτου, Γυμνάσιο Πολυχνίτου Λέσβου.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρώτο βραβείο

1) Αθηνά Ματέκοβιτς, 2ο Λύκειο Ζωγράφου, 2) Γεώργιος Μιχάϊ 5ο Λύκειο Αιγάλεω.

Δεύτερο βραβείο

1) Δημήτρης Σταθόπουλος, 1ο Λύκειο Σερρών.

Τρίτο βραβείο

1) Μιχαήλ Λουλάκης, 9ο Λύκειο Περιστερίου, 2) Μαρία Καραπατάκη, 2ο Λύκειο Χανίων, 3) Ανδρέας Σταλίδης, 1ο Λύκειο Καλαμαριάς Θεσ/νίκης, 4) Ελευθέριος Τιάκας, 1ο Λύκειο 'Ανω Τούμπας Θεσ/νίκης, 5) Κων/νος Λεριάδης, 2ο Λύκειο Ηλιούπολης, 6) Γεώργιος Καρακώστας 1ο Λύκειο Κορίνθου 7) Αργυρώ Χριστοφοράκη Εν. Πολυκ. Λύκειο Αιγάλεω.

'Επαινος

1) Σταμάτιος Κούρτης, 13ο Λύκειο Αθήνας, 2) Φοίβος Ζούκης, Σχολή Μωραΐτη.

Β' Λυκείου

Πρώτο Βραβείο

1) Χρήστος Αθανασιάδης, 1ο Λύκειο Κάτω Τούμπα Θεσ/νίκης, Ειδικό Βραβείο Γεωμετρίας.

Δεύτερο βραβείο

1) Ευάγγελος Μουρούκος, Λύκειο Κοντοπεύκου Αττικής.

Τρίτο βραβείο

1) Αντώνιος Οικονόμου, 35ο Λύκειο Αθηνών και Ειδικό Βραβείο Γεωμετρίας.

'Επαινος

1) Δημήτρης Μαυροειδής, 5ο Λύκειο Χανίων, 2) Γεώργιος Παπουτσής, Γερμανική Σχολή Θεσ/νίκης, 3) Αλέξαν-

δρος Λαμπρινίδης, 2ο Λ. Κομοτινής.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρώτο βραβείο

1) Ιωάννης Ιβρισιμτζής, 3ο Λ. Χαριλάου Θεσ/νίκης, 2) Δημήτριος Κοντοκώστας, 1ο Λ. Τρικάλων.

Δεύτερο βραβείο

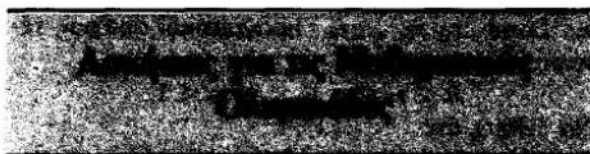
1) Νικόλαος Παπασπύρου, 7ο Λ. Αθηνών, 2) Σωκράτης Βαμβάκος, Γερμ. Σχολή Αθηνών, 3) Στέφανος Παντέλης, 1ο Λ. Σερρών, 4) Νικόλαος Διαμάντης, Πειρ. Λ. Παν/μίου Πατρών.

Τρίτο βραβείο

1) Ηλίας Κακιόπουλος, 2ο Λ. Καρδίτσας.

Έπαινος

1) Αντώνιος Παπαντωνάκης, 2ο Λ. Χανίων, 2) Δημήτριος Τραπέρας, 4ο Λ. Ιωαννίνων, 3) Παναγιώτης Μπαζιώτας, 2ο Λ. Γρεβενών.



Εγκαινιάζουμε μια νέα στήλη σε θέματα Ολυμπιάδων από τους μαθητές της Ελληνικής ομάδας και περιμένουμε λύσεις για δημοσίευση. Σ' αυτό το τεύχος προτείνει ο Χ. Ταμβάκης*

1) Ένα τετράπλευρο έχει την ιδιότητα: το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου στο εσωτερικό του από τις πλευρές του είναι σταθερό. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

2) Αν $(x_1+x_2)^2-(x_2+x_3)^2 \dots + (x_n+x_1)^2 = 4$

να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$$

3) Να βρείτε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)$$

4) Να λύσετε τη Διοφαντική εξίσωση: $\alpha\beta = \alpha^\nu + \beta$, όπου ν ορισμένος θετικός ακέραιος.

5) Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α,Β εκτός αυτής και προς το ίδιο μέρος της. Να βρείτε σημείο Ρ της (ε) με την ιδιότητα

α) το άθροισμα $PA^2 + PB^2$ είναι ελάχιστο

β) η (ε) αποκόβει από τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΡ χορδή μήκους ΑΒ.

γ) ο λόγος $\frac{PA}{PB}$ είναι ελάχιστος.

6) Έστω κ περιττός ακέραιος. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι σύνθετοι της μορφής $\nu^2 + \kappa\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

7) Ορίζουμε $\{x\} = x - [x]$. Να βρείτε το $\left\{\frac{1985!}{1987}\right\}$

Μπορείτε να κάνετε γενίκευση;

8) Θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία φυσικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ ($\nu \geqslant 7$) που είναι αύξουσα αριθμητική πρόοδος. Ορίζουμε την εξής πράξη: η ακολουθία των ν αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ αντικαθιστάται από την ακολουθία ν-1 αριθμών $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \dots, \alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu$.
Εν εφαρμόσουμε αυτή τη πράξη ν-1 φορές αρχίζοντας με την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ καταλήγουμε σε έναν αριθμό. Αν ο αριθμός αυτός είναι ο 1984, να προσδιορίσετε πλήρως την ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$.

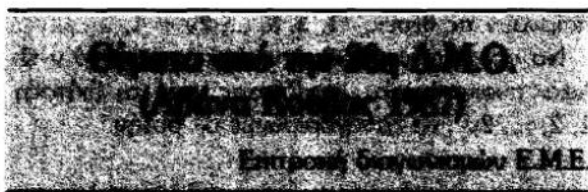
9) Να αποδείξετε ότι αν $x, y, z, t \in \mathbb{R}+$ και

$$xyz + xzt + xyt + yzt \leqslant 4,$$

τότε $$x+y+z+t \geqslant 4\,xyzt.$$

10) Το περίκεντρο Ο ενός τετραέδρου ΑΒΓΔ βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓΔ. Οι ευθείες ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις έδρες ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Αν $\frac{AO}{AA_1}=\frac{BO}{BB_1}=\frac{\Gamma O}{\Gamma\Gamma_1}=\frac{3}{4}$, να δείξετε ότι το τετράεδρο είναι ισοεδρικό.

11) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, ενώ η ακολουθία $(\eta\mu\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
Να δείξετε ότι $\omega = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Στην 28η Δ.Μ.Ο. πήραν μέρος 42 χώρες και κάθε μια από αυτές πρότεινε διάφορα προβλήματα. Η χώρα μας πρότεινε 4.

Μετά το τέλος της Ολυμπιάδας οι διοργανωτές, δεν έδωσαν στις αποστολές τα προταθέντα θέματα.

Γνωστό μαθηματικό περιοδικό του Καναδά δημοσίευσε μια επιλογή από 53 θέματα, ανάμεσα στα οποία και τα 4 ελληνικά.

Αυτή την επιλογή παρουσιάζουμε εδώ, με την ίδια σειρά.

* Φοιτητής στο Α΄ έτος του Πανεπιστημίου Αθήνας Βαλκανιονίκης (Αθήνα) και Ολυμπιονίκης του 1987 (Κούβα).

ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ

1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ακέραιοι και ρ θετικός ακέραιος μικρότερος του ν. Θέτουμε:

$S_1 = x_1 + x_1 + ... + x_\rho, \quad T_1 = x_{\rho+1} + x_{\rho+2} + ... + x_\nu,$

$S_2 = x_2 + x_3 + ... + x_{\rho+1}, \quad T_2 = x_{\rho+2} + x_{\rho+3} + ... + x_1,$

.

.

.

$S_\nu = x_\nu + x_1 + ... + x_{\rho-1}, \quad T_\nu = x_\rho + x_{\rho+1} + ... + x_{\nu-1}$

(όπου μετά τον x_ν βρίσκεται ο x_1).

Έστω τώρα m(α, β) το πλήθος των αριθμών i για τους οποίους ο S_i δίνει υπόλοιπο α και ο T_i δίνει υπόλοιπο β, αν διαιρεθούν με το 3, όπου $0 \leqslant \alpha, \beta < 3$.

Να δείξετε ότι οι αριθμοί m(1, 2) και m(2, 1) είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 3.

2. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ είναι θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 + \alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1)^2 \geqslant$$

$$\geqslant 4\,(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)\,(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_3)$$

και ότι το ίσον ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

3. Ένα τέλειο ανακάτεμα μιας δεσμίδας χαρτιών που έχουν διάταξη 1, 2, 3, ..., 2ν την κάνει ν + 1, 1, ν + 2, 2, ..., ν − 1, 2ν δηλαδή τα χαρτιά που αρχικά είχαν τις ν πρώτες θέσεις, μετακινούνται στις θέσεις 2, 4, 6, ..., 2ν ενώ τα υπόλοιπα ν χαρτιά στην αρχική διάταξη, παίρνουν τις θέσεις 1, 3, 5, ..., 2ν − 1.

Να ορίσετε τον αριθμό ν, ώστε μετά από ν τέλεια ανακατέματα, αρχίζοντας από τη διάταξη 1, 2, ..., 2ν να ξαναγυρίσουμε σ' αυτήν.

4. Έστω K_1, K_2, K_3 τρεις κύκλοι με κέντρα O_1, O_2, O_3 αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο P. Έστω ότι οι κύκλοι K_1, K_2 τέμνονται στο σημείο A, οι K_2, K_3 τέμνονται στο σημείο B και οι K_3, K_1 στο σημείο C. Έστω X σημείο του K_1. Συνδέουμε το X με το A και η XA τέμνει τον K_2 στο Ψ, ενώ η XC τέμνει τον K_3 στο Z.

i) Να δείξετε ότι τα Z, B, Ψ είναι συνευθειακά.

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου XCZ είναι μικρότερο ή ίσο από το τετραπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $O_1O_2O_3$.

ΒΕΛΓΙΟ

1. Αν $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με την ιδιότητα

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

να δείξετε ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$u: [1, \infty) \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$u\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right) = f(x), \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

2. Να βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε ο αριθμός ν! να λήγει σε 1987 μηδενικά.

ΓΑΛΛΙΑ

1. Έστω $r_1, r_2, ..., r_\nu$ πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε:

$$0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant ... \leqslant r_\nu < 1.$$

Να δείξετε ότι:

$$(1 - r_\nu)^2 \left[\frac{r_1}{(1 - r_1^2)^2} + \left[\frac{r_2^2}{(1 - r_2^3)^2} + ... + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{r_\nu^\nu}{(1 - r_\nu^{\nu+1})^2}\right] < 1.$$

2. Έστω τριγ. ΑΒΓ. Για κάθε σημείο Μ του τμήματος ΒΓ ορίζουμε Β', Γ' τις ορθές προβολές του Μ στις ευθείες ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να βρεθούν τα σημεία Μ, για τα οποία το μήκος του Β'Γ' γίνεται ελάχιστο.

3. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 9 θετικοί αριθμοί. Έστω:

$S_1 = \alpha_1\beta_2\gamma_3, \quad S_2 = \alpha_2\beta_3\gamma_1, \quad S_3 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$

$T_1 = \alpha_1\beta_3\gamma_2, \quad T_2 = \alpha_2\beta_1\gamma_3, \quad T_3 = \alpha_3\beta_2\gamma_1$

Υποθέτουμε ότι το σύνολο

$$\{S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3\}$$

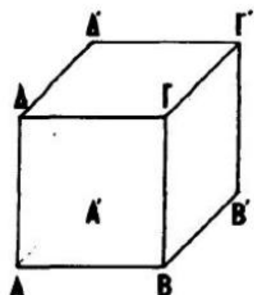
έχει το πολύ δυο στοιχεία.

Να δείξετε ότι $S_1 + S_2 + S_3 = T_1 + T_2 + T_3$.

4. Έστω ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ένα παραλληλεπίπεδο (Σχ. 1). Να δείξετε ότι:

ΑΒ' + ΑΔ' + ΑΓ ⩽ ΑΒ + ΑΔ + ΑΑ' + ΑΓ'.

Πότε ισχύει το ίσον;



ΜΕΓΑΛΗ ΒΡΕΤΑΝΙΑ

1. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0$$

έχει όλες τις ρίζες πραγματικές, τότε $\alpha\beta < 0$.

2. Οι αριθμοί $d(\nu, m)$ όπου ν, m ακέραιοι και $0 \leqslant m \leqslant \nu$, ορίζονται από τις σχέσεις:

$$d(\nu, 0) = d(\nu, \nu) = 1 \quad \text{για κάθε } \nu \geqslant 0 \text{ και}$$

$$m \cdot d(\nu, m) = m \cdot d(\nu - 1, m) + (2\nu - m) \cdot d(\nu - 1, m - 1) \quad \text{για } 0 < m < \nu.$$

Να δείξετε ότι οι αριθμοί $d(\nu, m)$ είναι ακέραιοι.

3. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο πραγματικό αριθμό c που έχει την ιδιότητα: Για κάθε ακολουθία $\{X_i\}$ θετικών αριθμών, τέτοιων ώστε: $X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu \leqslant X_{\nu+1}$, για $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ είναι

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \ldots + \sqrt{X_\nu} \leqslant c\sqrt{X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu}$$

για $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

[Ο c είναι ανεξάρτητος από τους X_i και τον ν].

4. Να προσδιοριστεί, με απόδειξη, σημείο P στο εσωτερικό οξυγωνίου τριγώνου ABC, για το οποίο το άθροισμα $(BL)^2 + (CM)^2 + (AN)^2$ γίνεται ελάχιστο, όπου L, M, N τα ίχνη των καθέτων από το P στις BC, CA, AB αντίστοιχα.

5. Να δείξετε ότι αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει:
$x^2 + y^2 + z^2 = 2$, τότε $x + y + z \leqslant xyz + 2$.

ΕΛΛΑΔΑ

1. Θεωρούμε το κανονικό 1987-γωνο $A_1A_2 \ldots A_{1987}$ με κέντρο O. Να δείξετε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων που ανήκουν σε κάθε κατάλληλο υποσύνολο του

$$M = \{OA_j : j = 1, 2, \ldots, 1987\}$$

είναι μη μηδενικό.

Δ. Κοντογιάννης

2. Να λυθεί η εξίσωση $28^x = 19^y + 87^z$, όπου $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Θ. Μπόλης

3. Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABC αν δίνονται η πλευρά του $\alpha = BC$, η ακτίνα R του περιγεγραμμένου του κύκλου ($2R \geqslant \alpha$) και η διαφορά $c^{-1} - b^{-1}$, όπου $c = AB$ και $b = AC$.

Δ. Κοντογιάννης

4. Να δείξετε ότι αν α, b, c είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου και αν $2r = \alpha + b + c$, τότε

$$\frac{\alpha^n}{b + c} + \frac{b^n}{c + \alpha} + \frac{c^n}{\alpha + b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot r^{n-1},$$

$n \geqslant 1$.

Γ. Τζίντζιφας

ΟΛΛΑΝΔΙΑ

1. Αν δίνονται 5 πραγματικοί αριθμοί u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, να δείξετε ότι μπορούμε πάντοτε να βρούμε 5 πραγματικούς αριθμούς v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 που να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(i) $u_i - v_i$ είναι ακέραιος για κάθε i.

(ii) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} (v_i - v_j)^2 < 4.$

2. Έστω P σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου ABC. Φέρουμε από το P ευθείες l, m και n κάθετες στις AP, BP και CP αντίστοιχα. Να δείξετε ότι αν η l τέμνει την ευθεία BC στο Q, η m τέμνει την ευθεία AC στο R, και η n τέμνει την ευθεία AB στο S, τότε τα σημεία Q, R και S είναι συνευθειακά.

ΟΥΓΓΑΡΙΑ

1. Υπάρχει σύνολο $\mathbb{M}$ στο συνήθη Ευκλείδειο χώρο, τέτοιο ώστε για κάθε επίπεδο σ, η τομή

$$\mathbb{M} \cap \sigma$$

να είναι σύνολο πεπερασμένο και μη κενό;

2. (i) Ας υποθέσουμε ότι Μ.Κ.Δ. $(m, k) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k$ τέτοιοι ώστε κάθε γινόμενο $\alpha_i b_j$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, k$) να δίνει διαφορετικό υπόλοιπο, διαιρούμενο με mk.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι Μ.Κ.Δ. $(m, k) < 1$. Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ και $b_1, b_2, \ldots, b_k$ πρέπει να υπάρχουν δυο

γινόμενα $a_i b_j$ και $a_s b_t$ $((i, j) \neq (s, t))$ που να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με mk.

ΙΣΛΑΝΔΙΑ

1. Έστω S_1 και S_2 δυο σφαίρες με διαφορετικές ακτίνες, που εφάπτονται εξωτερικά. Οι σφαίρες βρίσκονται στο εσωτερικό κώνου C, και κάθε σφαίρα εφάπτεται του κώνου κατά έναν πλήρη κύκλο. Στο εσωτερικό του κώνουν υπάρχουν n στερεές σφαίρες τοποθετημένες σ' ένα δακτύλιο με τέτοιο τρόποο ώστε κάθε στερεά σφαίρα εφάπτεται του κώνου C, και στις σφαίρες S_1 και S_2 εξωτερικά, όπως και στις δυο γειτονικές στερεές σφαίρες. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του n;

2. Πέντε διαφορετικοί αριθμοί επιλέγονται διαδοχικά και κατά τυχαίο τρόπο από το σύνολο

$$\{1, 2, ..., n\}.$$

Δείξτε ότι τόσο η πιθανότητα να σχηματίζουν οι τρεις πρώτοι αριθμοί αριθμητική πρόοδο, όσο και η πιθανότητα να σχηματίζουν και οι πέντε αριθμοί αριθμητική πρόοδο (και στις δυο περιπτώσεις με κατάλληλη διάταξη των αριθμών), είναι μεγαλύτερη από $\frac{6}{(n-2)^3}$.

ΜΑΡΟΚΟ

1. Έστω $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε: $\eta\mu\theta_1 + \eta\mu\theta_2 + ... + \eta\mu\theta_n = 0$.

Δείξτε ότι:

$$|\eta\mu\theta_1 + 2\eta\mu\theta_2 + ... + n \cdot \eta\mu\theta_n| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right],$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος του x.

2. Έστω C σταθερός κύκλος στο επίπεδο και l σταθερή ευθεία που τέμνει τον C. Ας υποθέσουμε ότι τα $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ είναι καθορισμένα σημεία της l τέτοια ώστε να υπάρχει κάποιο πολύγωνο $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ εγγεγραμμένο στον C για το οποίο το P_i θα ανήκει στο τμήμα A_iA_{i+1} για $i < 2n$ και το P_{2n} θα ανήκει στο $A_{2n}A_1$. Να δείξετε ότι αν $V_1, V_2, ..., V_{2n}$ είναι εγγεγραμμένο στον C πολύγωνο, για το οποίο το P_i ανήκει στο τμήμα V_iV_{i+1} για $i < 2n$, τότε το P_{2n} θα ανήκει στο τμήμα $V_{2n}V_1$.

ΠΟΛΩΝΙΑ

1. Να βρεθεί ο αριθμός των διαμερισμών του συνόλου $\{1, 2, ..., n\}$ σε τρία υποσύνολα A_1, A_2, A_3, μερικά απ' τα οποία μπορεί να είναι κενά, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(i) αφού τα στοιχεία καθενός υποσυνόλου διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη, κάθε δυο διαδοχικά στοιχεία καθενός υποσυνόλου να μην είναι ισοϋπόλοιπα mod2.

(ii) αν τα A_1, A_2, A_3 είναι μη κενά, τότε σε ακριβώς ένα απ' αυτά ο ελάχιστος αριθμός είναι άρτιος.

Σημείωση: Ένας **διαμερισμός** καθορίζεται από μια οικογένεια συνόλων A_1, A_2, A_3 τέτοιων ώστε:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, ..., n\} \quad \text{και}$$
$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \varnothing$$

άλλη διάταξη των συνόλων, π.χ. A_2, A_3, A_1 δίνει τον **ίδιο** διαμερισμό με την A_1, A_2, A_3.

2. Έστω P, Q, R πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, τέτοια ώστε $P^4 + Q^4 = R^2$. Να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί p, q, r και πολυώνυμο S, ώστε να είναι

$$P = p \cdot S, \quad Q = q \cdot S \quad \text{και} \quad R = r \cdot S^2.$$

3. Έστω F μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του, που απεικονίζει κλειστά ορθογώνια σε κλειστά ορθογώνια. Δείξτε ότι η F απεικονίζει τετράγωνα σε τετράγωνα. Η συνέχεια της f δεν προϋποτίθεται.

ΡΟΥΜΑΝΙΑ

1. Δείξτε ότι οι αριθμοί 1, 2, ..., 1987 μπορούν να χρωματιστούν με 4 χρώματα, έτσι ώστε όλοι οι όροι κάθε αριθμητικής προόδου με 10 όρους να μην έχουν το ίδιο χρώμα.

2. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και C ενός τριγώνου ABC τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα B΄ και C΄ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η ευθεία B΄C΄ τέμνει τον εγγεγραμμένο στο ABC κύκλο.

3. Για κάθε ακέραιο $r \geqslant 1$, να προσδιοριστεί ο ελάχιστος ακέραιος $h(r) \geqslant 1$, τέτοιος ώστε για κάθε διαμερισμό του συνόλου $\{1, 2, ..., h(r)\}$ σε r τάξεις να υπάρχουν ακέραιοι

$$\alpha \geqslant 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant y \leqslant h(r)$$

ώστε οι αριθμοί $\alpha + x$, $\alpha + y$ και $\alpha + x + y$ να ανήκουν στην ίδια τάξη.

ΙΣΠΑΝΙΑ

1. Να προσδιορίσετε, με απόδειξη, τις ακέραιες

λύσεις της εξίσωσης:

$$3z^2 = 2x^3 + 385x^2 + 256x - 58195.$$

2. Γνωρίζοντας ότι α_{11}, α_{22} είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι οι x_1, x_2, α_{12}, b_1, b_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}\overline{\alpha_{12}}$$

(όπου $\overline{z}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του z), θεωρήστε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\overline{x_1}\ (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) = b_1$$
$$\overline{x_2}\ (\overline{\alpha_{12}}\,x_1 + \alpha_{22}x_2) = b_2$$

(i) Να βρείτε συνθήκη (-ες), ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

(ii) Να βρείτε συνθήκη (-ες), ώστε το πρωτεύον όρισμα του x_1 να υπερβαίνει το πρωτεύον όρισμα του χ_2 κατά 90°.

Η.Π.Α.

1. Έστω $r > 1$ πραγματικός αριθμός και n ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος του r. Θεωρούμε τυχαίο πραγματικό αριθμό x με

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{n}{r-1}.$$

Θα καλούμε ανάπτυγμα του x με βάση r, κάθε παράσταση του x που έχει τη μορφή:

$$x = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^3} + \ldots,$$

όπου οι α_i είναι ακέραιοι με $0 \leqslant \alpha_i < r$. Υποθέτουμε ότι κάθε αριθμός a του διαστήματος

$$\left[0, \frac{n}{r-1}\right]$$

έχει τουλάχιστον ένα ανάπτυγμα με βάση r. Δείξτε ότι, αν ο r δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει αριθμός p του διαστήματος $\left[0, \dfrac{n}{r-1}\right]$, ο οποίος έχει άπειρα το πλήθος διαφορετικά αναπτύγματα με βάση r.

2. Οι κλίμακες ενός δεκαδικού αριθμού $d_1\, d_2 \ldots d_n$ είναι οι ομάδες των ψηφίων του με το μέγιστο αριθμό ψηφίων, κατά αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη (εδώ κάθε d_i είναι ένα ψηφίο και επιτρέπεται να είναι $d_1 = 0$). Έτσι ο αριθμός 024379 έχει τρεις κλίμακες: 024, 43 και 379. Να προσδιοριστεί ο μέσος αριθμός κλιμάκων για ένα δεκαδικό αριθμό στο σύνολο

$$\{d_1\, d_2 \ldots d_n \mid d_k \neq d_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

για κάθε $n \geqslant 2$.

3. Σ' ένα πάρτυ στο οποίο παρευρίσκονται n ζευγάρια, κάθε άτομο παίρνει ανά πάσα στιγμή μέρος σε κάποια ομάδα που συζητά (από δω και στο εξής θα τη λέμε «παρέα»). Ένα άτομο και ο (n) σύζυγός του δεν είναι ποτέ στην ίδια «παρέα» αλλά κάθε άλλο ζευγάρι ατόμων παίρνει μέρος στην ίδια παρέα ακριβώς μια φορά. Να δείξετε ότι: Αν ο ολικός αριθμός των «παρέων» που σχηματίστηκαν κατά τη διάρκεια του πάρτυ είναι k και αν $n \geqslant 4$, τότε $k \geqslant 2n$.

ΒΙΕΤΝΑΜ

1. Μπορεί μια αυλή σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $m \times n$ να καλυφθεί με πλακάκια αποτελούμενα από τετράγωνα 1×1 σχήματος L αν

(a) $m \times n = 1985 \times 1987$

(b) $m \times n = 1987 \times 1989$.

2. Έστω $\{\alpha_k\}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοιων ώστε

$$\alpha_1 \geqslant 1 \text{ και } \alpha_{k+1} - \alpha_k \geqslant 1 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Δείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{k+1} \cdot \sqrt[1987]{\alpha_k}} < 1987, \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1.$$

3. Υποθέτουμε ότι οι $\{\alpha_k\}$ και $\{b_k\}$ είναι δυο ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε:

(i) $\alpha_k < b_k$ και

(ii) $\text{συν}\alpha_k x + \text{συν}b_k x \geqslant -\dfrac{1}{k}$,

για όλους τους πραγματικούς x και για κάθε $k = 1, 2, \ldots$

Δείξτε ότι το $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\alpha_k}{b_k}$ υπάρχει και βρείτε το.

ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑΚΗ ΔΗΜΟΚΡ. ΓΕΡΜΑΝΙΑΣ

1. Πόσεις «λέξεις» με n ψηφία μπορούν να σχηματιστούν από το «αλφάβητο» {0, 1, 2, 3, 4}, αν τα γειτονικά ψηφία πρέπει να διαφέρουν ακριβώς κατά ένα (1);

2. Έστω S ένα σύνολο με n στοιχεία. Συμβολίζουμε με $P_n(k)$ τον αριθμό όλων των μεταθέσεων του S που έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Να δείξετε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 \cdot P_n(k) = n!$$

ΓΙΟΥΓΚΟΣΛΑΒΙΑ

2. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός k ώστε για κά-

θε $\alpha \in [0, 1]$ και για κάθε φυσικό n, η ανισότητα

$$\alpha^k (1 - \alpha)^n < \frac{1}{(n + 1)^3} \quad \text{είναι έγκυρη.}$$

2. Να δείξετε ότι για κάθε $k = 2, 3, 4, \ldots$ υπάρχει ένας άρρητος αριθμός r τέτοιος ώστε

$$[r^m] \equiv -1 \pmod k,$$

για κάθε φυσικό m, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x.

ΑΝ. ΓΕΡΜΑΝΙΑ

1. Σε ένα τουρνουά σκακιού με $\nu \geqslant 5$ παίκτες ήδη έχουν παιχθεί $\left[\frac{\nu^2}{4}\right] + 2$ αγώνες. ($[x]$ το ακέραιο μέρος του x).

(α) Να δείξετε ότι υπάρχουν 5 παίκτες α, β, c, d, e, που έχουν παίξει τα παρακάτω παιχνίδια:

αβ, αc, βc, αd, αe, de.

(β) Ισχύει αυτό αν έχουν παιχθεί μόνο $\left[\frac{\nu^2}{4}\right] + 1$ αγώνες;

ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ

1. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xOy θεωρούμε σημείο A(1, 0) και τον κύκλο C_1 με κέντρο $O_1(-2, 0)$ και ακτίνα 3.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένας σταθερός αριθμός c, ώστε για κάθε σημείο X εξωτερικό του C_1, να ισχύει

$$\overline{OX} - 1 \geqslant c \min\left\{\overline{AX}, \overline{AX^2}\right\}.$$

Να υπολογίσετε τον ελάχιστο c.

2. Έστω $S \subset [0, 1]$ ένα σύνολο με 5 σημεία, με $\{0, 1\} \subset S$. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση που είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $I \subset [0, 1]$ με άκρα (αλλά όχι εσωτερικά σημεία) στο S. Θέλουμε να υπολογίσουμε, χωρίς τη βοήθεια Η/Υ, τα ακρότατα της συνάρτησης

$$g(x, t) = \frac{f(x + t) - f(x)}{f(x) - f(x - t)}$$

για $[x - t, x + t] \subset [0, 1]$

Ποιος είναι ο αριθμός των ζευγών (x, t) για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την g(x, t);

3. Υπάρχει δευτεροβάθμιο πολυώνυμο P(x, y) έτσι ώστε κάθε μη αρνητικός ακέραιος ν να είναι ίσος με P(k, m) για ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (k, m) μη αρνητικών ακεραίων;

Για τα παρακάτω θέματα, η χώρα που τα πρότεινε δεν είναι γνωστή.

1. Δίνεται ότι

$$x = -2272, \; y = 10^3 + 10^2c + 10b + \alpha$$

και $z = 1$ και ότι οι x, y z ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha x + by + cx = 1$, όπου οι α, b, c είναι θετικοί ακέραιοι με $\alpha < b < c$. Να βρεθεί ο y.

2. Έστω PQ ένα ευθύγραμμο τμήμα με σταθερό μήκος αλλά μεταβλητή θέση στην πλευρά BC ενός τριγώνου ABC, με τη σειρά BPQC, και έστω ότι οι παράλληλες από τα P, Q στις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις AC, AB στα P_1, Q_1 και P_2, Q_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τραπεζίων PQQ_1P_1 και PQQ_2P_2 είναι ανεξάρτητο από τη θέση του PQ στη BC.

3. Έστω l και l′ δυο ευθείες στον 3-διάστατο χώρο και έστω A, B, C τρία σημεία της l, τέτοια ώστε το B να είναι μέσο του AC. Αν α, b, c είναι οι αποστάσεις των A, B, C από την l′ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$b \leqslant \sqrt{\frac{\alpha^2 + c^2}{2}},$$

με την ισότητα να ισχύει αν οι l και l′ είναι παράλληλες.

4. Να υπολογιστεί το $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \alpha_k$

όπου οι α_k είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος

$$(1 - \sqrt{2}\, x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k x^k.$$

Τις ασκήσεις μετέφρασαν, ο συνάδελφος Δ. Κοντογιάννης και ο βραβευμένος μαθητής απ' την Εθνική Ολυμπιάδα '88 Β. Μουρούκος.



Ο 1ος ΠΡΟΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΜΕ

Στις 11 Φλεβάρη 1989 έγινε ταυτόχρονα στην Αθήνα-Θεσ/νικη-Χανιά-Πάτρα και άλλες πόλεις ο 1ος προπαρασκευαστικός διαγωνισμός για την επιλογή των μαθητών που θα αποτελέσουν την Ολυμπιακή ομάδα, που θα αντιπροσωπεύσει τη χώρα μας στην 6η Μαθηματική Βαλκανιάδα και στην 30η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Τα θέματα που προτάθηκαν είναι τα παρακάτω:

Ζήτημα 1ο

'Εστω α_ν ο πλησιέστερος ακέραιος του αριθμού $\sqrt{\nu}$ ($\nu \in N^*$). Να δείξετε ότι $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2070} > 23^{2070}$.

Ζήτημα 2ο

'Εστω α, β φυσικοί μη μηδενικοί και σχετικά πρώτοι αριθμοί. Χωρίζουμε το διάστημα [0, 1] σε $\nu = \alpha + \beta$ ίσα κλειστά διαστήματα. (2 διαστήματα μπορεί να έχουν κοινό σημείο ένα άκρο τους). Σε κάποια απ' τα διαστήματα αυτά υπάρχουν οι αριθμοί:

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots, \frac{\beta-1}{\beta}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων στα οποία ανήκουν οι αριθμοί αυτοί.

Ζήτημα 3ο

'Εστω ΑΒΓ, ΔΒΓ δύο ισόπλευρα τρίγωνα και Ο σημείο του περιγγεγραμμένου κύκλου στο ΔΒΙ που βρίσκεται στο εσωτερικό του ΑΒΓ τριγώνου. Να δειχθεί ότι $2 \cdot (O\Delta^2 - OA^2) \leqslant 3(OB^2 + O\Gamma^2)$

Ζήτημα 4ο

Στο επίπεδο θεωρούμε σημειοσύνολο Μ που περιέχει ν ($\nu \geqslant 3$) σημεία που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Μερικά από τα σημεία τα συνδέουμε με ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν ένα σύνολο Ε. Το ζεύγος (Μ, Ε) έχει τις ιδιότητες.

α) Κάθε σημείο του Μ ανήκει σε 3 τμήματα του Ε.

β) Κάθε 2 σημεία του Μ είτε είναι άκρα τμήματος του Ε, είτε είναι άκρα μιας γραμμής που αποτελείται από δυο τμήματα του Ε.

Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του ν.

Οι αποδείξεις που δίνουμε στη συνέχεια είναι μαθητών που πήραν μέρος στον διαγωνισμό.

1) (Β. Μουρούκος, Αθήνα) Είναι γνωστό ότι ο πλησιέστερος ακέραιος του αριθμού $\sqrt{\nu}$ ($\nu \in N^*$) είναι ο

$$\left[\sqrt{\nu} + \frac{1}{2}\right],$$

όπου [x] το ακέραιο μέρος του x. Ανάμεσα στους αριθμούς κ^2 και $(\kappa+1)^2$ (δηλαδή ανάμεσα σε δυο διαδοχικά τέλεια τετράγωνα), υπάρχουν

$$(\kappa+1)^2 - \kappa^2 - 1 = 2\kappa$$

ακέραιοι αριθμοί (μη συμπεριλαμβανομένων των κ^2 και $(\kappa+1)^2$). Από αυτούς τους 2κ αριθμούς, οι μισοί, δηλ. οι κ έχουν πλησιέστερο ακέραιο τον κ^2, και οι επόμενοι κ έχουν πλησιέστερο ακέραιο τον $(\kappa+1)^2$. 'Αρα, οι αριθμοί με πλησιέστερο ακέραιο 1 είναι 2, οι αριθμοί με πλησιέτερο ακέραιο 2 είναι $4 = 2 \cdot 2$, οι αριθμοί γενικά με πλησιέστερο ακέραιο κ είναι $2\kappa = (\kappa - 1) + 1 + \kappa$ (οι προηγούμενοι $\kappa - 1$ από τον κ^2, ο ίδιος ο κ^2, και οι επόμενοι κ απ' αυτόν).

'Ωστε, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \ldots =$

$$= \alpha_6 = 2, \alpha_7 = \ldots = \alpha_{12} = 3,$$

και το δοσμένο γινόμενο γίνεται:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{2070} = 1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \ldots 49^{90}$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι:

$$1^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \ldots 45^{90} > 23^{2070} = 23^{45 \cdot 46} \Leftrightarrow$$

$$(1^2 \cdot 45^{90}) \cdot (2^4 \cdot 44^{88}) \ldots (22^{44} \cdot 24^{48}) \cdot 23^{46} > 23^{45 \cdot 46}$$

'Ομως, ισχύει:

$$\left.\begin{array}{c} 1^2 \cdot 45^{90} > 23^2 \cdot 23^{90} \\ 2^4 \cdot 44^{88} > 23^4 \cdot 23^{88} \\ \vdots \\ 22^{44} \cdot 24^{48} > 23^{44} \cdot 23^{48} \\ 23^{46} = 23^{46} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2070} > 23^{2+4+\ldots+88+90} - 23^{6 \cdot \frac{45-46}{2}} =$$

$$= 23^{45 \cdot 46} = 23^{2070}$$

'Αρα, η ανισότητα δείχτηκε.

• Με τον ίδιο ή παρόμοιο τρόπο έλυσαν την άσκηση και πολλοί άλλοι μαθητές.

2) (Ν. Κυριακόπουλος, Μεσολόγγι): Δύο αρι-

θμοί $\frac{\kappa}{\alpha}$ και $\frac{\lambda}{\alpha}$ ($\kappa \neq \lambda$) δεν ανήκουν στο ίδιο διάστημα, γιατί η διαφορά τους είναι

$$\frac{|\kappa - \lambda|}{\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\alpha + \beta}$$

ενώ το μήκος κάθε διαστήματος είναι $\frac{1}{\alpha+\beta}$ και έτσι η απόστασή τους είναι μεγαλύτερη του μήκους του διαστήματος.

Ανάλογα οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\beta}$ και $\frac{\lambda}{\beta}$ ($\kappa \neq \lambda$) δεν ανήκουν στο ίδιο διάστημα.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\alpha}$ και $\frac{\lambda}{\beta}$ ($\kappa \in [1, \alpha - 1]$, $\lambda \in [1, \beta - 1]$) δεν ανήκουν στο ίδιο διάστημα ($\kappa, \lambda \in N$)

Έστω ότι ανήκουν στο διάστημα

$$\left[\frac{x}{\alpha+\beta}, \frac{x+1}{\alpha+\beta}\right]$$

($x \in N$, $x \in [0, \alpha + \beta - 1]$)

Έτσι θα είναι:

$$\frac{x}{\alpha+\beta} < \frac{\kappa}{\alpha} < \frac{x+1}{\alpha+\beta} \quad (1)$$

και

$$\frac{x}{\alpha+\beta} < \frac{\lambda}{\beta} < \frac{x+1}{\alpha+\beta} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \alpha x < \kappa(\alpha + \beta) < (x + 1)\alpha$$
$$\text{και } \beta x < \lambda(\alpha + \beta) < (x + 1)\beta$$
$$\Rightarrow x < \kappa + \lambda < x + 1$$

που σημαίνει ότι ένας ακέραιος ($\kappa + \lambda$) βρίσκεται ανάμεσα σε 2 γειτονικούς ακέραιους, πράγμα άτοπο.

Στις (1) και (2) χρησιμοποιήσαμε γνήσια ανισότητα γιατί το $\frac{\kappa}{\alpha}$ ή $\frac{\lambda}{\beta}$ δεν ανήκει σε άκρο κάποιου διαστήματος. Πράγματι, έστω

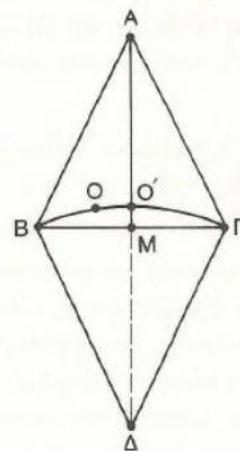
$$\frac{\kappa}{\alpha} = \frac{x}{\alpha+\beta} \quad (3) \Leftrightarrow \kappa(\alpha + \beta) - x\alpha = 0$$

και επειδή $(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow (\alpha, \alpha + \beta) = 1$ η διοφαντική αυτή εξίσωση δεν έχει λύση (κ, x) με $\kappa \in [1, \alpha - 1]$. Δηλαδή δεν υπάρχουν α, x με $\kappa \in [1, \alpha - 1]$ που να ικανοποιούν την (3). Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει $\frac{\lambda}{\beta}$ που να ανήκει στο άκρο κάποιου διαστήματος.

Έτσι όλοι οι δοσμένοι αριθμοί που ανήκουν στο [0, 1] ανήκουν σε διαστήματα διαφορετικά με μήκος $\frac{1}{\alpha+\beta}$ και έτσι το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων αυτών (το πλήθος τους είναι $\alpha - 1 + \beta - 1$) είναι:

$$\frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha + \beta}$$

3ο (Δ. Σταθόπουλος, Αθήνα) Φέρνουμε την κάθετη στη ΒΓ από το Δ που την τέμνει στο Μ, και το περιγεγραμμένο κύκλο το ΔΒΓ στο Ο'. Τότε για κάθε σημείο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΔΒΓ (Γ, R) θα ισχύει:



(1) ΑΟ ⩾ ΑΟ' (Επειδή όταν Ο ≠ Ο', η $\Delta\hat{O}'O$ είναι οξεία, άρα η $A\hat{O}O$ αμβλεία, επειδή τα Α, Δ, Μ συνευθειακά και άρα $\Delta\hat{O}'O + A\hat{O}'O = 180°$, οπότε στο αμβυγώνιο τρίγωνο $A\hat{O}'O$ θα είναι ΑΟ ⩾ ΑΟ')

2) $OB^2 + O\Gamma^2 \geqslant O'B^2 + O'\Gamma^2$

(Γιατί $OB^2 + O\Gamma^2 \geqslant O'\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\Gamma B^2}{2} + 2MO^2 \geqslant \frac{\Gamma B^2}{2} + 2MO'^2$$

(θεώρημα διαμέσου)) $\Leftrightarrow MO^2 \geqslant MO'^2 \Leftrightarrow$

$$MO > MO' \Leftrightarrow MO + \Delta M \geqslant MO' + \Delta M \Leftrightarrow$$

$$MO + \Delta M \geqslant R \Leftrightarrow MO + \Delta M \geqslant \Delta O$$

που ισχύει (τριγωνική ανισότητα)

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τη σχέση για Ο' = Ο.

Έτσι θα έχουμε

$$2(O\Delta^2 - OA^2) \leqslant 3(OB^2 + O\Gamma^2) \Leftrightarrow$$

$$2R^2 \cdot 2OA^2 \leqslant 3\left(\frac{R^2}{2} + 2OM^2\right) \Leftrightarrow$$

$$4R^2 - 3R^2 \leqslant 4R^2 - 3R^2 \leqslant 40A^2 + 120M^2 \Leftrightarrow$$

$$R^2 \leqslant 40A^2 + 120M^2 \Leftrightarrow R^2 \leqslant 4(R - 20M)^2 + 120M^2 \Leftrightarrow$$

$$R^2 \leqslant 4R^2 + 40M^2 - 2 \cdot 2R \cdot OM + 120M^2 \Leftrightarrow$$

$$3R^2 - 4R \cdot OM + 16MO^2 \geqslant 0 \qquad (3)$$

Θεωρούμε το α' μέλος της (3) τριώνυμο ως προς R, οπότε αφού $\Delta < 0$ και $\alpha = 3 > 0$, η (3) ισχύει.

• Την άσκηση αυτή έλυσαν όλοι σχεδόν οι μαθητές (ακόμα και της Α' Λυκείου). Μερικοί μάλιστα έδωσαν και εξαιρετικά προτότυπες λύσεις. Εδώ παρουσιάσαμε μιαν από τις πιο απλές.

4) (Γ. Παπουτσής, Θεσ/νίκη) Έστω ότι υπήρχαν τουλάχιστον 11 σημεία, τα $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{11}$.

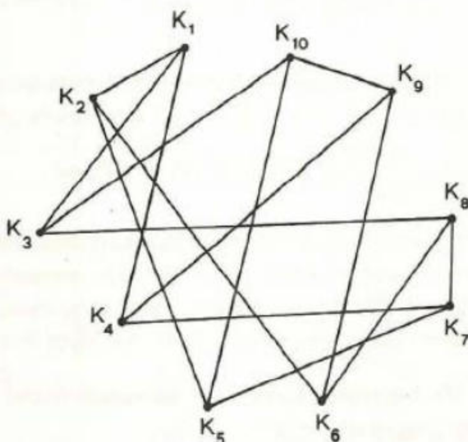
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το κ_1 συνδέεται με 1 ευθύγραμμο τμήμα με τα κ_2, κ_3, κ_4. Το κ_2 δεν μπορεί να συνδέεται με τα κ_3, κ_4 με 1 ευθύγραμμο τμήμα και έτσι, πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι συνδέεται με τα κ_1, κ_5, κ_6. Το κ_1 πρέπει να συνδέεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα κ_3, κ_5 (χωρίς βλάβη της γενικότητας).

(Πρέπει να συνδέεται με ένα από τα κ_3, κ_4 με 1 ευθ. τμήμα, για να συνδέεται με το κ_1 με 2 ευθ. τμήματα και με ένα από τα κ_5, κ_6 με 1 ευθ. τμ. για να συνδέεται με το κ_2 με 2 ευθ. τμήματα).

Όμοια και το κ_8 θα πρέπει να συνδέται με 2 από τα κ_3, κ_4, κ_5, κ_6 και όμοια και τα κ_9, κ_{10}.

Αν υπήρχε και 11ο σημείο θα έπρεπε κι αυτό να συνδέεται με δυο από αυτά, αλλά τότε με τα κ_3, κ_4, κ_5, κ_6 θα συνδεόταν συνολικά $2 \cdot 7 = 14$ ευθ. τμήματα*, άτοπο γιατί μ' αυτά συνδέονται το πολύ $3 \cdot 4 = 12$ ευθ. τμήματα.

Έτσι υπάρχουν το πολύ 10 σημεία, ενώ για 10 η πρόταση ισχύει, όπως στο σχήμα.



Δηλαδή η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ν είναι $\nu = 10$.

*(γιατί με 2 απ' αυτά συνδέονται τα κ_1, κ_2, κ_7, κ_8, κ_9, κ_{10}, κ_{11})

• Η άσκηση αυτή εκτός από τον Γ. Παπουτσή λύθηκε εν μέρει από άλλους δύο μαθητές (Δ. Σταθόπουλο, Τ. Ασλανίδη, Αθήνα).

ΘΕΜΑΤΑ 29ης Ι.Μ.Ο. (ΙΟΥΛΙΟΣ 1988)

* 1 (Βουλγαρία 1). Μια ακολουθία ακεραίων, ορίζεται από τη σχέση

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}\ (n > 1) = a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Να δείξετε ότι $2^k/a_n$, τότε και μόνο τότε όταν $2^k/n$.

2 (Βουλγαρία 2). Έστω

$$a_n = [\sqrt{(n+1)^2 + n^2}],\ n = 1, 2, \ldots$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Να δείξετε ότι:

i) Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι m, ώστε

$$a_{m+1} - a_m > 1$$

ii) Υπάρχουν άπειροι θετικοί αριθμοί m, ώστε

$$a_{m+1} - a_m = 1$$

* 3 (Βουλγαρία 3). Έστω n θετικός ακέραιος. Να βρείτε τον αριθμό των περιττών συντελεστών του πολυωνύμου $u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$.

* 4 (Καναδάς 1). Το τριγ. ABC είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών A, B, C επανατέμνουν τον κύκλο στα σημεία A', B', C' αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγ. A'B'Γ' $\geqslant$ του εμβαδού του ABC.

5 (Κούβα 1). Έστω κ θετικός και M_k το σύνολο όλων των ακεραίων μεταξύ του $2k^2 + k$ και $2k^2 + 3k$. Είναι δυνατό να διαμερισθεί το σύνολο M_k σε δύο υποσύνολα A, B τέτοια ώστε $\sum_{x\in A} x^2 = \sum_{x\in B} x^2$;

* 6 (Τσεχοσλοβακία 1). Τα τετράγωνα μιας $n \times n$ σκακιέρας ($n \geqslant 2$) αριθμούνται με τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n^2$ ώστε κάθε αριθμούς από αυτούς να εμφανίζεται. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο γειτονικά τετράγωνα (με κοινή πλευρά) τέτοια ώστε οι αριθμοί τους να διαφέρουν κατά n τουλάχιστον.

** 7 (Τσεχοσλοβακία 2). Έστω n ένας άρτιος, θετικός ακέραιος και έστω $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ σύνολα με n στοιχεία το καθένα και τέτοια ώστε κάθε δύο από αυτά έχουν ακριβώς ένα κοινό στοιχείο και κάθε στοιχείο της ένωσης του ανήκει, σε δύο τουλάχιστον από αυτά τα σύνολα. Για ποια n μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχεία της ένωσης τους, έναν από τους αριθμούς 0, 1 με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένα από τα σύνολα να έχει ακριβώς $\frac{n}{2}$ στοιχεία που αντιστοιχούν στο O.

* 8 (Τσεχοσλοβακία 3). Έστω ABCD ένα τετράεδρο και K, L τα μέσα των ακμών AB, CD αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι κάθε είπεδο που περιέχει την ευθεία KL διαιρεί το τετράεδρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

9 (Γαλλία 1). Αν a_0 θετικός πραγματικός αριθμός, θεωρούμε την ακολουθία $\{a_n\}$ με

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1} \quad \text{για } n \geqslant 0$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός α, τέτοιος ώστε

i) Για κάθε πραγματικό $a_0 \geqslant a$, η ακολουθία $\{a_n\} \to +\infty$

ii) Για κάθε πραγματικό $a_0 < a$, η ακολουθία $\{a_n\} \to 0$.

* 10 (Γαλλία 2). Έστω α η μεγαλύτερη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Να αποδειχθεί ότι ο 17 διαιρεί τους $[a^{1788}]$, $[a^{1988}]$ ($[x]$ το ακέραιο μέρος του x).

* 11 (Γαλλία 3). Έστω $u_1, u_2, \ldots u_m$ επίπεδα διανύσματα με άθροισμα το μηδενικό διάνυσμα, που καθένα έχει μήκος $\leqslant 1$. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να διατάξουμε τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots u_m$ σε καινούργια ακολουθία $v_1, v_2, \ldots, v_m$ έτσι ώστε κάθε μερικό άθροισμα

$$v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3,\ \ldots,\ v_1 + v_2 + \ldots + v_m$$

να έχει μήκος μικρότερο ή ίσο από το $\sqrt{5}$.

12 (Γαλλία 4). Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν περισσότερες από 27 ημιευθείες που ξεκινούν από το ίδιο σημείο του 3 — διαστάτου χώρου, έτσι ώστε η γωνία μεταξύ οποιονδήποτε ζεύγους από αυτές να είναι $\leqslant \frac{\pi}{4}$.

13 (Γαλλία 5). Έστω T τρίγωνο με εγγεγραμμένο κύκλο C. Ένα τετράγωνο πλευράς α είναι περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο C. Να αποδειχθεί ότι το ολικό μήκος των μερών των πλευρών του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου T, είναι τουλάχιστον 2α.

** 14 (Δ. Γερμανία 1). Έστω a, b θετικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $ab + 1 / a^2 + b^2$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{a^2 + \beta^2}{ab + 1}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

15 (Δ. Γερμανία 2). Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$. Θεωρούμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες θετικών ακεραίων με άθροισμα 1. Να υπολογισθεί ο ολικός αριθμός $T(n, k)$ των όρων όλων των ακολουθιών που είναι ίσοι με το κ.

16 (Δ. Γερμανία 3). Αν το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, τότε η τιμή του

$$f(n) = \left[n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right]$$

διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, εκτός από τους αριθμούς της μορφής $3n^2 - 2n$.

17 (Δ. Γερμανία 4). Αν το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, τότε η τιμή του

$$f(n) = \left[n + \sqrt{3n} + \frac{1}{2}\right]$$

διατρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, εκτός από τους αριθμούς της μορφής $\left[\frac{n^2 + 2n}{3}\right]$

* 18 (Α. Γερμανία 1) Έστω $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$. Μια συλλογή $F = \{A_1, A_2, ..., A_j\}$ υποσυνόλων $A_j \subseteq N$, $i = 1\ 2, ..., t$ λέγεται διαχωρίζουσα, αν για κάθε τεύχος $\{x, y\} \subseteq N$, υπάρχει ένα σύνολο $A_j \in F$ τέτοιο ώστε $A_j \cap \{x, y\}$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο. Η F λέγεται καλύπτουσα αν κάθε στοιχείο του N περιέχεται σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα της F. Ποια είναι η μικρότερη τιμή f(n) του f, ώστε να υπάρχει μια συλλογή $F = \{A_1, ... A_7\}$ που να είναι ταυτόχρονα διαχωρίζουσα και καλύπτουσα;

19 (Αν. Γερμανία 2). Έστω $Z_{m,n}$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (i, j) με $i \in \{1, 2, ..., m\}$ και $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Έστω ακόμα $a_{m,n}$ ο αριθμός των υποσυνόλων του $Z_{m,n}$ που δεν περιέχουν διατεταγμένα ζεύγη της μορφής

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2) \text{ με } |i_1 - i_1| + |j_1 - j| = 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους m, κ ισχύει $a^2_{m,2k} \leq a_{m,2k-1}a_{m,2k+1}$.

* 20 (Αν. Γερμανίας 3). Ο μηχανισμός ενός θησαυροφυλακίου αποτελείται από 3 τροχούς, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να βρίσκεται σε 8 διαφορετικές θέσεις. Λόγω ατέλειας του μηχανισμού η πόρτα ανοίγει αν οποιοδήποτε 2 από τους 3 τροχούς βρεθούν στη σωστή θέση. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμών συνδυασμών οι οποίοι πρέπει να δοκιμαστούν για να είμαστε σίγουροι ότι το θησαυροφυλάκιο θα ανοίξει;

21 (Ελλάδα 1). Έστω AB, CD δύο κάθετες χορδές ενός κύκλους με κέντρο O και ακτίνα τ. Έστω ακόμα X, Ψ, Z, W τα 4 μέρη στα οποία χωρίζεται ο κύκλος κατά κυκλική σειρά. Να βρεθεί το max και το min της παράστασης

$$\frac{A(X) + A(Z)}{A(\Psi) + A(W)}$$

όπου A (υ) το εμβαδό του υ.

(Γ. Τζίντζιφας)

* 22 (Ελλάδα 2). Σε τρίγωνο ABC παίρνουμε σημεία $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$ και $F \in KL$. Αν $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ και E τα εμβαδά των τριγώνων AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN και ABC αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$E \geq 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{1/2}$$

(Δ. Κοντογιάννης)

** 23 (Ελλάδα 3). Σ' ορθογώνιο τρίγωνο ABC φέρνουμε το ύψος AΔ στην υποτείνουσα και την ευθεία που συνδέει τα έγκεντρα των τριγώνων ABD, ACD και που τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία K, L αντίστοιχα. Αν E, E_1 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ABC και AKL αντίστοιχα, να δείξετε ότι $E/E_1 \geq 2$.

(Δ. Κοντογιάννης)

24 (Ελλάδα 4). Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι $x_1, x_2, ..., x_{29}$ ένας τουλάχιστον από τους οποίους είναι μεγαλύτερος από τον 1988, έτσι ώστε

$$x_1^2 + x^2 + ... + x_{29}^2 = 29x_1x_2 ... x_{29}$$

(Θ. Μπόλης)

25 (Χ. Κόγκ 1). Να βρείτε όλες τις τιμές της συνάρτησης

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x]$$

όταν $0 \leq x \leq 100$.

26 (Χ. Κογκ 2). Ο κύκλος $x^2 + y^2 = \tau^2$ τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A(τ, ο), B(− τ, ο), C(ο, τ), D(ο, − τ). Έστω P = (κ, υ) και Q = (− κ, υ) δύο σημεία της περιφέρειας του κύκλου. Έστω N το σημείο τομής της PQ με τον άξονα των y και M το ίχνος της κάθετης από το P προς τον άξονα των x. Αν το τ^2 είναι περιττός, $\kappa = \rho^m > q^n = \upsilon$, όπου ρ, q πρώτοι αριθμοί και m, n φυσικοί, να δειχθεί ότι $|AM| = 1$, $|BM| = 9$, $|DM| = 8$, $|PQ|\ 8$.

27 (Χ. Κογκ 3). Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 + \rho x^2 + qx + \tau = 0$$

είναι όλες πραγματικές και θετικές. Να βρεθεί μια σχέση μεταξύ των ρ, q, τ που να δίνει μιαυ αναγκαία συνθήκη, ώστε οι ρίζες να είναι τα συνημίτονα των γωνιών ενός τριγώνου.

28 (Χ. Κογκ 4). Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον φυσικό αριθμό n, ώστε η εξίσωση

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0,$$

να έχει μια πραγματική ρίζα.

29 (Χ. Κογκ 5). Να εκφράσετε τον αριθμό 1988 σαν άθροισμα θετικών ακεραίων που το γινόμενο τους είναι μέγιστο.

30 (Χ. Κογκ 6). Σε κάθε τρίγωνο, τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές είναι σημεία ομοκυκλικά.

* 31 (Ουγγ. 1). Για τιμές του n υπάρχει η $n \times n$ πίνακας με στοιχεία − 1, 0 ή 1 τέτοιος ώστε όλα τα 2n αθροίσματα των γραμμών και στηλών να είναι διαφορετικά.

32 (Ουγγ. 2). Στην επιφάνεια μιας σφαίρας δίνονται n σημεία. Να δειχθεί ότι μπορούμε να χωρίσουμε την επιφάνεια σε n ισοδύναμες περιοχές, έτσι ώστε κάθε μια από αυτές να περιέχει ακριβώς ένα από τα δοσμένα σημεία.

33 (Ουγγ. 3). Σ' ένα test πολλαπλών επιλογών υπήρχαν 4 ερωτήσεις και 3 δυνατές απαντήσεις για κάθε ερώτηση. Μια ομάδα μαθητών εξετάσθηκε και για κάθε 3 από αυτούς υπήρχε μια ερώτηση στην οποία 3 μαθητές απάντησαν διαφορετικά. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός μαθητών που εξετάσθηκαν;

* 34 (Ισλαν. 1). Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Τρεις ευθείες L_A, L_B και L_C που περνούν από τα A, B, C αντίστοιχα, κατασκευάζονται με τον ακολούθο τρόπο: Έστω H το ίχνος του ύψους από το A και S_A ο κύκλος με διάμετρο AH. O S_A τέμνει τις AB, AC στα M, N αντίστοιχα ($M \neq A$, $N \neq A$). Τότε L_A είναι κάθετη από το A στην MN. Ανάλογα κατασκευάζονται οι ευθείες Λ_B, L_C. Να δείξετε ότι οι ευθείες L_A, L_B, L_C περνούν από το ίδιο σημείο.

35 (Ισλαν. 2). Μια ακολουθία αριθμών a_n, $n = 1, 2, \ldots$ ορίζεται με τον ακολούθο τρόπο:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και για κάθε} \quad n \geqslant 2, \quad a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right) a_{n-1}$$

Να δειχθεί ότι $\sum\limits_{x \in A}^{n} a_n < 1$, για κάθε $n \geqslant 1$.

36 (Ινδον. 1). i) Έστω ABC ένα τρίγωνο με AB = 12, AC = 16. Έστω M το μέσο της BC και E, F σημεία των AC, AB αντίστοιχα, ώστε οι ευθείες EF AM να τέμνονται στο G. Αν $AE = 2 \cdot AF$, να βρείτε το λόγο EG/GF.

ii) Έστω E σημείο εξωτερικό ενός κύκλου και έστω δύο χορδές EAB, EDC τέμνονται κατά γωνία 40°. Αν AB = BC = CD να υπολογίσετε τη γωνία ACD.

37 (Ινδον. 2). i) 4 μπάλες ακτίνας 1 εφάπτονται. 3 βρίσκονται στο πάτωμα και η τέταρτη πάνω από αυτές. Ένα τετράεδρο που κάθε ακμή τους έχει μήκος s είναι περιγεγραμμένο στις μπάλες. Να υπολογίσετε την τιμή του s.

ii) Αν ABCD και EFHG είναι απέναντι έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με $\hat{\Delta HC} = 45°$ και $\hat{FHB} = 60°$, να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας BHD.

38 (Ινδον. 3). i) Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbb{N}$ αν είναι γνωστό ότι το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ δεν διαιρεί το πολυώνυμο $x^{2\kappa} + 1 + (x+1)^{2\kappa}$.

ii) Αν p, q, r είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

να βρεθεί το άθροισμα $p^3 + q^3 + r^3$.

iii) Αν r είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης των αριθμών 1059, 1417 και 2312 με έναν αριθμό $a > 1$, να βρεθεί η τιμή του $d - r$.

iv) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του θετικού περιττού αριθμού n για τον οποίο το γινόμενο των αριθμών $2^{1/7}$, $2^{3/7}$, ..., $2^{2n+1/7}$ είναι μικρότερο του 1000.

39 (Ινδον. 4). i) Έστω

$$g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $g(x^{12})$ με το $g(x)$.

ii) Έστω $\kappa > 0$ και f μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x^2 + 1)^{\sqrt{x}} = \kappa \ \forall x \in \mathbb{R}^*_+.$$

Να βρεθεί η τιμή του $f\left(\frac{g + y^2}{y^2}\right)^{\sqrt{12/y}}$ όπου $y > 0$.

iii) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1 \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad f(1) = 1.$$

Να βρεθεί ο αριθμός των ακεραίων n που ικανοποιούν τη σχέση $f(n) = n$.

40 (Ινδον. 5). i) Θεωρούμε κύκλο K με διάμετρο AB. Ακόμα ένα κύκλο L πο εφάπτεται στην AB και τον K και ένα κύκλο M που εφάπτεται στους κύκλους La, L και στην AB. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των κύκλων K και M.

ii) Στο τρίγωνο ABC είναι AB = AC και $\hat{CAB} = 80°$. Αν τα D, E, F είναι σημεία των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα και CE = CD, BF = BD να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{EDF}$.

41 (Ινδον. 6). i) Να υπολογίσετε το κ, αν $k =$

$$\frac{(11 + 6\sqrt{2})\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - (11 - 6\sqrt{2})\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} + 2}) - (\sqrt{\sqrt{5} + 1})}$$

ii) Για κάθε θετικό αριθμό x, έστω

$$k = \frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}$$

Να υπολογίσετε το ελάχιστο του κ.

** 42 (Ιρλανδία 1). Να δείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανισώσεως

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{\kappa}{x - \kappa} \geqslant \frac{5}{4}$$

είναι η ένωση ξένων διαστημάτων, που το άθροισμα των μηκών τους είναι 1988.

43 (Ιρλανδία 2). Να βρείτε τα τρίγωνα του επιπέδου που οι πλευρές τους έχουν μήκη ακέραιους αριθμούς και οι ακτίνες των εγγεγραμμένων τους κύκλων έχουν μήκος 1.

44 (Ιρλανδία 3). Έστω $-1 < x < 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{\kappa=0}^{6} \frac{1 - x^2}{1 - 2x\,\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{7}\right) + \kappa^2} = \frac{7(1+x)^7}{(1 - x^7)}$$

Να επαληθεύσετε ότι

$$\text{στεμ}^2\frac{\pi}{7} + \text{στεμ}^2\frac{2\pi}{7} + \text{στεμ}^2\frac{3\pi}{7} = 8$$

45 (Ιρλανδία 4). Το g(n) ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο

$$g(1) = 0, \quad g(2) = 1$$

και $\quad g(n+2) = g(n) + g(n+1) + 1 \quad (n \geqslant 1).$

Αν $\nu > 5$, όπου ν πρώτος αριθμός, να δείξετε ότι

$$n / g(n)\,(g(n) + 1).$$

46 (Ισραήλ 1). Οι $A_1, A_2, \ldots, A_{29}$ είναι 29 διαφορετικές ακολουθίες θετικών ακεραίων. Για $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 29$ και

κάθε φυσικός αριθμός κ, ορίζουμε $N_i(x) = 0$ αριθμός των στοιχείων της ακολουθίας A_i που δεν ξεπερνούν το x και $N_{ij}(x) = 0$ αριθμός των στοιχείων της τομής $A_i \cap A_j$ που δεν ξεπερνούν το x. Είναι γνωστό, ότι για κάθε $1 \leqslant i \leqslant 29$ και κάθε φυσικό αριθμό x ισχύει

$$N_i(x) \geqslant \frac{x}{e}, \quad \text{όπου} \quad e = 2.71828...$$

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος

$$i, j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 29)$$

τέτοιο ώστε $\quad N_{ij}\,(1988) > 200$

* 47 (Ισραήλ 2). Στο κυρτό 5-γωνο ABCDE είναι BC = CD = DE και κάθε διαγώνιος είναι παράλληλη σε μια πλευρά (AC // DE, BD // AE κλπ.). Να δείξετε ότι το 5-γωνο είναι κανονικό.

** 48 (Λουξεμβούργο 1). Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες R και r (R > r) και κέντρο O. Ένα στεθρό σημείο ρ βρίσκοεται στο μικρό κύκλο και μια μεταβλητή χορδή PA ανήκει στο μικρό κύκλο. Τα σημεία B, C ανήκουν στον μεγάλο κύκλο, τα B, P, C είναι συνευθειακά και $BC \perp AP$.

i) Για ποια τιμή (ες) της $\hat{OPA}$ το άθροισμα

$$BC^2 + CA^2 + AB^2$$

έχει ακρότατα;

ii) Ποιες είναι οι δυνατές θέσεις των μέσων U της AB και V της AC, όταν η $\hat{OPA}$ μεταβάλεται;

* 49 (Μεξικό 1). Έστω $f\colon Z_+ \to Z_+$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(f(n) + f(m)) = m + n$, για κάθε $m \in Z_+$, $n \in Z_+$. Να βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του f(1988).

50 (Μεξικό 2). Να δείξετε ότι οι αριθμοί A, B, C είναι ίσοι, όπου

A = ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να καλύψουμε ένα $2 \times n$ ορθογώνιο με 2×1 ορθογώνια.

B = ο αριθμός

$$C = \begin{cases} \binom{m}{0} + \binom{m+1}{2} + \ldots + \binom{2m}{2m}, & \text{αν } n = 2m \\ \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{3} + \binom{m+3}{5} + \ldots + \binom{2m+1}{2m+1}, & \text{αν } n = 2m+1 \end{cases}$$

51 (Μογγολία 1). Ο θετικός ακέραιος n έχει την ιδιότητα:

Σε κάθε σύνολο ν ακεραίων από τους 1, 2, ..., 1988 υπάρχουν 29 στοιχεία του που αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Να δείξετε ότι $n > 1788$.

52 (Μογγολία 2). Έστω ABCD ένα τετράπλευρο, A'BCD' το συμμετρικό του ως προς τη BC, A''B'CD' το συμμετρικό του A'BCD' ως προς τη CD' και A''B''C'D' το συμμετρικό του A''B'CD' στην D'A''. Αν οι ευθείες AA'', BB'' είναι παράλληλες να δείξετε ότι το ABCD είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

53 (Μογγολία 3). Θεωρούμε n σημεία $A_1, A_2, ..., A_n$ όχι συνευθειακά ανά τρία. Να δείξετε ότι το n-γωνο $A_1A_2 \ldots A_n$ είναι εγγράψιμο, αν και μόνο αν

$$A_1A_2 \cdot A_3A_n \ldots A_{n-1}A_n + A_2A_3 \cdot A_4A_n \cdot \ldots A_{n-1}A_n \cdot A_1A_4 + \ldots + A_{n-1}A_{n-2} \cdot A_1A_n \ldots \cdot A_{n-3}A_n = A_1A_{n-1} \cdot A_2A_n \ldots A_{n-2}A_n$$

* 54 (Μογγολία). Να βρείτε τον ελάχιστο φυσικό n που έχει την ιδιότητα: Αν το σύνολο {1, 2, ..., n} διαμερισθεί με οποιοδήποτε τρόπο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε το ένα από τα σύνολα περιέχει 3 διαφορετικούς αριθμούς τέτοιους ώστε, το γινόμενο των δύο να είναι ίσο με τον τρίτο.

55 (Μογγολία 5). Έστω $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$

για $1 \leqslant i \leqslant n \ (n > 1)$

και $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \pi$

Να δείξετε ότι: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma\upsilon\nu\beta_i}{\eta\mu\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma\varphi\alpha_i$

56 (Ολλανδία 1). Θεωρούμε στο επίπεδο 1988 σημεία, που ανά 4 δεν είναι συγγραμμικά. Τα σημεία ενός υποσυνόλου με 1788 στοιχεία τα χρωματίζουμε μπλε και τα υπόλοιπα 200 κόκκινα. Να δείξετε ότι υπάρχει μια ευθεία του επιπέδου, σε καθένα από τα ημιεπίπεδα της οποίας υπάρχουν 894 μπλε και 100 κόκκινα σημεία.

57 (Ολλανδία 2). Έστω S το σύνολο των ακολουθιών

$$\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 7, \alpha_i = 0 \text{ n } 1\}.$$

Η απόσταση δύο στοιχείων $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ ορίζεται σαν

$$\sum_{i=1}^{7} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Έστω T υποσύνολο του S στο οποίο κάθε δύο στοιχεία του έχουν απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3. Να δείξετε ότι το T περιέχει τουλάχιστον 16 στοιχεία. Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός τέτοιου συνόλου με 16 στοιχεία.

58. (Πολωνία 1). Έστω P κυρτό επίπεδο πολύγωνο και P' το κυρτό πολύγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών του P. Αν ν ακέραιος $\geqslant 3$, να βρείτε ακριβή φράγματα για το λόγο (εμβαδό P') : (εμβαδό P).

59 (Πολωνία 2). Στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε σημείο O και πεπερασμένο σύνολο τμημάτων που το άθροισμα των μηκών τους είναι 1988.

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα επίπεδο που τέμνεται από στοιχεία του A και η απόσταση του O από αυτό δεν ξεπερνά το 574.

60 (Πολωνία 3). Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{10}$ ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι υπάρχει μια μη μηδενική ακολουθία $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ τέτοια ώστε όλοι οι x_i να ανήκουν στο σύνολο {− 1, 0, 1} και ο αριθμός $\sum_{i=1}^{10} x_i\alpha_i$ να διαιρείται με τον 1001.

* 61 (Πολωνία 4). 49 σπουδαστές επιλύουν 3 προβλήματα. Η βαθμολογία για κάθε πρόβλημα είναι ένας ακέραιος αριθμός μεταξύ 0 έως 7. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυό φοιτητές A, B τέτοιοι ώστε, για κάθε πρόβλημα ο A

έχει βαθμολογία τουλάχιστον τόσους βαθμούς, όσους και ο B.

62 (Κίνα 1). Έστω $x = \rho, y = q, z = r, \omega = s$ η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

$$x + \alpha_i y + \alpha_i^2 z + \alpha_i^3 \omega = \alpha_i^4, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Να εκφράσετε τη λύση του παρακάτω συστήματος

$$x + \alpha_i^2 y + \alpha_i^4 z + \alpha_i^6 \omega = \alpha_i^8, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

συναρτήσει των ρ, q r, s.

* 63 (Κίνα 2). Έστω ρ το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων μεγαλύτερων του 2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι ακέραιοι $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ που να ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{\rho} x_i^2 - \frac{4}{4\rho + 1}\left(\sum_{i=1}^{\rho} x_i\right)^2 = 1 \qquad (1)$$

είτε υπάρχουν μόνο δύο τιμές του ρ, για τις οποίες υπάρχουν ακέραιοι που ικανοποιούν την (1).

64 (Κίνα 3). Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους x, που είναι τέτοιοι ώστε το γινόμενο των ψηφίων τους να είναι $x^2 - 10x - 22$.

65 (Κίνα 4). Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} \ (n \geqslant 1), \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. του 1960ου και 1988ου όρου της ακολουθίας.

66 (Κίνα 5). Έστω C ένας κύβος με ακμές που έχουν μήκος 2. Κατασκευάζουμε ένα στερεό με 14 έδρες κόβοντας πλησίον κάθε κορυφής τον κύβο, ώστε οι νέες έδρες να είναι κάθετες στις διαγώνιες του κύβου και ίσες.

Αν οι 14 έδρες του στερεού είναι ισοδύναμες, να υπολογίσετε το εμβαδό τους.

67 (Κίνα 6). Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων κ και n, έστω $S_\kappa(n)$ το άθροισμα των ψηφίων του n γραμμένου στο σύστημα αρίθμησης με βάση κ. Να δείξετε ότι υπάρχουν το πολύ δυο πρώτοι $\rho \leqslant 20.000$ για τους οποίους ο $S_{31}(\rho)$ είναι σύνθετος.

68 (Σιγγαπούρη 1). Σε μια ομάδα n ατόμων καθένας γνωρίζει ακριβώς 3 άλλους. Τα άτομα είναι καθισμένα σε ένα στρογγυλό τραπέζι. Θα λέμε ότι τα άτομα κάθονται «τέλεια», αν καθένας γνωρίζει τους δυο διπλανούς τους. Να δείξετε ότι αν υπάρχει μια «τέλεια» τοποθέτηση S των ατόμων της ομάδας, τότε υπάρχει και άλλη «τέλεια» τοποθέτηση S των ατόμων της ομάδας, που δεν προκύπτει από την S με στροφή ή αξονική συμμετρία.

69 (Σιγγαπούρη 2). Έστω Q το έγκεντρο του τριγώνου ABC. Να δείξετε ότι για κάθε σημείο P είναι

$$\alpha(PA)^2 + b(PB)^2 + C(PC)^2 =$$

$$\alpha(QA)^2 + b(QB)^2 + C(QC)^2 + (\alpha + b + c)\,(QP)^2,$$

όπου $\alpha = BC, \ b = CA, \ c = AB$.

70 (Ισπανία 1). Αν r, R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι

$$\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2} + \eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{A}{2} \leqslant \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

71 (Ισπανία 2). Έστω $A_1A_2A_3A_4$ τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο με πλευρές

$$\alpha_1 = A_1A_2, \quad \alpha_2 = A_2A_3, \quad \alpha_3 = A_3A_4, \quad \alpha_4 = A_4A_1.$$

Οι αντίστοιχοι κύκλοι με κέντρα I_i και αντίνες ρ_i εφάπτονται σε κάθε πλευρά α_i και στις πλευρές α_{i+1}, α_{i-1} (προεκτεινόμενες) $(\alpha_0 = \alpha_4)$.

Να δείξετε ότι: $$\prod_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{\rho_i} = 4\,(\sigma\tau\varepsilon\mu A_1 + \sigma\tau\varepsilon\mu A_2)^2.$$

72 (Ισπανία 3). Θεωρούμε h + 1 σκακιέρες. Αριθμούμε τα τετράγωνα κάθε σκακιέρας από 1 ως 64 με τέτοιο τρόπο, ώστε αν οι περίμετροι από δύο οποιεσδήποτε σκακιέρες της συλλογής μας τοποθετηθούν με οποιονδήποτε τρόπο η μια πάνω στην άλλη, δυο τετράγωνα που έχουν την ίδια θέση, να μην έχουν τον ίδιο αριθμό. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του h;

73 (Σουηδία 1). Ένα παιχνίδι για δύο παίκτες παίζεται με 9 κουτιά τοποθετημένα σε ένα 3 × 3 τετράγωνο και με άσπρες και μαύρες πέτρες. Σε κάθε κίνηση ο παίκτης τοποθετεί 3 πέτρες, όχι απαραίτητα του ίδιου χρώματος, σε 3 κουτιά σε μια οριζόντια ή κατακόρυφη γραμμή. Κάθε κουτί δεν περιέχει πέτρες διαφορετικού χρώματος: αν, για παράδειγμα ένας παίκτης τοποθετεί μιαν άσπρη πέτρα σε ένα κουτί που περιέχει μαύρες πέτρες, η άσπρη πέτρα και μια από τις μαύρες, αφαιρούνται από το κουτί.

Το παιχνίδι τελειώνει όταν το κεντρικό κουτί και τα κουτιά που είναι τοποθετημένα στις κορυφές περιέχουν μια μαύρη πέτρα και τα υπόλοιπα είναι άδεια.

Σε μια φάση του παιχνιδιού x κουτιά περιέχουν μια μαύρη πέτρα, ενώ τα υπόλοιπα είναι άδεια. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του x.

74 (Σουδηδία 2). Έστω $\{\alpha_k\}_1^\infty$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\alpha_k - 2\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} \geqslant 0 \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\kappa} \alpha_j \leqslant 1$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$

Να δείξετε ότι $$0 \leqslant (\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa+1}) \leqslant \frac{2}{\kappa^2},$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$

75 (Σουηδία 3). Ένα απειροσύνολο S ακεραίων περιέχει το O και είναι τέτοιο ώστε η διαφορά δύο διαδοχικών αριθμών δεν ξεπερνά ένα δοσμένο σταθερό αριθμό. Θεωρούμε την παρακάτω διαδικασία:

Παίρνουμε ένα σύνολο ακεραίων X και κατασκευάζουμε ένα νέο σύνολο που περιέχει όλους τους αριθμούς $x \pm s$, όπου $x \in X$ και $s \in S$.

Αρχίζοντας από το $S_0 = \{0\}$ κατασκευάζουμε διαδοχικά τα σύνολα $S_1, S_2, S_3, \ldots$ εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία. Να δείξετε ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων δεν θα παίρνουμε πια νέα σύνολα, δηλ. $S_\kappa = S_{\kappa_0}$, για $\kappa \geqslant \kappa_0$.

76 (Αγγλία 1). Ένας θετικός ακέραιος θα λέμε ότι είναι ένας «διπλός αριθμός» αν η ψηφιακή του παράσταση αποτελείται από ένα «μπλοκ» ψηφίων, που δεν αρχίζει από 0 και ακολουθείται από ένα ίδιο μπλοκ. Έτσι π.χ. ο 360360 είναι ένας διπλός αριθμός, ενώ ο 36036 δεν είναι. Να δείξετε ότι υπάρχουν άπειροι διπλοί αριθμοί που είναι τέλεια τετράγωνα.

** 77 (Αγγλία 2). Έστω $f: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ μια συνάρτηση για την οποία

$$f(1) = 1,\ f(3) = 3, \qquad f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.

Να ορίσετε με απόδειξη το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι $\leqslant 1988$, για τους οποίους $f(n) = n$.

78 (Αγγλία 3). Θέλουμε να διαμερίσουμε το σύνολο των θετικών αριθμών σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A και B που να έχουν τις ιδιότητες:

i) $1 \in A$.

ii) Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του A που να έχουν άθροισμα της μορφής $2^{\kappa} + 2$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$) και

iii) Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του B που να έχουν άθροισμα αυτής της μορφής.

Να δείξετε ότι η διαμέριση αυτή μπορεί να γίνει με ένα μόνο τρόπο και να προσδιορίσετε το υποσύνολο στο οποίο ανήκουν οι αριθμοί 1987, 1988, 1989.

79 (Αγγλία 4). Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο και L ευθεία στο επίπεδο του. Αν u, υ, ω τα μήκη των αποστάσεων των A, B, C από την L αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$u^2 \varepsilon\varphi A + \upsilon^2 \varepsilon\varphi B + \omega^2 \varepsilon\varphi C \geqslant 2\Delta$$

(Δ το εμβαδό του ABC). Πότε ισχύει το ίσο;

80 (Αγγλία 5). Μια ακολουθία ακεραίων $\{a_n\}$ ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 7$ και

$$-\frac{1}{2} < \alpha_{\nu+1} - \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{για} \quad \nu \geqslant 2$$

Να δείξετε ότι ο α_ν είναι περιττός για κάθε $\nu > 1$.

81 (ΗΠΑ 1). Υπάρχουν $n \geqslant 3$ κενές θέσεις σε ένα εργοστάσιο, που αριθμούνται από 1 έως n κατά φθίνουσα τάξη αμοιβής. Υπάρχουν n αιτήσεις για εργασία αριθμημένες από 1 έως n κατά φθίνουσα τάξη ικανότητας (προσόντων). Η αίτηση i είναι κατάλληλη για τη δουλεία j, αν και μόνο αν $i \geqslant j$.

Οι αιτήσεις έφθασαν κατά τυχαία τάξη. Καθένας έχει προσληφθεί στην υψηλότερα βαθμολογημένη εργασία, για την οποία αυτός ή αυτή είναι ικανοί, και για την οποία έχει το υψηλότερο επίπεδο από οποιαδήποτε άλλη εργασία που έχει επιλέξει. (Με βάση αυτούς τους κανονισμούς η εργασία 1 έχει ήδη καλυφθεί και έχει αποπερατωθεί η διαδικασία πρόσληψης). Να δείξετε ότι οι αιτήσεις, n και $n - 1$ έχουν την ίδια πιθανότητα πρόσληψης.

82 (ΗΠΑ 2). Το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο στο C. Το σημείο P βρίσκεται στο τμήμα AC και τα τρίγωνα PBA, PBC έχουν ίσους εγγεγραμμένους κύκλους. Να εκφράσετε το μήκος $x = PC$ συναρτήση των $a = BC$, $b = CA$ και $C = AB$.

83 (ΗΠΑ 3). Ένα πλήθος φωτεινών σημάτων είναι τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις κατά μήκος μιας σιδηροδρομικής γραμμής μονής κατεύθυνσης και είναι αριθμημένα κατά σειρά 1, 2, ..., N ($N \geqslant 2$). Για λόγους ασφαλείας, ένα τρένο δεν επιτρέπεται να περάσει ένα σήμα αν κάθε άλλο τρένο κινείται κατά μήκος της σιδηροτροχίας που βρίσκεται μεταξύ του σήματος αυτού και του επομένου. Όμως δεν υπάρχει όριο για τον αριθμό των τρένων που μπορούν να σταθμεύσουν σε ένα σήμα, το ένα πίσω από το άλλο (υποθέτουμε ότι τα τρένα έχουν μηδενικό μήκος).

Μια σειρά από K μεταφορικά τρένα πρέπει να οδηγηθούν από το σήμα 1 στο σήμα N. Κάθε τρένο κινείται με διαφορετική, αλλά σταθερή ταχύτητα, όταν κινείται και δεν είναι μπλοκαρισμένο για λόγους ασφαλείας.

Να δείξετε ανεξάρτητα από τη σειρά με την οποία τα τρένα είναι τοποθετημένα, ο ίδιος χρόνος θα περάσει μεταξύ της αναχώρησης του πρώτου τρένου από το σήμα 1 και της άφιξης του τελευταίου τρένου στο σήμα N.

84 (ΕΣΣΔ 1). Θεωρούμε σημείο M στην πλευρά AC του τριγώνου ABC με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ABM, BMC να είναι ίσες. Να δείξετε ότι $BM^2 = \Delta\ \sigma\varphi \dfrac{B}{2}$ (Δ το εμβαδό του ABC).

85 (ΕΣΣΔ 2). Γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, άρτιο πλήθος ατόμων συζητά. Μετά από ένα διάλειμα ξανακάθονται στο κυκλικό τραπέζι με διαφορετική σειρά. Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα τέτοια ώστε ο αριθμός των ατόμων που βρίσκονται μεταξύ τους πριν και μετά το διάλειμα είναι ο ίδιος.

86 (ΕΣΣΔ 3). Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ έχει ακέραια λύση διαφορετική από την $x = y = z = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta y^2 + cz^2 = 1$ έχει μια ρητή λύση.

87 (ΕΣΣΔ 4). Γράφουμε στη σειρά κατά αύξουσα τάξη όλους του ανάγωγους ρητούς αριθμούς, που το γινόμενο του αριθμητή και του παρονομαστή τους είναι μικρότερο από 1988. Να δείξετε ότι για κάθε δυο γειτονικά κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\gamma}{\varepsilon}$ με $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\gamma}{\varepsilon}$ ισχύει η σχέση $\beta c - \alpha d = 1$.

88 (ΕΣΣΔ 5). Θεωρούμε 5 κύκλους, από τους οποίους 6 κύκλοι βρίσκονται στο εσωτερικό του σταθερού 7ου και καθένας εφάπτεται στον 7ο και στους δύο διπλανούς του. Αν τα σημεία επαφής των 6 κύκλων με τον 7ο είναι κατά σειρά τα $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ να δείξετε ότι

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$$

89 (Βιετνάμ 1). Κάθε σύνολο M σημείων του επιπέδου, θα λέμε ότι ανήκει στο M* σύνολο, αν και μόνο αν $xx^* + yy^* \leqslant 1$, όπου $(x^*, y^*) \in M^*$ και $(x, y) \in M$. Να βρείτε τα τρίγωνα Y που είναι τίποτα ώστε, το Y* και ένα το συμμετρικό του Y ως προς την αρχή των συντεταγμένων.

90 (Βιετναμ 2). Υπάρχει αριθμός $\alpha(0 < \alpha < 1)$ τέτοιος ώστε να υπάρχει μια ακολουθία $\{a_n\}$ θετικών ακεραίων για την οποία ισχύει

$$1 + a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{\alpha}{n} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

91 (Βιετνάμ 3). Ένα κανονικό 14-γωνο με πλευρά α είναι εγγεγραμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Να δείξετε ότι

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha} > \sqrt{3 \text{ συν} \frac{\pi}{7}}.$$

92 (Βιετνάμ 4). Έστω $\rho \geqslant 2$ φυσικός. Να δείξετε ότι υπάρχει ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{i \sqrt[\rho]{i+1}} > \rho.$$

93 (Βιετνάμ 5) Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ βαθμού $\leqslant n$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{i=0}^{n} P(i)(-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

94 (Βιετνάμ 6). Έστω $n + 1$ $(n \geqslant 1)$ θετικοί ακέραιοι που δημιουργούνται αν πάρουμε το γινόμενο n πρώτων αριθμών (ένας πρώτος μπορεί να ληφθεί περισσότερες φορές ή ακόμα να μην ληφθεί στα γινόμενα). Να δείξετε ότι ανάμεσα στους $n + 1$ αυτούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε μερικούς αριθμούς που το γινόμενο τους είναι τέλειο τετράγωνο.

Παρατηρήσεις: Όσες ασκήσεις έχουν * επιλέχθηκαν σαν υποψήφια θέματα. Όσες έχουν ** τέθηκαν στην 19η Δ.Μ.Ο. με βάση το αποτέλεσμα ψηφοφορίας που έγινε ανάμεσα στους αρχηγούς των αποστολών. Τη μετάφραση έκαναν οι συνάδελφοι Θ. Μπόλης - Δ. Κοντογιάννης.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΙΛΕΞΑΜΕ

Κεσογλίδης

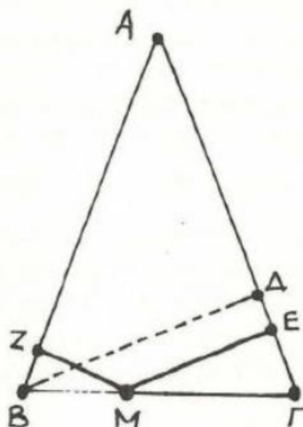
Άσκηση 1, τεύχος 4, Απρ. 1988, σελ. 211 (Ευκλείδης Β)

Ένα τετράπλευρο έχει την ιδιότητα: το άθροισμα των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου στο εσωτερικό του από τις πλευρές του είναι σταθερό. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε γνωστές τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν για κάθε σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου Μ από τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ είναι σταθερό, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και αντίστροφα.

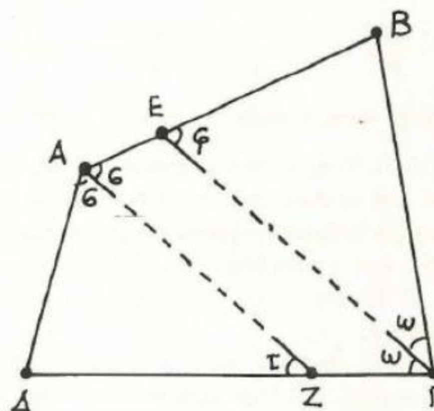


Σχ. 1

(ii) Αν σε ένα τετράπλευρο οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών είναι παράλληλες, τότε οι άλλες δύο γωνίες του είναι ίσες.

Δηλαδή, αν ΑΖ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Γ αντίστοιχα, τότε

$$AZ \parallel \Gamma E \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{\Delta}$$



Σχ. 2

Έστω τώρα ΑΒΓΔ το τετράπλευρο της άσκησης και Μ ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό αυτού. Από την υπόθεση έχουμε:

(1) $$MA_1 + MB_1 + M\Gamma_1 + M\Delta_1 = \text{σταθ.}$$

Από το σημείο Μ φέρνουμε ευθεία (ε) τέμνουσα τις πλευρές ΑΒ, ΑΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΕ = ΑΖ, τότε σύμφωνα με το

Μαθηματικές Ολυμπιάδες
12η Β.Μ.Ο.

Επιμέλεια: Π. Μπρέγιαννης, Σ. Ράππος, Γ. Τάκος
Λύσεις: Σ. Ράππος

Η 12η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη στην πόλη Φιλιππούπολη της Βουλγαρίας στο διάστημα 7–13 Μαΐου 1995, με συμμετοχή των χωρών της Ελλάδας, Βουλγαρίας, Σερβίας, Κύπρου, Σκοπίων και Αλβανίας. Η φιλοξενία των Βουλγάρων ήταν άψογη και το πρόγραμμα πλούσιο (επισκέψεις σε μαθηματικά σχολεία, μουσεία κ.λ.π.). Η εξαμελής ελληνική αποστολή αποτελούνταν από τους

Π. Θεοδωρίδη, Σ. Ράππο,
Ν. Καραναστάση, Σ. Ρουντζούνη,
Π. Μπρέγιαννη, Γ. Τάκο

και συνοδεύονταν από τους Θ. Μπόλη, Δ. Κοντογιάννη και Π. Βλάμο. Η ομάδα μας κατάφερε να αποσπάσει **4 χάλκινα** μετάλλια, με τους Π. Θεοδωρίδη, Π. Μπρέγιαννη, Σ. Ρουντζούνη, Γ.Τάκο και **1 αργυρό** με τον Σ. Ράππο.

Τα θέματα της 12ης ΒΜΟ με σύντομες λύσεις ήταν τα εξής:

Θέμα πρώτο (FYROM)

Να βρείτε την τιμή της έκφρασης: $(\ldots(((2 * 3) * 4) * 5) * \ldots) * 1995$, όπου $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$, για κάθε θετικό x, y.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η πράξη είναι προσεταιριστική και με επαγωγή δείχνουμε ότι: $2 * 3 * \ldots * n = \dfrac{n(n+1)-2}{n(n+1)+2}$, για n περιττό.

Θέμα δεύτερο (ΕΛΛΑΔΑ Δ. Κοντογιάννης)

Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(O_1, r_1)$ και $C_2(O_2, r_2)$ που τέμνονται στα A, B όπου $r_1 < r_2$ και $O_1\widehat{A}O_2 = 90°$. Η ευθεία O_1O_2 τέμνει τον C_1 στα C, D ενώ τον C_2 στα E, F. Το E είναι μεταξύ των C, D και το D μεταξύ των E, F. Η BE τέμνει τον C_1 στο K και την AC στο M, ενώ η BD τέμνει τον C_2 στο L και την AF στο N. Να δείξετε ότι $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{KE}{KM} \cdot \dfrac{LN}{LD}$.

Λύση

Επειδή οι κύκλοι τέμνονται κάθετα, εύκολα δείχνουμε ότι C, A, L συνευθειακά και F, A, K συνευθειακά.

Από το θεώρημα Μενελάου στα τρίγωνα MCE και NDF, που τέμνονται από τις ευθείες FAK, CAL αντίστοιχα, έχουμε ότι: $\dfrac{KM}{KE} \cdot \dfrac{AC}{AM} \cdot \dfrac{2r_2}{CF} = 1 = \dfrac{LN}{LD} \cdot \dfrac{AF}{AN} \cdot \dfrac{2r_1}{CF}$ (1)

Στο εγγράψιμο AMBN, εύκολα δείχνουμε ότι MN // FE, οπότε από την (1) προκύπτει $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{KE}{KM} \cdot \dfrac{LN}{LD}$.

Παρατήρηση. Οπως μας είπε ο κ. Κοντογιάννης, που κατασκεύασε την άσκηση, αυτή ισχύει και όταν $O_1\widehat{A}O_2 \neq 90°$.

Θέμα τρίτο (ΑΛΒΑΝΙΑ)

Έστω a, b θετικοί ακέραιοι με a > b και a + b = άρτιο. Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$ είναι θετικοί ακέραιοι κανένας από τους οποίους δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = b^2 + 1$, $x_2 = a^2 - b^2 - a$ και επειδή $a \geqslant b + 1$, έχουμε ότι $a^2 - b^2 - a \geqslant a - 1 > b - 1 \geqslant 0$, δηλ. x_1, x_2 θετικοί ακέραιοι. Το x_1 ουδέποτε είναι τέλειο τετράγωνο, αφού $b^2 < x_1 < (b + 1)^2$. Για το x_2 θέτουμε $m = \dfrac{(a+b)}{2}$, $n = \dfrac{(a-b)}{2}$ και υποθέτουμε ότι $c^2 = x_2 = 4mn - n - m$ για κάποιο c ακέραιο. Τότε $(4m - 1)(4n - 1) = 4(4mn - m - n) + 1$ (1).

Αν όμως ένας αριθμός q είναι της μορφής $q = 4\kappa + 1$ θα έχει πρώτο διαιρέτη της μορφής $\rho = 4\lambda - 1$. Έστω φυσικοί x, y ώστε $(x, \rho) = (y, \rho) = 1$, οπότε από θ. Fermat προκύπτει ότι: $(x^2)^{2\lambda-1} + (y^2)^{2\lambda-1} - 2 \equiv 0(\bmod \rho) \Rightarrow x^2 + y^2$ δε διαιρεί το $\rho \Rightarrow x^2 + y^2$ δε διαιρεί το q (2).

Θέτουμε $x = 2c$, $y = 1$, οπότε οι (1), (2) καταλήγουν σε αντίφαση.

Θέμα τέταρτο (ΣΕΡΒΙΑ)

Έστω n θετικός ακέραιος και S το σύνολο όλων των σημείων (x, y) όπου x, y θετικοί ακέραιοι με $x \leqslant n$, $y \leqslant n$. Υποθέτουμε ότι T είναι το σύνολο όλων των τετραγώνων με κορυφές στο S. Συμβολίζουμε με a_κ ($\kappa \geqslant 0$), τον αριθμό των ζευγών των σημείων του S, που είναι κορυφές ακριβώς κ τετραγώνων του T. Να δείξετε ότι $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Λύση

Προφανώς υπάρχουν μόνο τα a_0, a_1, a_2, a_3. Ο πληθάριθμος του S είναι

$$\binom{n^2}{2} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \qquad (1)$$

Το πλήθος των τετραγώνων του T πλευράς κ που έχουν πλευρές παράλληλες στους άξονες είναι $(n - \kappa)^2$. Στις πλευρές των τετραγώνων αυτών περιέχονται οι κορυφές ακριβώς κ τετραγώνων του T. Ο πληθάριθμος του T είναι λοιπόν:

$$|T| = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \kappa(n-\kappa)^2 = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \kappa^2(n-\kappa) = n\sum_{\kappa=1}^{n-1} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{n-1} \kappa^3 = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12}.$$

Αν το πλήθος των τετραγώνων του T οριστεί με βάση τα σημεία του S, έχουμε:

$$|T| = \frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3)}{6} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Θα θέλαμε τέλος να ευχαριστήσουμε την Ε.Μ.Ε. και τον κ. Δ. Κοντογιάννη για την πολύτιμη βοήθειά του στις επιτυχίες μας αυτές.

Ο Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός (Θαλής)



Επιτροπή Διαγωνισμών

Όπως κάθε χρόνο, έτσι και φέτος διεξήχθη με αρκετή επιτυχία ο Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός της Ε.Μ.Ε. Η προσέλευση των μαθητών ήταν πολύ μεγάλη, αν και σε αρκετά σχολεία οι μαθητές άργησαν να ειδοποιηθούν.

Η επιτροπή και από τη θέση αυτή ευχαριστεί τους συναδέλφους που βοήθησαν στη διεξαγωγή του διαγωνισμού είτε ως διορθωτές είτε ως επιτηρητές.

Τα θέματα με τις λύσεις τους δημοσιεύουμε παρακάτω:

Θέματα για την Α΄ τάξη Λυκείου

1Α. Δύο μαθητές Α, Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:
Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δύο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.
Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

2Α. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντιστοίχως. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

3Α. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

4Α. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

Θέματα για τη Β΄ τάξη Λυκείου

1Β. Έστω κύκλος ακτίνας 1, στον οποίο ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο A_0. Στη συνέχεια ορίζουμε τα σημεία A_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ως εξής:

Το μήκος του τόξου A_0A_ν (όπου αυτό μπορεί να είναι μεγαλύτερο του 2π) να είναι $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu}$.

Να δείξετε ότι:

α) Δεν υπάρχει σημείο A_ν, $\nu \geqslant 1$ που να συμπίπτει με το A_0.

β) Δεν υπάρχουν $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $\mu \neq \nu$ ώστε τα σημεία A_μ, A_ν να συμπίπτουν.

2Β. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, να δείξετε ότι ισχύει: $AB + \Gamma\Delta \geqslant 4\rho$.

3Β. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν με την ιδιότητα:
Από το σύνολο $A(\nu) = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ μπορούμε να διαλέξουμε κ αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ όπου $\kappa \geqslant 3$, $\alpha i \neq \alpha j$, έτσι, ώστε να ισχύει:

$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_3| = \cdots = |\alpha_{\kappa-1} - \alpha_\kappa| = |\alpha_\kappa - \alpha_1|$.

Τι συμβαίνει αν απλά $\kappa \geqslant 1$;

4Β. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $3^{21} - 2^{24} - 6^{8} - 1$ διαιρείται με το 1930.

Θέματα για την Γ' τάξη Λυκείου

1Γ. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$\Pi(x, \psi) = x\psi + x\sqrt{1-\psi^2} + \psi\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\psi^2}$, με $|x| \leqslant 1$, $|\psi| \leqslant 1$.

2Γ. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι:

$f(x-2) + f(x+2) = \sqrt{3}f(x)$.

Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική.

3Γ. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και (ε) μια ευθεία που περνάει από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου και τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι: $\dfrac{AK}{KB} \geqslant 4\dfrac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}$.

4Γ. Έστω Α ένα σύνολο ν ακεραίων αριθμών. Από το σύνολο αυτό κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές παραστάσεις παίρνοντας ένα ορισμένο πλήθος αριθμών και προσθαφαιρώντας τους μεταξύ τους. Π.χ. αν $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4} \in A$ τότε μια δυνατή παράσταση είναι η $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$ ή $-\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$.
Δύο διαφορετικές παραστάσεις ανεξάρτητα από το αριθμητικό τους αποτέλεσμα θα θεωρούνται διακεκριμένες.
Να υπολογίσετε το πλήθος των δυνατών παραστάσεων.

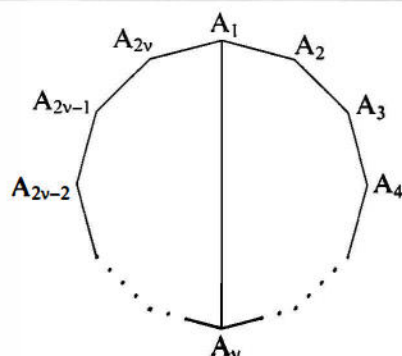
Λύσεις του 56ου Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού «Ο Θαλής»

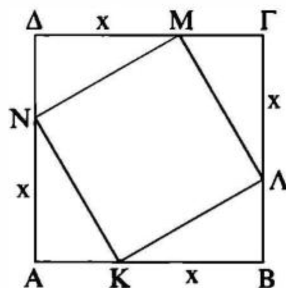
Τάξη Α' Λυκείου

1Α. Θα νικήσει ο Α παίκτης αν ακολουθήσει την παρακάτω στρατηγική:

Φέρει τη διαγώνιο A_1A_ν που χωρίζει το 2ν-γωνο σε δύο ίσα (ν + 1)-γωνα (σχήμα). Τα σχήματα αυτά είναι ίσα και συμμετρικά.

Ο δεύτερος παίκτης έστω ότι φέρει μια διαγώνιο A_iA_j. Τότε ο Α φέρνει τη συμμετρική αυτής ως προς την A_1A_ν κ.λ.π.



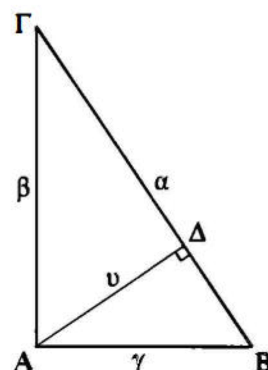


2A. Έστω $AB = 1$, $K\Lambda = \sqrt{\lambda}$ και $KB = x$ (σχήμα).

Τότε $B\Lambda = \Gamma M = AN = AK = 1 - x$ και

$x^2 + (1-x)^2 = \lambda$ ή $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\lambda})$.

Επομένως $\frac{AK}{KB} = \frac{1-x}{x} = \frac{1 \mp \sqrt{\lambda}}{1 \pm \sqrt{\lambda}}$.



3A. Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με α, β, γ, υ ακέραιους (σχήμα). Τότε συν$B = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, συν$\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Q}$. Αλλά συν$B = \frac{B\Delta}{\upsilon} \in \mathbb{Q}$ άρα ΒΔ, ΔΓ ρητοί αριθμοί. Αλλά από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι ΒΔ, ΓΔ ακέραιοι.

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν ΒΔ, ΓΔ και οι δύο άρτιοι είτε περιττοί.
Τότε η ΒΓ είναι άρτιος, και από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι οι β, γ θα είναι είτε και οι δύο άρτιοι, είται και οι δύο περιττοί. Τότε όμως η περίμετρος είναι άρτιος, πράγμα άτοπο.

β) Είναι ΒΔ άρτιος, ΓΔ περιττός. Όμοια.

4A. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} \leqslant \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$ ή $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\alpha - \beta) \geqslant 0$ που ισχύει.

Τάξη Β′ Λυκείου

1B. α) Αν υπάρχει σημείο A_ν που να ταυτίζεται με το A_0, θα πρέπει $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} = 2\kappa\pi$ (1) (κ φυσικός), άτοπο.

Πράγματι το α′ μέλος της (1) είναι ρητός, ενώ το β′ μέλλος άρητος.

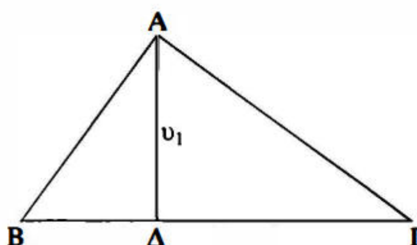
β) Όμοια θα πρέπει $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \cdots + \frac{1}{\nu} = 2\kappa\pi$ $(\kappa \in \mathbb{N})$, άτοπο.

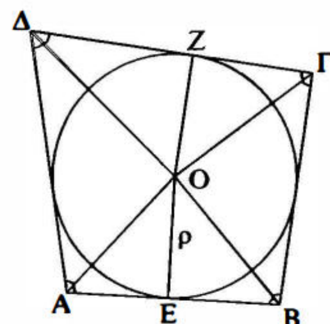
2B. Πρωτα αποδεικνύεται ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$\alpha \geqslant 2A\Delta$ εφ$\left(\frac{A}{2}\right)$,

όπου ΑΔ το ύψος από το Α (σχήμα).

Ακολούθως εφαρμόζοντας το παραπάνω στα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ παίρνουμε:





$AB + \Gamma\Delta \geqslant 2\rho\left(\text{εφ}\frac{AOB}{2} + \text{εφ}\frac{\Gamma O\Delta}{2}\right) = 2\rho\left(\text{εφ}\frac{AOB}{2} + \text{σφ}\frac{AOB}{2}\right)$ (1), αφού $A\widehat{O}B + \Gamma\widehat{O}\Delta = 180°$.

Οπότε $AB + \Gamma\Delta \geqslant 2\rho\cdot 2 = 4\rho$. Αφού $\text{εφ}\frac{AOB}{2} + \text{σφ}\frac{AOB}{2} \geqslant 2\sqrt{\text{εφ}\frac{AOB}{2}\cdot \text{σφ}\frac{AOB}{2}} = 2\sqrt{1} = 2$

3B. Προφανώς η πρόταση για $\kappa = 2$ ισχύει: $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_1|$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ πρέπει να είναι γνησίως μονότονη, γιατί αν $\alpha_{i-1} < \alpha_i$ και $\alpha_{i+1} < \alpha_i$, τότε $\alpha_i - \alpha_{i-1} = |\alpha_i - \alpha_{i-1}| = |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ οπότε $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι αριθμοί θα πρέπει να είναι κ το πλήθος, άρα διαφορετικοί.

Έστω ότι $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_3| = \cdots = |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = m$.

Τότε $(\kappa - 1)m = \sum_{j=2}^{\kappa} |\alpha_j - \alpha_{j-1}| = \alpha_\kappa - \alpha_1 = m$ (1)

Η (1) ισχύει αν $\kappa = 2$.

4Β. Ως γνωστόν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$ (1)

Αν $\alpha = 3^7$, $\beta = -2^8$, $\gamma = -1$ η (1) γίνεται $3^7 - 2^8 - 1 = 1930$.

Τάξη Γ' Λυκείου

1Γ. Θέτουμε $x = \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\psi = \sigma\upsilon\nu\beta$. Είναι:

$\Pi(\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\alpha - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta =$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta) = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$

Άρα η μέγιστη τιμή της $\Pi(x, \psi)$ είναι το $\sqrt{2}$.

2Γ. Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $f(x - 2) + f(x + 2) = \sqrt{3}f(x)$ και παίρνουμε:

$\sqrt{3}f(x - 2) + \sqrt{3}f(x + 2) = 3f(x)$ (1)

Όμως $\sqrt{3}f(x - 2) = f(x - 4) + f(x)$ και $\sqrt{3}f(x + 2) = f(x) + f(x + 4)$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x - 4) + f(x + 4) = f(x)$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας τη (2) με $\sqrt{3}$ παίρνουμε:

$f(x - 6) + f(x + 6) = 0$ ή $f(x + 12) = -f(x)$ άρα $f(x + 24) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο 24.

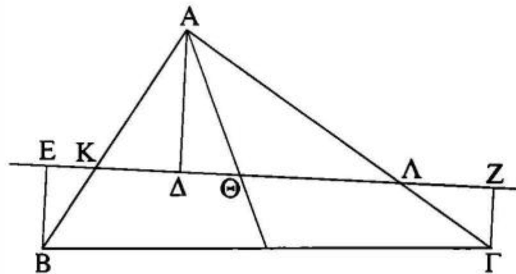
3Γ. Έστω ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ κάθετες από τα Α, Β, Γ στην (ε). Τότε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{BE} + \Gamma\mathrm{Z}$ (1).

Όμως $(\mathrm{AK\Lambda}) = \frac{1}{2}\mathrm{K\Lambda}\cdot\mathrm{A\Delta} = \frac{1}{2}\mathrm{K\Lambda}\cdot(\mathrm{BE} + \Gamma\mathrm{Z}) =$

$(\mathrm{BK\Lambda}) + (\Gamma\mathrm{K\Lambda}) \geqslant 2\sqrt{(\mathrm{BK\Lambda})(\Gamma\mathrm{K\Lambda})}$,

άρα $(\mathrm{AK\Lambda})^2 \geqslant 4(\mathrm{BK\Lambda})(\Gamma\mathrm{K\Lambda}) \Rightarrow \frac{(\mathrm{AK\Lambda})}{(\mathrm{BK\Lambda})} \geqslant 4\frac{(\Gamma\mathrm{K\Lambda})}{(\mathrm{AK\Lambda})}$

δηλαδή $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{BK}} \geqslant 4\frac{\Gamma\Lambda}{\mathrm{A\Lambda}}$.



4Γ. Προκειμένου για κ (κ < ν) αριθμούς από το σύνολο Α, το πλήθος των κ-άδων είναι όσοι οι συνδυασμοί $\binom{\nu}{\kappa}$, ενώ το πλήθος των διαφορετικών κ-άδων των προσήμων είναι 2^κ. Άρα (αρχή πολλαπλασιασμού) το πλήθος των παραστάσεων με κ αριθμούς είναι $2^\kappa\binom{\nu}{\kappa}$. Επομένως όλες οι παραστάσεις, για τις διάφορες τιμές του κ είναι $\sum_{\kappa=1}^{\nu} 2^\kappa\binom{\nu}{\kappa} = 3^\nu - 1$, το πλήθος.





Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

Επιτροπή Διαγωνισμών

Το Σάββατο 20 Ιανουαρίου 1996 διεξήχθη στο κτίριο Γκίνη του Ε.Μ.Π. η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης». Συμμετείχαν 130 μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, Παράλληλα με την Ε.Μ.Ο. διεξήχθη και ο 3ος Λευκοπούλειος Διαγωνισμός Πιθανοτήτων στον οποίο θα αναφερθούμε στο επόμενο τεύχος. Η απονομή των βραβείων έγινε την Κυριακή 21 Ιανουαρίου 1996 στην Μεγάλη Αίθουσα Τελετών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Στην τελετή παραβρέθηκε εκ μέρους του Υπουργείου Παιδείας ο Γενικός Γραμματέας του Υπουργείου Παιδείας κ. Γιάννης Πανάρετος.

Τα ονόματα των βραβευθέντων μαθητών είναι τα εξής:

ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΟΝΟΜΑ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΔΙΑΚΡΙΣΗ
ΑΝΤΩΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΣΠ.	ΓΥΜ. ΚΩΣΤΕΑ ΓΕΙΤΟΝΑ	Α' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΜΠΟΥΡΝΗ ΘΕΟΔΩΡΑ	3ο ΓΥΜ. ΡΟΔΟΥ	Α' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ ΕΥΤ.	6ο ΓΥΜ. ΧΑΝΙΩΝ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΔΑΣΚΑΛΑΚΗΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ	ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΣ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΚΑΡΑΜΗΤΡΟΣ ΔΗΜ.	ΕΚΠ/ΡΙΑ ΔΟΥΚΑ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΖΕΑΚΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ	63ο ΓΥΜ. ΑΘΗΝΩΝ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΡΟΥΜΠΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ	ΠΕΙΡ.ΓΥΜ. ΚΑΒΑΛΑΣ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΙΔΗΣ ΑΘΗΝΟΔ.	ΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧ. ΑΘΗΝΩΝ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΞΑΓΟΡΑΡΗ ΜΑΡΙΡΕΝΙΑ	ΛΕΟΝΤΕΙΟ Ν. ΣΜΥΡΝΗΣ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΙΩΣΗΦΙΔΗΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ	ΦΙΛΙΠΠΕΙΟ ΒΕΡΟΙΑΣ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΑΜΑΝΑΤΙΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ	11ο ΓΥΜ. ΠΕΙΡΑΙΑ	ΕΠΑΙΝΟ
ΚΑΤΡΑΝΑΡΑΣ ΕΥΣΤΑΘ.	2ο ΓΥΜ. ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ	ΕΠΑΙΝΟ
ΣΥΜΕΩΝΙΔΟΥ ΙΩΑΝΝΑ	ΑΝΑΤΟΛΙΑ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ	ΕΠΑΙΝΟ
ΠΟΥΛΟΠΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜ.	8ο ΔΗΜ. ΣΧ. ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΥ	ΕΙΔΙΚΟ ΒΡΑΒΕΙΟ
ΤΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑ	2ο ΓΥΜ. ΑΡΓΟΥΣ	ΕΠΑΙΝΟ

ΛΥΚΕΙΟ

ΟΝΟΜΑ	ΣΧΟΛΕΙΟ	ΔΙΑΚΡΙΣΗ
ΤΑΚΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	1ο ΠΕΙΡ.ΛΥΚ.ΑΘΗΝΩΝ	Α' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΜΠΡΕΓΙΑΝΝΗΣ ΠΕΤΡΟΣ	2ο ΛΥΚ.ΑΜΑΡΟΥΣΙΟΥ	Α' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΜΑΛΙΚΙΩΣΗΣ ΡΩΜΑΝΟΣ	14ο ΛΥΚ.ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ	Α' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΧΑΤΖΗΓΩΓΟΣ ΧΑΡΙΣΗΣ	ΑΝΑΤΟΛΙΑ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΣΗΦΑΚΗΣ ΕΥΤΥΧΗΣ	2ο ΛΥΚ. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΡΟΥΤΖΟΥΝΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ	12ο ΛΥΚ.ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΒΟΓΙΑΤΖΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	ΚΟΛ.ΑΓ. ΠΑΡΑΣΚΕΥΗΣ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΣΙΔΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓ.	3ο ΛΥΚ. ΚΟΖΑΝΗΣ	Β' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΔΗΣ ΙΩΑΝ.	ΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΣΧ. ΑΘΗΝΩΝ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΑΡΜΠΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ	ΛΕΟΝΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ	Γ' ΒΡΑΒΕΙΟ
ΤΣΑΚΜΑΚΙΔΗΣ ΚΟΣΜΑΣ	1ο ΛΥΚ. ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ	ΕΠΑΙΝΟ
ΜΑΣΤΡΟΛΕΩΝ ΛΥΚΟΜ.	2ο ΛΥΚ.ΓΛΥΦΑΔΑΣ	ΕΠΑΙΝΟ
ΔΗΜΗΤΡΟΜΑΝΩΛΑΚΗΣ Α	ΕΠΛ ΧΑΝΙΩΝ	ΕΠΑΙΝΟ
ΨΥΛΛΑΚΗΣ ΠΕΡΙΚΛΗΣ	2ο ΛΥΚ. ΧΑΝΙΩΝ	ΕΠΑΙΝΟ

ΘΕΜΑΤΑ της Ε.Μ.Ο. «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

1. Έστω (α_ν) μια ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία ισχύουν

(i) $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}=\frac{1}{4}$, για κάθε $\nu \in N^*$ (ii) $\frac{\alpha_{\eta+1}}{\alpha_\eta}+\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$, για κάθε $\eta,\nu \in N^*$ με $|\eta-\nu|\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η (α_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει **t>0**, ώστε $\sqrt{\alpha_{\nu+1}} \le \frac{1}{2}\alpha_\nu + t$

2. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** φέρνουμε τα ύψη **ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ** που τέμνονται στο **Η**. Έστω ακόμα **ΑΙ** και **ΑΘ** η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας **Α**.
Αν **Μ, Ν** είναι τα μέσα των **ΒΓ** και **ΑΗ** να αποδείξετε ότι:
α) Η **ΜΝ** είναι κάθετη στην **ΕΖ**.
β) Αν η **ΜΝ** τέμνει τις **ΑΙ, ΑΘ** στα **Κ, Λ** τότε **ΚΛ=ΑΗ**.

3. Δίνονται **81 φυσικοί αριθμοί** των οποίων οι πρώτοι διαιρέτες ανήκουν στο σύνολο **{2, 3, 5}**. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τέσσερις αριθμοί, από τους 81, που το γινόμενό τους είναι τέταρτη δύναμη φυσικού αριθμού.

Να ορίσετε το πλήθος των συναρτήσεων **f**, με $f:\{1,2,\ldots,\nu\}\longrightarrow\{1995,1996\}$
οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: **ο αριθμός** f(1)+f(2)+...+f(ν) **είναι περιττός.**

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Α) Από τη σχέση $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}=\frac{1}{4}$ έχουμε ότι $\frac{\alpha_{\nu+3}}{\alpha_{\nu+1}}=\frac{1}{4}$ άρα $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}=\frac{\alpha_{\nu+3}}{\alpha_\nu}$ (1).

Από τη σχέση $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$ παίρνουμε για $n=2+\nu$ ότι $\frac{\alpha_{\nu+3}}{\alpha_{\nu+2}}+\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$ (2).

Η σχέση (1) όμως γράφεται και ως εξής $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{\alpha_{\nu+3}}{\alpha_{\nu+2}}$ το οποίο φανερώνει ότι η (α_ν) είναι γεωμετρική ακολουθία. Αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε ότι $\frac{2\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$ ή $\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}$ αν (3) δηλαδή $\lambda=\frac{1}{2}$.

Β) Αφού η (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος θα ισχύει: $\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}$ αν $\leqslant \left(\frac{\alpha_\nu+\frac{1}{2}}{2}\right)^2$ ή $\sqrt{\alpha_{\nu+1}}\leqslant\frac{1}{2}$ αν $+\frac{1}{4}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

(Η λύση είναι του μαθητή **Σ. Μιχαλάκη**)

Πολύ καλές λύσεις έδωσαν και οι μαθητές **Μπρέγιαννης Π., Τάκος Γ.**

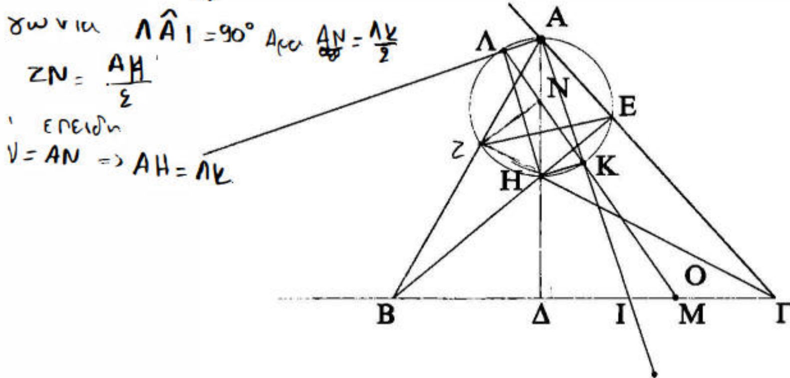
2. **Α)** Επειδή τα τρίγωνα ΝΖΕ και ΜΖΕ έχουν ΕΖ κοινή για να δείξω ότι ΕΖ ⊥ ΜΝ αρκεί να δείξω ότι ΝΖ = ΝΕ και ΜΖ = ΜΕ. Το ΑΖΗΕ είναι εγγράψιμο αφού $A\widehat{Z}H = A\widehat{E}H = 90°$.

Αρα αφού ΑΝ = ΝΗ το Ν είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου άρα ΝΖ = ΝΕ.

Επίσης ΜΖ διάμεσος στο $\Gamma\widehat{Z}B$ με $\widehat{Z} = 90°$. Άρα $MZ = \frac{1}{2}B\Gamma = MB$.

Όμοια η ΕΜ είναι διάμεσος στο ΕΒΓ με $\widehat{E} = 90$. Άρα $EM = \frac{1}{2}B\Gamma = MB$ Άρα ΜΖ = ΕΜ.

Β)



Η γωνία Α είναι εγγεγραμμένη στον c, άρα η διχοτόμος διέρχεται από το μέσο του $\widehat{EZ}$, το οποίο είναι το σημείο Κ. Άρα $H\widehat{K}A = 90°$, οπότε ΗΚ ⊥ ΑΙ και ΗΚ // ΑΛ. Επειδή ακόμα Ν το μέσο του ΑΗ, η ΚΛ θα τέμνει την ΑΙ, στο Λ ώστε ΚΛ = ΝΛ, δηλ. Το ΑΚΗΛ είναι ορθογώνιο παραλ/μο και συνεπώς ΛΚ = ΑΗ.

(Η λύση είναι του μαθητή **Χ. Χατζηγώγου**).

Πολύ καλή λύση έδωσε και ο μαθητής **Λ. Σιδηρόπουλος** (Κοζάνη)

3. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{81}$ οι δοσμένοι φυσικοί και έστω $\alpha_i = 2^{\kappa i} 3^{\lambda i} 5^{\mu i}$, όπου $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant 81$.

Το γινόμενο $\alpha_i \alpha_j = 2^{\kappa i + \kappa j} 3^{\lambda i + \lambda j} 5^{\mu i + \mu j}$ είναι τέλειο τετράγωνο, αν και μόνο αν οι αριθμοί κi, κj (αντιστ. λi, λj και μi, μj) είναι ταυτόχρονα άριτοι οι περιττοί.

Η κάθε τριάδα $(\kappa_\nu, \lambda_\nu, \mu_\nu)$ ανήκει στο σύνολο Μ που περιέχει στοιχεία τις τριάδες με στοιχεία 0, 1 δηλ. Τα υπόλοιπα διαιρέσεων των $\kappa_\nu, \lambda_\nu, \mu_\nu$ με τον 2. Άρα ο πληθαριθμος του Μ είναι $2_2 = 8$, επομένως κάθε 9 στοιχεία από τους δοσμένους 81 φυσικούς θα υπάρχουν δύο τριάδες $(\kappa_i, \lambda_i, \mu_i)$, $(\kappa_j, \lambda_j, \mu_j)$ με τα ίδια ακριβώς στοιχεία, οπότε οι αριθμοί κi + κj, λi + λj, μi + μj είναι άρτιοι και συνεπώς το γινόμενο α_i, α_j τέλειο τετράγωνο.

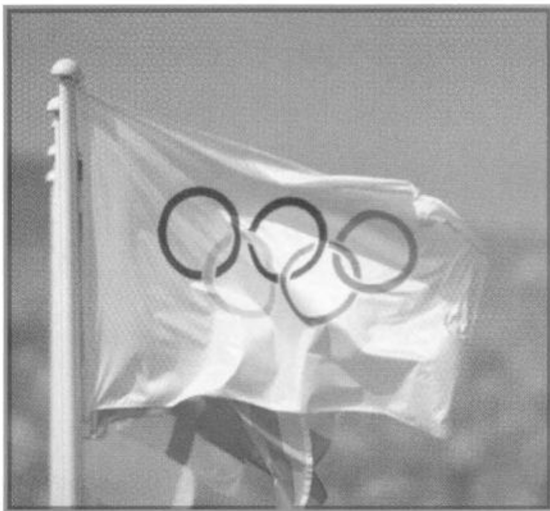
Ο αριθμός α_i, α_j έχει τη μορφή $2^{\kappa n} 3^{\lambda n} 5^{\mu n}$, όπου $\kappa_n = \kappa_i + \kappa_j$, $\lambda_n = \lambda_i + \lambda_j$, $\mu_n = \mu_i + \mu_j$. Τα υπόλοιπα των κ_n, λ_n, μ_n me 4. Ο πληθάριθμος M_1 είναι $2^3 = 8$, επομένως κάθε 9 γινόμενα α_i, α_j θα υπάρχουν δύο ζεύγη α_{i_1}, α_{j_2} και α_{i_2}, α_{j_2} που θα είναι ισουπόλοιπα ως προς 4(0 ή 2), άρα το άθροισμα τους είναι πολ. Του 4.

4. Το f(1) μπορεί να πάρει 2 τιμές 1995 ή 1996. Το F(2) μπορεί να πάρει 2 τιμές, 1995 ή 1996. Συνεχίζοντας μπορούμε να πούμε πως και το f(ν − 1) μπορεί να πάρει 2 τιμές, 1995 ή 1996.

Για κάθε (ν − 1)άδα όμως το f(ν) μπορεί να πάρει μόνο 1 τιμή γιατί αν το άθροισμα, f(1) + ... + f(ν − 1) είναι περιττός τότε για να είναι το άθροισμα f(1) + f(2) + ... + f(ν) = 1996. Αντίστοιχα αν το άθροισμα f(1) + ... + f(ν − 1) είναι άρτιος για να είναι το άθροισμα f(1) + ... + f(ν) περιττός το f(ν) πρέπει να είναι περιττός δηλ. F(ν) = 1995. Άρα το πλήθος όλων αυτών των συναρτήσεων είναι: $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{n-1} \cdot 1 = 2^{\nu - 1}$.

(Η λύση είναι του μαθητή Π. **Μπρέγιαννη**)

Πολύ καλή λύση έδωσε και ο μαθητής Ε. Σηράκης.



Στήλη Μαθηματικών Ολυμπιάδων

Εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών

Δ. Γ. Κοντογιάννη

Αφορμή για το άρθρο αυτό, στάθηκε ένα πρόβλημα που προτάθηκε στον φετεινό διαγωνισμό «ΘΑΛΗ» για την Γ΄ Λυκείου. Το πρόβλημα πρότεινε ο περισινός Ολυμπιονίκης και νυν φοιτητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ Σ. Ράππος. Η λύση που έδωσε ο προτείνων την άσκηση είναι εξαιρετικά απλή και συμβατή με το μαθησιακό επίπεδο των διαγωνιζομένων.

Εδώ θα δώσουμε μια γενική λύση του προβλήματος και με την ευκαιρία αυτή, θα παραθέσουμε σε γενικές γραμμές τον τρόπο επίλυσης των Εξισώσεων Πεπερασμένων Διαφορών (ΕΠΔ).

Οι ΕΠΔ έχουν πολλά κοινά σημεία με τις Διαφορικές Εξισώσεις και ουσιαστικά ταυτίζονται με τις Αναδρομικές ακολουθίες, τις οποίες εισήγαγαν οι A. Moivre, J. Bernoulli, L. Euler, ο οποίος το 1748 έγραψε και σχετικό σύγγραμμα. Οι ΕΠΔ χρησιμοποιούνται σε πολλούς κλάδους των σύγχρονων Μαθηματικών, όπως π.χ. τη Θεωρία Αριθμών, τη Θεωρία Πιθανοτήτων, την Κατασκευαστική Θεωρία συναρτήσεων ακόμα και σε πολύ προχωρημένα θέματα της Μαθηματικής Λογικής.

Στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι γνωστά τα παρακάτω παραδείγματα ΕΠΔ:

(α) $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$, που έχει λύση την αριθμητική πρόοδο: $f(x) = f(1) + (x-1)d$.

(β) Το γινόμενο των ν πρώτων μη μηδενικών φυσικών αριθμών $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \nu = \nu!$ (ν παραγοντικό) εκφράζεται με τη συνάρτηση $f(\nu) = \nu!$ και είναι λύση της ΕΠΔ $f(\nu+1) - (\nu+1)f(\nu) = 0$.

(γ) Το άθροισμα $1 + 2 + \ldots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} = f(\nu)$ ορίζει συνάρτηση, που είναι λύση της ΕΠΔ: $f(\nu+1) - f(\nu) = \nu + 1$.

(δ) Οι αριθμοί Fibonacci ορίζουν ακολουθία 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … που ικανοποιεί την ΕΠΔ: $f(\nu+2) - f(\nu+1) - f(\nu) = 0$ κ.λ.π.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με μερικά παραδείγματα.

1. Ορισμοί

Εστω το πρόβλημα: Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$F(x+2) + 15F(x) = 8F(x+1) \quad (1),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) αποτελεί όπως λέμε μια **συναρτησιακή εξίσωση**, στην οποία ζητάμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση f(x), με μεταβλητή x που ικανοποιεί την (1) .

Η (1) όμως είναι και μια **Εξίσωση Πεπερασμένων Διαφορών** (ΕΠΔ), στην οποία ζητάμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση f(x) που ικανοποιεί την (1).

Η (1) είναι ΕΠΔ γιατί εκτός από την F(x), περιέχει και τις F(x + 1), F(x + 2).

Ακόμα η (1) είναι **γραμμική**, γιατί η $F(x+2) - 8F(x+1) + 15F(x) = 0$ (2), είναι μια γραμμική σχέση ανάμεσα στους F(x + 2), F(x + 1), F(x).

Οι συντελεστές 1, 15, −8 των όρων της (1),

ονομάζονται συντελεστές της εξίσωσης.

Η (1) ονομάζεται **ομογενής**, γιατί το (β) μέλος της (2) είναι το 0.

Τέλος η (1) ονομάζεται ΕΠΔ **τάξεως 2**, γιατί $(x+2)-x=2$.

Ώστε η (1) είναι μια ομογενής, γραμμική, ΕΠΔ τάξεως 2.

2. Επίλυση της ομογενούς γραμμικής ΕΠΔ τάξεως 2.

Έστω η ΕΠΔ:

$F(x+2)-8F(x+1)+15F(x)=0$ (2).

Παρατηρούμε ότι η $f(x)=3^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την (2). Πράγματι:

$3^{x+2}-8\cdot 3^{x+1}+15\cdot 3^x=3^x(9-24+15)=0$.

Η συνάρτηση $f(x)=3^x$, ονομάζεται **μερική λύση** της (2).

Έχει η (2) και άλλη μερική λύση; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καταφατική. Πράγματι η $g(x)=5^x$, είναι λύση της (2), αφού $5^{x+2}-8\cdot 5^{x+1}+15\cdot 5^x=5^x(25-40+15)=0$.

Έχει η (2) άλλες μερικές λύσεις; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό όπως θα διαπιστώσουμε είναι καταφατική, π.χ. $\alpha\cdot f(x)$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ κ.λ.π.

2.1. Θεώρημα

Έστω $\alpha_1F(x+2)+\alpha_2F(x+1)+\alpha_3F(x)=0$ (3) με $\alpha_2 \neq 0$ μια ΕΠΔ με μερικές λύσεις $f(x)$, $g(x)$. Τότε η συνάρτηση $h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ αποτελεί μια λύση της (3) ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Απόδειξη

Πράγματι: $\alpha_1[\alpha f(x+2)+\beta g(x+2)]+$
$+\ \alpha_2[\alpha f(x+1)+\beta g(x+1)]+$
$+\ \alpha_3[\alpha f(x)+\beta g(x)]=$
$=\ \alpha[\alpha_1 f(x+2)+\alpha_2 f(x+1)+\alpha_3 f(x)]+$
$+\ \beta[\alpha_1 g(x+2)+\alpha_2 g(x+1)+\alpha_3 g(x)]=$
$=\ \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0.$

2.2. Ορισμός

Θα ονομάζουμε γενική λύση μιας γραμμικής ομογενούς ΕΠΔ τάξης 2, μια συνάρτηση $h(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$ όπου $f(x)$, $g(x)$ λύσεις της ΕΠΔ και:

$$C(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(x+1) & g(x+1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Η $C(x)\neq 0$ ονομάζεται συνθήκη **Casorati.**

3. Αρχικές συνθήκες μιας ΕΠΔ.

Έστω το πρόβλημα: Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί την ΕΠΔ $F(x+2)+\alpha F(x+1)+\beta F(x)=0$ με $\beta \neq 0$, για την οποία $f(0)=\gamma$, $f(1)=\delta$.

Οι ισότητες $f(0)=\gamma$, $f(1)=\delta$ ονομάζονται **αρχικές συνθήκες.**

Αν υποθέσουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει, τότε:

$f(x+2)=-\alpha f(x+1)-\beta f(x)$, οπότε

$f(2)=-\alpha f(1)-\beta f(0)=-\alpha\delta-\beta\gamma$,

$f(3)=-\alpha f(2)-\beta f(1)=\alpha(\alpha\delta+\beta\gamma)-\beta\delta$,

κ.λ.π.

Δηλαδή, η συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες και λαμβάνεται από μια τέτοια διαδικασία, είναι λύση της ΕΠΔ.

4. Εύρεση μερικών λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής ΕΠΔ.

Έστω η ομογενής γραμμική ΕΠΔ:

$F(x+2)+\alpha F(x+1)+\beta F(x)=0$ (4)

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θα εξετάσουμε αν η (4) έχει μια λύση της μορφής $f(x)=\kappa^x$ ($\kappa \in \mathbb{R}^*$).

Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε την εξίσωση $\kappa^{x+2}+\alpha\kappa^{x+1}+\beta\kappa^x=0$ (5), την οποία ονομάζουμε χαρακτηριστική εξίσωση της (4) και τη λύνουμε:

Είναι $\kappa^x(\kappa^2+\alpha\kappa+\beta)=0 \Rightarrow$

$\kappa^2+\alpha\kappa+\beta=0$ (6).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\Delta>0$. Τότε $\kappa_{1,2}=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$.

Ωστε υπάρχουν λύσεις κ_1^x, κ_2^x της ΕΠΔ.

Έτσι π.χ. η ΕΠΔ $F(x+2)-8F(x+1)+15F(x)=0$ (7), έχει χαρακτηριστική εξίσωση:

$\kappa^2-8\kappa+15=0$ (8),

οπότε $\kappa_1=\dfrac{8+2}{2}=5$, $\kappa_2=3$ και μερικές λύσεις $f(x)=5^x$, $g(x)=3^x$.

Οι $f(x)$, $g(x)$ ικανοποιούν τη συνθήκη Casorati.

Πράγματι $C(x)=\begin{vmatrix} 5^x & 3^x \\ 5^{x+1} & 3^{x+1} \end{vmatrix}=$

$15^x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 15^x\neq 0$,

άρα η (7) έχει γενική λύση $\Phi(x)=c_1f(x)+c_2g(x)$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

ii) $\Delta<0$. Τότε $\kappa_{1,2}=\dfrac{-\alpha\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$ ή $\kappa_1=\rho+iq$

$\kappa_2 = p - iq, (p, q \in \mathbb{R})$.

Τις λύσεις αυτές μπορούμε να τις εκφράσουμε και σε τριγωνομετρική μορφή.

Έστω π.χ. ότι $\kappa_1 = R(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, $\kappa_2 = R(\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta)$.

Τότε η ΕΠΔ έχει λύσεις:

$\kappa_1^x = R^x(\text{συν}x\theta + i\text{ημ}x\theta)$, $\kappa_2^x = R^x(\text{συν}x\theta - i\text{ημ}x\theta)$.

Θέτουμε: $f(x) = \dfrac{\kappa_1^x + \kappa_2^x}{2} = R^x\text{συν}x\theta$, $g(x) = \dfrac{\kappa_1^x - \kappa_2^x}{2} = R^x\text{ημ}x\theta$.

Παρατηρούμε ότι: $C(x) =$

$$\begin{vmatrix} R^x\text{συν}x\theta & R^x\text{ημ}x\theta \\ R^{x+1}\text{συν}(x+1)\theta & R^{x+1}\text{ημ}(x+1)\theta \end{vmatrix} = R^{2x+1}\text{ημ}\theta \neq 0.$$

Επομένως η ΕΠΔ έχει γενική λύση:

$\Phi(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$.

Έτσι π.χ. η ΕΠΔ: $F(x+2) + F(x+1) + F(x) = 0$ (8),

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\kappa^2 + \kappa + 1 = 0$,

οπότε $\kappa_1 = \text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}$, $\kappa_2 = \text{συν}\frac{\pi}{3} - i\text{ημ}\frac{\pi}{3}$,

και άρα $\Phi(x) = c_1\, \text{συν}\frac{2\pi x}{3} + c_2\, \text{ημ}\frac{2\pi x}{3}$,

είναι μια λύση της (8).

iii) $\Delta = 0$. Τότε $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ και $\Phi(x) = c_1\kappa^x + c_2 x\kappa^x$.

Έτσι π.χ. η ΕΠΔ:

$F(x+2) - 8F(x+1) + 16\,F(x) = 0$ (9),

έχει χαρακτηριστική εξίσωση: $\kappa^2 - 8\kappa + 16 = 0 \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = 4$,

οπότε η $\Phi(x) = c_1 4^x + c_2 x 4^x$, είναι μια λύση της (9).

5. Μη ομογενείς γραμμικές ΕΠΔ τάξεως 2

Έστω η μη ομογενής γραμμική ΕΠΔ τάξεως 2: $F(x+2) + \alpha F(x+1) + \beta F(x) = G(x)$ (10).

Για τις λύσεις της (10) ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

5.1. Θεώρημα

Μια γενική λύση της (10) είναι άθροισμα:

α) μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς ΕΠΔ (10) και

β) μιας γενικής λύσης της ομογενούς ΕΠΔ:

$F(x+2) + \alpha F(x+1) + \beta F(x) = 0$ (11).

Ώστε αν $\varphi(x)$ είναι μια μερική λύση της (10) και $f(x)$, $g(x)$ είναι λύση της (11) με:

$$C(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(x+1) & g(x+1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

τότε η (10) έχει γενική λύση: $\Phi(x) = \varphi(x) + c_1 f(x) + c_2 g(x)$.

Για τις μερικές λύσεις της (10) ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

5.2. Θεώρημα

Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι μερικές λύσεις των ΕΠΔ:

$F(x+2) + \alpha F(x+1) + \beta F(x) = G_1(x)$ και

$F(x+2) + \alpha F(x+1) + \beta F(x) = G_2(x)$

αντίστοιχα, τότε η $f(x) + g(x)$ είναι μερική λύση της ΕΠΔ:

$F(x+2) + \alpha F(x+1) + \beta F(x) = G_1(x) + G_2(x)$.

13η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα
Ρουμανία— Bacau
28/4 έως 3/5 1996

Επιμέλεια: Β.Ε. Βισκαδουράκης

Οπως θα ξέρουν οι αναγνώστες του «Ευκλείδη Β΄» κάθε χρόνο, την άνοιξη, διοργανώνεται εδώ και 13 χρόνια η «Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα».

Την περασμένη χρονιά (1996) διοργανώτρια χώρα ήταν η Ρουμανία, η οποία και ανταποκρίθηκε αρκετά καλά στις υποχρεώσεις που απορρέουν από μια τέτοια διοργάνωση. Κάποιες πάντως «απροσεξίες» σχετικά με τη συμμετοχή των Σκοπιανών γειτόνων μας ως «Macedonia» θα μπορούσαν να έχουν αποφευχθεί. Τελικά με τη παρέμβαση της Ελληνικής αντιπροσωπείας οι παραλείψεις και απροσεξίες διορθώθηκαν ...

Την ομάδα των διαγωνιζομένων μαθητών μας αποτέλεσαν οι:

Αλεξάκης Σπύρος (Γ΄ Λυκείου)

Δημητρομανωλάκης Απόστολος (Γ΄ Λυκείου)

Μαλικιώσης Ρωμανός – Διογένης (Α΄ Λυκείου)

Μιχαλάκης Σπύρος (Α΄ Λυκείου)

Μπρέγιαννης Πέτρος (Α΄ Λυκείου)

Τάκος Γιώργος (Γ΄ Λυκείου)

Η χώρα μας κατέλαβε την 6η θέση με 74 βαθμούς, κερδίζοντας τρία χάλκινα μετάλλια (Αλεξάκης, Μαλικιώσης και Μπρέγιαννης)

Οι υπόλοιπες χώρες κατετάγησαν ως εξής:

- Πρώτη η Ρουμανία με 220 βαθμούς (3 χρυσά και 3 ασημένια)
- Δεύτερη η Βουλγαρία με 202 βαθμούς (1 χρυσό και 5 ασημένια)
- Τρίτη η Τουρκία με 141 βαθμούς (2 ασημένια και 4 χάλκινα)
- Τέταρτη η Γιουγκοσλαβία με 137 βαθμούς (1 χρυσό, 1 ασημένιο και 4 χάλκινα)
- Πέμπτη η Μολδαβία με 121 βαθμούς (1 χρυσό, 3 ασημένια)
- Έβδομη τα «Σκόπια» με 68 βαθμούς (2 χάλκινα)
- Ογδοη η Κύπρος με 45 βαθμούς (1 χάλκινο)
- Ένατη η Αλβανία με 42 βαθμούς (1 χάλκινο)

Ο Διαγωνισμός διεξήχθει σε ένα ιστορικό Λύκειο του Bacau (το «George Bacovia») την Τρίτη 30 Απριλίου με διάρκει 4,5 ώρες. (9.30π.μ. – 2.00μ.μ.) Οι διαγωνιζόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν στα παρακάτω θέματα (όλα ισοδύναμα βαθμολογικά):

1) Έστω O, G το περίκεντρο και το κέντρο βάρους τριγώνου ABC αντίστοιχα. Αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC, να αποδείξετε ότι $OG \leqslant \sqrt{R(R-2r)}$. (Ελλάδα)

2) Έστω $p > 5$ πρώτος αριθμός και X το σύνολο των αριθμών της μορφής $p - n^2$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $n^2 < p$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο X περιέχει δύο διαφορετικούς αριθμούς x, y με $x \neq 1$, $y \neq 1$ τέτοιους ώστε ο y να διαιρεί το x. (Αλβανία)

3) Έστω ABCDE κυρτό 5-γωνο και M, N, P, Q, R τα μέσα των πλευρών AB, BC, CD, DE, EA αντίστοιχα. Αν τα τμήματα AP, BQ, CR, DM περνούν από το ίδιο σημείο O, να αποδείξετε ότι και το EN διέρχεται από το O. (Γιουγκοσλαβία)

4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει υποσύνολο A του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $1 \in A$ και $2^{1996} - 1 \in A$.)

β) Κάθε στοιχείο του $A - \{1\}$ είναι το άθροισμα δύο στοιχείων του A (όχι απαραίτητα διαφορετικών).

γ) Ο αριθμός των στοιχείων του A δε ξεπερνά τον 2012. (Ρουμανία)

(Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες)

Λύσεις των θεμάτων

1) Από τη γνωστή σχέση (θεώρημα) Leibniz's: $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

Η ζητούμενη ανισότητα ισοδύναμα μετασχηματίζεται:

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant 18Rr$ ή $(\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geqslant 9\alpha\beta\gamma$ (*)

Αλλά $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2}$ και η (*) είναι προφανής.
Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$ δηλ. αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

2) (i) Αν $1 \in X$ τότε $p = n^2 + 1$ όπου n είναι άρτιος. Έτσι $p - (n - 1)^2 = n^2 + 1 - (n - 1)^2 = 2n$ όπου $n^2 = p - 1^2$ και $x = p - (n - 1)^2$ και $y = p - 1^2$ ικανοποιούν το ζητούμενο.

(ii) Αν $1 \notin X$, έστω $n = [\sqrt{p}]$. Τότε $n^2 + 1 < p < (n + 1)^2$. Θέτοντας $x = p - n^2$, και αφού p πρώτος, έχουμε: $p < n^2 + 2n$ και $p \neq n^2 + n$. Άρα $x - n \neq 0$ και $0 < x < 2n$ απ' όπου έχουμε: $0 < |x - n| < n$. Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε $y = p - (x - n)^2 \in X$ και θα έχουμε: $y = p - n^2 + 2nx - x^2 = x + 2nx - x^2 = x(1 + 2n - x)$ άρα ο x διαιρεί τον y.

3) Λύση Α΄

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι ένα σημείο O ανήκει στη διάμεσο XX΄ ενός τριγώνου XYZ αν και μόνο αν: $(X\hat{O}Y) = (X\hat{O}Z)$ και O εσωτερικό σημείο του $X\hat{Y}Z$.

Έστω τώρα O το σημείο τομής των AP, BQ, CR και DM. Τότε:

$$(B\hat{O}E) = (B\hat{O}D) = (A\hat{O}D) = (A\hat{O}C) = (C\hat{O}E).$$

Επίσης $O \in (CR)$ άρα O εσωτερικό της $B\hat{C}E$ και $O \in (BQ)$ άρα εσωτερικό της $E\hat{B}C$, άρα το O εσωτερικό σημείο του $B\hat{C}E$.

Λύση Β΄

Θεωρώντας το O σαν αρχή του μιγαδικού επιπέδου συμβολίζουμε με μικρά γράμματα τους μιγαδικούς που αντιστοιχούν στα σημεία. Η υπόθεση τότε δίνει(*):

$\frac{c+d}{2\alpha}, \frac{d+e}{2b}, \frac{e+\alpha}{2c}, \frac{\alpha+b}{2d} \in \mathbb{R}$ το οποίο είναι ισοδύναμο με:

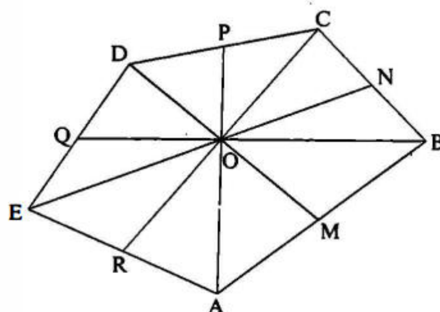
$c\bar{\alpha} + d\bar{\alpha}, d\bar{b} + e\bar{b}, e\bar{c} + a\bar{c}, a\bar{d} + b\bar{d} \in \mathbb{R}$.

Προσθέτοντας έχουμε:

$(e\bar{b} + e\bar{c}) + (c\bar{\alpha} + \alpha\bar{c}) + (d\bar{\alpha} + \alpha\bar{d}) + (b\bar{d} + d\bar{b}) \in \mathbb{R}$

απ' όπου έπεται: $(e\bar{b} + e\bar{c}) \in \mathbb{R}$ δηλ. $\frac{b+c}{2e} \in \mathbb{R}$.

(*)Αν στο C είναι ο μιγαδικός αριθμός c, στο D ο d τότε στο P είναι ο $\frac{c+d}{2}$, οπότε αν στο A είναι ο α, τότε η AP διέρχεται από το O αν και μόνο άν η διαφορά των ορισμάτων των α και $\frac{c+d}{2}$, είναι π. δηλ. αν και μόνο αν το πηλίκο $\frac{c+d}{2} : \alpha$ είναι πραγματικός αριθμός.



4) Για το θετικό ακέραιο n συμβολίζουμε με f(n) τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων ενός συνόλου A, $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ και που ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β). Θα δείξουμε ότι

$f(2^{1996}-1) \leqslant 2012$. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο αριθμός f(n) έχει τις εξής ιδιότητες:

i) $f(2^{n+1}-1) \leqslant f(2^n-1)+2$.

Άν $A \subset \{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β) και έχει $f(2^n-1)$ στοιχεία, τότε το $B = A \cup \{2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1\}$ είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1\}$ και ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β). Αυτό γιατί:

$2^{n+1}-2 = (2^n-1)+(2^n-1)$ και $2^{n+1}-1 = 1+(2^{n+1}-2)$

Έτσι: $f(2^{n+1}-1) \leqslant |B| = f(2^n-1)+1$

ii) $f(2^{2n}/-1) \leqslant f(2^n-1)+(n+1)$.

Άν $A \subset \{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β) και έχει $f(2^n-1)$ στοιχεία, τότε το $B = A \cup \{2(2^n-1), 2^2(2^n-1), \ldots, 2^n(2^n-1), 2^{2n}-1\}$είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 2^n-1\}$το οποίο ικανοποιεί την (α) γιατί:

$2^{j+1}(2^n-1) = 2^j(2^n-1)+2^j(2^n-1)$ για $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ και $2^{2n}-1 = 2^n(2^n-1)+(2^n-1)$

Άρα: $f(2^{2n}-1) \leqslant |B| = f(2^n-1)+(n+1)$

Τώρα προχωράμε στην εφαρμογή των δύο ιδιοτήτων του f(n) και έχουμε:

$f(2^{1996}-1) \leqslant f(2^{998}-1)+999$
$f(2^{998}-1) \leqslant f(2^{499}-1)+500$
$f(2^{499}-1) \leqslant f(2^{498}-1)+2$
$f(2^{498}-1) \leqslant f(2^{249}-1)+250$
$f(2^{249}-1) \leqslant f(2^{248}-1)+2$
$f(2^{248}-1) \leqslant f(2^{124}-1)+125$
$f(2^{124}-1) \leqslant f(2^{62}-1)+63$
$f(2^{62}-1) \leqslant f(2^{31}-1)+32$
$f(2^{31}-1) \leqslant f(2^{30}-1)+2$
$f(2^{30}-1) \leqslant f(2^{15}-1)+16$
$f(2^{15}-1) \leqslant f(2^{14}-1)+2$
$f(2^{14}-1) \leqslant f(2^{7}-1)+8$
$f(2^{7}-1) \leqslant f(2^{6}-1)+2$
$f(2^{6}-1) \leqslant f(2^{3}-1)+4$
$f(2^{3}-1) = 5$

και προσθέτοντας όλες αυτές τις ανισότητες κατά μέλη έχουμε:

$$f(2^{1996}-1) \leqslant 2012.$$

Ας σημειωθεί ότι εφέτος (1997) και μάλιστα τη δεύτερη βδομάδα του Πάσχα, την 14η Β.Μ.Ο. διοργανώνει η χώρα μας.

Αναλυτική αναφορά στη σημαντική, (για την Ελληνική Μαθηματική και μαθητική κοινότητα), αυτή διοργάνωση, μπορείτε να βρείτε στον «Ευκλείδη Β΄» τη νέα σχολική χρονιά.

57ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά «Ο ΘΑΛΗΣ»

Σάββατο, 19 Οκτωβρίου 1996

Η Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Θέματα Α΄ Λυκείου

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Α η ορθή γωνία, έχουμε ΑΒ = 600m. Πάνω στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ = 150m. Να βρεθεί το μήκος ΓΔ αν είναι ΑΒ + ΑΔ = ΓΔ + ΒΓ.

2. Αν α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε την ανισότητα:
$(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 \le 4\beta^2\gamma^2$

3. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε ο $\nu^3 + 3\nu$ να είναι περιττός.
β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύει:
$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0$

4. Επτά πόλεις, οι A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, βρίσκονται, με αυτή τη διάταξη, πάνω σε μία ευθεία. Πού πρέπει να κτιστεί ένα εργοστάσιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις επτά πόλεις να είναι το ελάχιστο δυνατό;

Λύσεις

1. Αν θέσουμε ΓΔ = x, έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα ότι $ΒΓ^2 = 600^2 + (150 + x)^2$. Η δοθείσα σχέση δίνει $600 + 150 = x + [600^2 + (150 + x)^2]^{\frac{1}{2}}$, οπότε $750 - x = [600^2 + (150 + x)^2]^{\frac{1}{2}}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο καταλήγουμε σε μία πρωτοβάθμια εξίσωση που έχει λύση x = 100, οπότε ΓΔ = 100m.

2. Η παράσταση $4\beta^2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2$, ως διαφορά τετραγώνων, ισούται με την
$[2\beta\gamma + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)]\cdot[2\beta\gamma - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)]$ που με τη σειρά της γράφεται
$[(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2]\cdot[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2] = [(\beta + \gamma) - \alpha]\cdot[(\beta + \gamma) + \alpha]\cdot[\alpha - (\beta - \gamma)]\cdot[\alpha + (\beta - \gamma)] =$
$(\beta + \gamma - \alpha)\cdot(\beta + \gamma + \alpha)\cdot(\alpha - \beta + \gamma)\cdot(\alpha + \beta - \gamma)$.
Η τελευταία όμως είναι θετική ως γινόμενο θετικών όρων (από την τριγωνική ανισότητα που ισχύει εξυποθέσεως για τα α, β, γ). Άρα $4\beta^2\gamma^2 \ge (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2$.

3. α) Αφού $\nu^3 + 3\nu = \nu(\nu^2 + 3)$, παρατηρούμε ότι αν ν περιττός τότε $\nu^2 + 3$ άρτιος και άρα ο $\nu(\nu^2 + 3)$ επίσης άρτιος. Αν πάλι ν άρτιος τότε, όμοια, $\nu(\nu^2 + 3)$ άρτιος. Και στις δύο λοιπόν περιπτώσεις, ο $\nu^3 + 3\nu$ δεν είναι περιττός.
β) Η δοθείσα γράφεται $5(x^3 + 3x - 1) = 4y^2 + 6xy - 6y$. Από το πρώτο μέρος του θέματος, ο αριθμός $x^3 + 3x$ είναι άρτιος και άρα ο $x^3 + 3x - 1$, περιττός. Αλλά τότε βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεξί άρτιος, που μας οδηγεί σε άτοπο.

4. Αν Μ η θέση του εργοστασίου, ζητάμε να ελαχιστοποιηθεί η παράσταση
$A_1M + A_2M + A_3M + A_4M + A_5M + A_6M + A_7M$ που γράφεται και
$(A_1M + A_7M) + (A_2M + A_6M) + (A_3M + A_5M) + A_4M$.
Για οποιαδήποτε θέση του Μ μεταξύ των A_1 και A_7, η παράσταση $A_1M + A_7M$ δεν αλλάζει τιμή, ενώ αυξάνει αν το Μ είναι εκτός των A_1 και A_7. Συμβαίνει το ανάλογο για την $A_2M + A_6M$ και την $A_3M + A_5M$. Τα A_3, A_5 όμως είναι μεταξύ των A_2, A_6 που με τη σειρά τους είναι μεταξύ των A_1 και A_7, οπότε η $(A_1M + A_7M) + (A_2M + A_6M) + (A_3M + A_5M)$ δεν αλλάζει τιμή αν το Μ μεταξύ των A_3 και A_5, ενώ αυξάνει αν είναι εκτός τους. Επειδή το A_4 είναι μεταξύ των A_3 και A_5 και η A_4M ελαχιστοποιείται όταν το Μ βρίσκεται στο A_4, το εργοστάσιο πρέπει να κτιστεί στην πόλη A_4.

Θέματα Β΄ Λυκείου

1. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \le 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \le \gamma^2$.

2. Αν x και y ακέραιοι με $0 \le x \le 100, 0 \le y \le 100$, να λυθεί η εξίσωση:
$|x + y - 2| + |3x - 2y + 1| + 3x - 2y + 1 = 0$

3. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τέτοιο ώστε η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΔΕ και η ΑΕ προς τη ΒΓ. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α είναι παράλληλη προς τη ΓΔ.

4. Ένας δίσκος έχει χωριστεί σε 12 ίσους τομείς με ακτίνες που ξεκινούν από το κέντρο του. Στον κάθε ένα από τους δώδεκα τομείς τοποθετούμε ένα κέρμα. Κάνουμε τώρα την εξής κίνηση: μετακινούμε ένα οποιοδήποτε κέρμα από τη θέση του στον αμέσως επόμενο τομέα (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού) και συγχρόνως μετακινούμε ένα δεύτερο κέρμα από την θέση του στον αμέσως προηγούμενο τομέα.

Δείξτε ότι όποια διαδοχή κινήσεων και αν κάνουμε, δεν είναι δυνατό να έρθουν όλα τα κέρματα σε έναν και τον αυτό τομέα. Αντιθέτως δείξτε ότι αν οι τομείς ήσαν δεκατρείς, τότε με κατάλληλη επιλογή κινήσεων, μπορούμε να φέρουμε όλα τα κέρματα σε έναν τομέα.

Λύσεις

1. Πολλαπλασιάζοντας τη δοθείσα επί 2 και προσθαφαιρόντας γ^2, έπεται ότι:

$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \leq 0,$

από όπου το ζητούμενο, αφού η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι θετική ως τέλειο τετράγωνο.

2. Παρατηρούμε η εξίσωση είναι της μορφής $|A| + (|B| + B) = 0$ από όπου έπεται $|A| = 0 = |B| + B$ (ως άθροισμα θετικών). Άρα θα έχουμε $A = 0$ και $B \leq 0$, δηλαδή $x + y - 2 = 0$ και $3x - 2y + 1 \leq 0$. Οι ακέραιες λύσεις της πρώτης με $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$ είναι οι $(x = 0, y = 2)$, $(x = 1, y = 1)$ και $(x = 2, y = 0)$. Ελέγχοντας και την ανισότητα, οι δύο απορρίπτονται και μένει μόνο το διατεταγμένο ζεύγος $(x = 0, y = 2)$.

3. Αν Z η τομή των ΔΕ, ΒΓ, τότε το ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{E}\Delta = \omega$. Όμως τα ΑΒΓΔ, ΑΓΔΕ είναι εγγράψιμα στον κύκλο, άρα $A\widehat{\Delta}\Gamma = A\widehat{\Gamma}\Delta = 180° - \omega$. Αλλά και η $\Gamma\widehat{A}\varepsilon$ είναι $180° - \omega$, ως υπό χορδής και εφαπτομένης. Άρα ΓΔ // Αε, αφού σχηματίζονται δύο ίσες εντός εναλλάξ γωνίες.

4. Βαθμολογούμε τους τομείς με τους διαδοχικούς αριθμούς 1 έως 12, ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ονομάζουμε «βάρος» μιας κατάστασης, το άθροισμα των βαθμών των τομέων που έχουν μέσα τους κέρμα (λαμβάνοντας υπ' όψιν τις πολλαπλότητες). Έτσι το βάρος της αρχικής κατάστασης είναι $1 + 2 + \cdots + 12 = 78$, ενώ αν καταφέρναμε να μαζεύαμε όλα τα κέρματα σε έναν τομέα, το βάρος θα ήταν ένα πολλαπλάσιο του 12 (δώδεκα επί το βαθμό αυτού του τομέα). Παρατηρούμε όμως ότι κάθε φορά που κάνουμε την επιτρεπτή κίνηση της ταυτόχρονης μεταφοράς δύο κερμάτων σε γειτονικούς τομείς, το βάρος της κατάστασης αλλάζει κατά $(+1 - 1)$ ή κατά $(+1 + 11)$ ή κατά $(-1 - 11)$. Π.χ. αν πάμε το κέρμα του τομέα 3 στον 4, και αυτό του τομέα 1 στον 12, το βάρος αλλάζει κατά $(+1 + 11)$ (όμοια οι άλλες περιπτώσεις). Πάντως το βάρος αλλάζει κάθε φορά κατά πολλαπλάσιο του 12: είναι είτε 0 είτε ± 12. Αφού το βάρος της αρχικής κατάστασης δεν είναι πολλαπλάσιο του 12, ενώ της επιζητούμενης τελικής είναι, *δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί η συσσώρευση όλων των κερμάτων σε ένα τομέα.* Ο ίδιος συλλογισμός ισχύει για οποιοδήποτε άρτιο πλήθος τομέων. Αντιθέτως στην περίπτωση του περιττού πλήθους είναι πολύ απλό να φέρουμε όλα τα κέρματα μαζί.

Θέματα Γ΄ Λυκείου

1. Έστω Α ένας μη μηδενικός $\nu \times \nu$ πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός $\nu \times \nu$ πίνακας Β με $(AB)^2 = (AB)$.

2. Δίνεται ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορσμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ικανοποιεί τη συνθήκη $999f(\pi - x) + 998f(x - \pi) = 1996\text{συν}x$. Δείξτε ότι ικανοποιεί και την

$$f^2(\pi + x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1996}{1997}\right)^2.$$

3. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ της προέκτασης της ΑΓ ώστε ΑΓ = ΒΖ = ΔΖ. Αν Ε το συμμετρικό του Ζ ως προς το Γ, να υπολογιστεί η γωνία ΓΒΕ.

4. Δίνονται στο επίπεδο m + n σημεία μη συνευθειακά ανά τρία, όπου m, n μεγαλύτερα ή ίσα του 3. Τα m σημεία είναι χρωματισμένα κόκκινα και n είναι χρωματισμένα μπλε.
   (i) Δείξτε ότι αν m = n, τότε υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:
   α) κάθε σημείο να ανήκει σε ακριβώς τρία ευθύγραμμα τμήματα,
   β) τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος να είναι διαφορετικού χρώματος.
   (ii) Δείξτε ότι, αντίστροφα, αν υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες α) και β), τότε m = n.

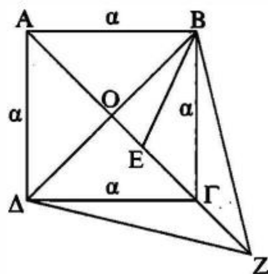
Λύσεις

1. Η ιδέα είναι, αν ένας $\nu \times \nu$ πίνακας $C = (c_{ij})$ έχει όλα τα στοιχεία του 0 εκτός από αυτά μιας συγκεκριμένης στήλης n (όπου $1 \le n \le \nu$), και αν το $c_{nn} = 1$, τότε $C^2 = C$. Οπότε προσπαθούμε να βρούμε $\nu \times \nu$ πίνακα Β τέτοιο ώστε ο ΑΒ να είναι πίνακας μορφής του C. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής:

Αφού ο πίνακας Α είναι μη μηδενικός, υπάρχει στοιχείο του α_{mn} διαφορετικό από το μηδέν. Ορίζουμε Β τον πίνακα που έχει το στοιχείο $\frac{1}{\alpha_{mn}}$ στη n γραμμή και m στήλη, και με μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις. Με απλό έλεγχο φαίνεται ότι ο ΑΒ είναι όπως ζητείται.

2. Θέτοντας $2\pi - x$ στη θέση του x παίρνουμε μια δεύτερη σχέση, την
$999f(x-\pi) + 998f(\pi - x) = 1996\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = 1996\sigma\upsilon\nu x$.
Λύνοντας το σύστημα των δύο σχέσεων, βρίσκουμε $f(\pi - x) = \left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu x$, οπότε
$f(x) = \left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu x$. Είναι λοιπόν $f(\pi + x) = -\left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = \left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu x$
και $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\left(\frac{1996}{1997}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1996}{1997}\right)\eta\mu x$.
Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας, έπεται το ζητούμενο.

3. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να αποδειχθεί ότι η γωνία ΓΒΕ είναι 30°. Π.χ. το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισόπλευρο, οπότε $BZ = \alpha\cdot\sqrt{2}$ και $\Delta\widehat{B}Z = 60°$. Αλλά τότε $OZ = \alpha\frac{\sqrt{6}}{2}$. Άρα $E\Gamma = \Gamma Z = OZ - O\Gamma = \alpha\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$. Έτσι υπολογίζονται εύκολα οι ΟΕ και ΒΕ (με χρήση Πυθαγορείου θεωρήματος), και αποδεικνύεται ότι $BE^2 = 2\Gamma Z^2$. Με άλλα λόγια ΒΕ : ΕΓ = ΕΖ : ΒΕ, οπότε τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΕΖ είναι όμοια. Άρα $E\widehat{B}\Gamma = B\widehat{Z}E = 30°$.



(Άλλος τρόπος θα ήταν με χρήση του θεωρήματος των διαμέσων στο τρίγωνο ΕΒΖ, με διάμεσο την ΒΓ).

4. α) Αν τα κόκκινα σημεία είναι τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ και τα μπλε τα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ (εδώ m= n) συνδέουμε το α_k (για $1 \le k \le m$) με τα β_k, β_{k+1} και β_{k+2} (όπου με β_{m+1} και β_{m+2} εννοούμε τα β_1 και β_2 αντίστοιχα). Είναι προφανές ότι τα μπλε σημεία είναι και αυτά συνδεδεμένα με ακριβώς τρία κόκκινα: το β_{k+2} είναι συνδεδεμένο με τα α_k, α_{k+1} και α_{k+2}.

β) Αντίστροφα, τα κόκκινα σημεία ορίζουν 3m ευθύγραμμα τμήματα. Τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα έχουν ως άλλο άκρο μπλε σημεία. Υπάρχουν όμως 3n ευθύγραμμα τμήματα με μπλε άκρο, οπότε 3m = 3n, δηλαδή m = n.



57ος Πανελλήνιος Μαθηματικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά ο "Ευκλείδης"

Σάββατό, 14 Δεκεμβρίου 1996

Θέματα Α΄ Τάξης Λυκείου

1. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν τη σχέση $x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0$, να αποδείξετε ότι $x > y$.

2. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ του επιπέδου, όπου το Γ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου με διάμετρο ΑΒ. Ευθεία (ε) που διέρχεται από το Γ στρέφεται ώστε να μη διέρχεται από σημείο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ. Αν Α΄, Β΄ οι προβολές των Α, Β επί της (ε), να βρεθεί η θέση της (ε) για την οποία το άθροισμα (ΑΑ΄) + (ΒΒ΄) γίνεται μέγιστο.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 4x - 19^{96} - 96^{19} - 1992 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

4. Έστω α, β, γ, δ τέσσερις ακέραιοι στη διάταξη

α	β
γ	δ

Στη διάταξη αυτή κάνουμε την εξής κίνηση: Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής, είτε προσθέτουμε ένα ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης. Δείξτε ότι από την αρχική διάταξη μπορούμε να καταλήξουμε στην:

0	0
0	0

(όλα τα στοιχεία 0) αν και μόνον αν ισχύει $α + δ = β + γ$.

Θέματα Β΄ Τάξης Λυκείου

1. Το ίδιο με το θέμα 4 της Α΄ Λυκείου.

2. Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων αριθμών το σύστημα:

$$(Σ)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 155 \\ x + y + z = 21 \end{cases}$$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο. Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο Γ η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε επίσης τη διχοτόμο της $\widehat{ΑΕΓ}$ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ, καθώς και την ΒΖ η οποία τέμνει τον κύκλο στο Κ και τη ΓΕ στο Λ. Να δείξετε ότι: $\frac{ΚΖ}{ΚΛ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ} \cdot \frac{ΕΒ}{ΕΛ}$.

4. Έστω το σύνολο $Α = \{α_1, α_2, \ldots, α_n\}$ με $α_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Αν για κάθε i, j υπάρχει δείκτης κ, ($1 \leqslant i, j, κ \leqslant n$) έτσι ώστε $α_κ = \frac{1}{2}|α_i - α_j|$, τότε να δείξετε ότι όλα τα στοιχεία του Α είναι μηδενικά.

Θέματα Γ΄ Τάξης Λυκείου

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα (x, y) που ικανοποιούν τη σχέση: $4x^3 + 4x^2y - 12x^2 = y^3 + xy^2 - 3y^2$.

2. Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο C. Αν η διχοτόμος της $\widehat{Α}$ τέμνει τη ΒΓ στο Δ και τον C στο Κ και οι εγγεγραμμένοι κύκλοι ΒΔΚ, ΚΔΓ είναι ίσοι να δειχτεί ότι το $Α\widehat{Β}Γ$ είναι ισοσκελές.

3. Το ίδιο με το θέμα 4 της Β΄ Λυκείου.

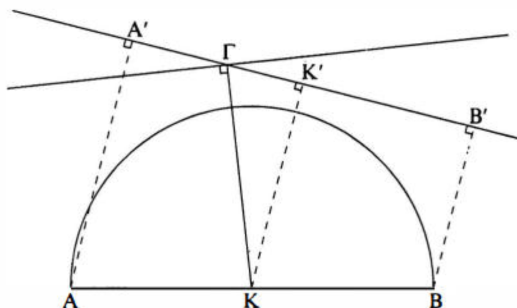
4. Έστω η γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ και $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant n_0$ ισχύει: f(n) διαιρεί το n, να προσδιοριστεί η συνάρτηση f.

Λύσεις

Α΄ Λυκείου

1. Η δοσμένη σχέση γράφεται $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$, άρα $(x-2)^2 \leqslant 9$ και $(y+5)^2 \leqslant 9$ οπότε $|x-2| \leqslant 3$ και $|y+5| \leqslant 3$. Έτσι έχουμε $-3 \leqslant x - 2$ και $y + 5 \leqslant 3$ δηλαδή $x \geqslant -1$ και $y \leqslant -2$ άρα $y \leqslant -2 < 1 \leqslant x$.

2. Θεωρούμε το κέντρο Κ του ημικυκλίου και την προβολή Κ΄ του Κ επί της ε. Στο τραπέζιο ΑΑ΄Β΄Β, η ΚΚ΄ είναι διάμεσος, άρα (ΑΑ΄) + (ΒΒ΄) = 2(ΚΚ΄). Επομένως αρκεί να προσδιορίσουμε τη θέση της ε για την οποία το (ΚΚ΄) είναι μέγιστο. Αλλά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΚ΄Γ έχουμε (ΚΓ) > (ΚΚ΄) αν Κ΄ ≢ Γ, ενώ (ΚΓ) = (ΚΚ΄) αν Κ΄ ≡ Γ. Επομένως η θέση της ζητούμενης είναι εκείνη για την οποία ε ⊥ ΓΚ.



3. Η δοσμένη γράφεται: $(x-2)^2 = 19^{96} + 96^{19} + 1996$. Αλλά η δεκαδική παράσταση του 19^{96} λήγει σε 1, του 96^{19} λήγει σε 6 και ο 1996 λήγει επίσης σε 6. Άρα ο αριθμός $19^{96} + 96^{19} + 1996$ λήγει σε 3. Όμως το τετράγωνο ενός ακεραίου δεν λήγει ποτέ σε 3 (απλό), οπότε η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

4. Οι κινήσεις που επιτρέπονται μας δίνουν διατάξεις της μορφής:

$α - ε - ζ$	$β - ε - θ$
$γ - ζ - η$	$δ - η - θ$

όπου ε, ζ, η, θ ακέραιοι.
Για να καταλήξουμε λοιπόν στη διάταξη με μηδενικά, θα έχουμε:

(*) $\left\{\begin{array}{l} ε + ζ = α \\ η + θ = δ \end{array}\right\}$ και $\left\{\begin{array}{l} ε + θ = β \\ ζ + η = γ \end{array}\right\}$ και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$α + δ = ε + ζ + η + θ = β + γ$ άρα $α + δ = β + γ$.
Αντίστροφα, αν $α + δ = β + γ$ τότε π.χ. η $ε = α$, $ζ = 0$, $η = γ$, $θ = β - α$ είναι λύση των συστημάτων (*). Οπότε είναι προφανές πως από την αρχική διάταξη καταλήγουμε στην τελική.

Β΄ Λυκείου

1. Βλέπε θέμα 4) της Α΄ Λυκείου.

2. Έχουμε: (ΙΙ) $x + y + z = 21$ άρα $(x + y + z)^2 = 21^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 441 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 143$ (ΙΙΙ)

Αφού $x^2 + y^2 + z^2 = 155$ (Ι) έχουμε $x^2 \leqslant 155$, $y^2 \leqslant 155$ και $z^2 \leqslant 155$ άρα $|x|, |y|, |z|$ μικρότεροι ή ίσοι του 12.

Τώρα από τις (Ι) και (ΙΙ) προκύπτει ότι από τους x, y, z θα ειναι ο ένας ή και οι τρεις περιττοί.

Επίσης από την (Ι) προκύπτει ότι ένας τουλάχιστον θα είναι απολύτως μεγαλύτερος του 7 (γιατί διαφορετικά αν ήταν $|x|, |y|, |z| \leqslant 7$ τότε $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 147$, άτοπο).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $|x| > 7$, τότε όμως αφού και $|x| \leqslant 12$ και x περιττός, θα έχουμε: $|x| = 9$ ή $|x| = 11$. Επίσης από την (ΙΙ) αποκλείεται $x < 0$ (δηλ. $x = -9$ ή $x = -11$ γιατί τότε $y + z = 30$ ή 32 άρα $|y|$ ή $|z| \geqslant 15$ άτοπο αφού τότε από (Ι) $\Rightarrow y^2 \geqslant 225$ ή $z^2 \geqslant 225$).

Έτσι λοιπόν θα είναι $x = 9$ ή 11.

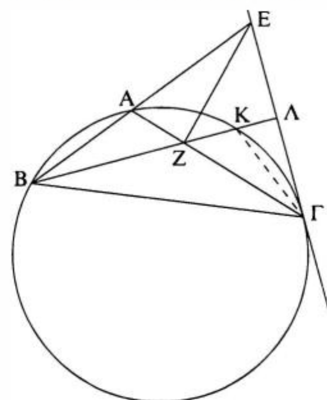
i) Έστω $x = 9$ τότε $y + z = 12$, y, z, περιττοί άρα: $(y, z) = (7, 5)$ ή $(y, z) = (5, 7)$ αφού άλλοι συνδυασμοί όπως π.χ. $(y, z) = (11, 1)$ ή $(9, 3)$ απορρίπτονται λόγω της (Ι). Έτσι η τριάδα των αριθμών (9, 7, 5) είναι λύση του συστήματος (καθώς και κάθε μετάθεση αυτής λόγω συμμετρίας των εξισώσεων). Άρα έχουμε $3! = 6$ λύσεις ως προς (x, y, z).

ii) Αν $x = 11$ τότε $y + z = 10$ άρα $(y, z) = (7, 3)$ ή $(5, 5)$ ή $(9, 1)$ που όλες απορρίπτονται λόγω (Ι).

3. Κατ' αρχήν $E\hat{\Gamma}A = A\hat{B}\Gamma$ ως γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης και επειδή $AB\Gamma$ ισοσκελές $E\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}B$. Άρα στο $E\hat{\Gamma}B$ η ΓΑ είναι διχοτόμος και συνεπώς αφού και η ΕΖ διχοτόμος το Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του $E\hat{\Gamma}B$ άρα και η ΒΖ διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$. Οπότε $\Lambda\hat{\Gamma}K = K\hat{B}\Gamma = K\hat{B}A = K\hat{\Gamma}Z$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Δηλαδή η ΓΚ διχοτόμος της $\Lambda\hat{\Gamma}Z$. Από το θεώρημα διχοτόμων στο $\Lambda\hat{\Gamma}Z$ θα έχουμε $\frac{K\Lambda}{KZ} = \frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma Z}$

Όμοια στο $A\hat{B}\Gamma$: $\frac{\Gamma Z}{ZA} = \frac{B\Gamma}{AB}\left(= \frac{B\Gamma}{A\Gamma}\right)$ και στο $E\hat{\Gamma}B$: $\frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda E} = \frac{B\Gamma}{BE}$



Διαιρώντας τώρα κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχω: $\frac{\Gamma Z}{\Gamma\Lambda} = \frac{BE}{A\Gamma} \cdot \frac{AZ}{E\Lambda}$ και συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την πρώτη έχω $\frac{KZ}{K\Lambda} = \frac{BE}{A\Gamma} \cdot \frac{AZ}{E\Lambda}$ δηλ. το ζητούμενο.

4. Εφόσον το Α έχει πεπερασμένο πλήθος θα μπορεί να διαταχθεί και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$. Υποθέτουμε ακόμη ότι $\alpha_1 > 0$ γιατί αλλιώς το ζητούμενο έπεται.

Τότε ο αριθμός $\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_{m-1}) \in A \ \forall \ m = 2, \ldots, n$ οπότε και ο αριθμός $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \in A$. Αλλά $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) < \alpha_2$, οπότε θα πρέπει αναγκαστικά $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = \alpha_1$ ή $\alpha_2 = 3\alpha_1$.

Ομοίως $\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2) \in A$ ή $\frac{1}{2}(\alpha_3 - 3\alpha_1) \in A$ και $\frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1) \in A$ και επειδή οι δύο αυτοί αριθμοί είναι μικρότεροι του α_3 και $\frac{1}{2}(\alpha_3 - 3\alpha_1) \leqslant \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ θα είναι:

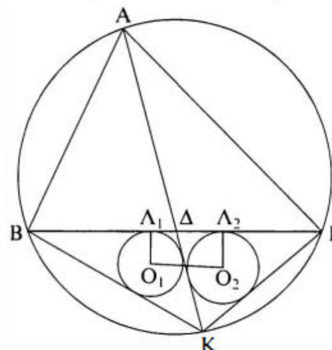
i) $\frac{1}{2}(\alpha_3 - 3\alpha_1) < \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - 3\alpha_1)$ και $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ δηλαδή $\boxed{\alpha_3 = 5\alpha_1}$ και $3\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ δηλαδή $\boxed{\alpha_3 = 7\alpha_1}$ που ισχύουν μόνο όταν $\alpha_1 = 0$.

ii) $\frac{1}{2}(\alpha_3 - 3\alpha_1) = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_1)$ οπότε $\alpha_1 = 0$.

Άρα $\alpha_1 = 0$ και επειδή τότε $\frac{1}{2}(\alpha_\kappa - \alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_\kappa \in A$ για $\kappa = 2, 3, \ldots, n$ προκύπτει ότι: $\alpha_\kappa = 0$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n)$.

Γ΄ Λυκείου

1. Η εξίσωση γράφεται: $4x^2(x + y - 3) = y^2(x + y - 3)$
δηλαδή $(4x^2 - y^2)(x + y - 3) = 0$ οπότε $(2x + y)(2x - y)(x + y - 3) = 0$.
Συμπεραίνουμε ότι $2x + y = 0$ ή $2x - y = 0$ ή $x + y - 3 = 0$
Οι ευθείες αυτές τέμνονται στα σημεία (0, 0), (2, 1), (5, −2), οπότε το εμβαδό υπολογίζεται εύκολα.



2. Αφού οι κύκλοι στα $B\hat{Δ}K$, $K\hat{Δ}Γ$ είναι ίσοι θα έχουμε $O_1Λ_1 // = O_2Λ_2$
Επειδή ΑΔ διχοτόμος θα είναι $B\hat{A}K = K\hat{A}Γ$ άρα $BK = KΓ$
Τα $B\hat{Δ}K$, $K\hat{Δ}Γ$ έχουν κοινό ύψος άρα $\frac{(BΔK)}{(ΓΔK)} = \frac{BΔ}{ΓΔ}$ και $\frac{(BΔK)}{(ΓKΔ)} =$

$\frac{τ_1O_1Λ_1}{τ_2O_2Λ_2} = \frac{τ_1}{τ_2} = \frac{BK + KΔ + BΔ}{ΓK + KΔ + ΔΓ}$

Άρα $\frac{BΔ}{ΓΔ} = \frac{BK + KΔ + BΔ}{ΓK + KΔ + ΔΓ} \Rightarrow$

$BΔ\cdot ΓK + BΔ\cdot KΔ + BΔ\cdot ΔΓ = ΓΔ\cdot BK + ΓΔ\cdot KΔ + ΓΔ\cdot BΔ \Rightarrow$
$BΔ\cdot ΓK + BΔ\cdot KΔ = ΓΔ\cdot BK + ΓΔ\cdot KΔ$
$BΔ\cdot BK + BΔ\cdot KΔ = ΓΔ\cdot BK + ΓΔ\cdot KΔ$
$BK(BΔ - ΓΔ) + KΔ(BΔ - ΓΔ) = 0 \Leftrightarrow (BK + KΔ)(BΔ - ΓΔ) = 0 \Leftrightarrow BΔ = ΓΔ$.
Δήλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το $A\hat{B}Γ$ ισοσκελές.

3. Βλέπε 4) θέμα της Β΄ Λυκείου.

4. Έστω ρ ο μικρότερος πρώτος αριθμός για τον οποίο ισχύει
Τότε $ρ \geqslant n_0$ και $f(ρ)/ρ$ αλλά επειδή ρ πρώτος είναι $f(ρ) = ρ$ ή $f(ρ) = 1$.
Αν $f(ρ) = 1$ τότε $\forall\, n < ρ$ θα είναι $f(n) < f(ρ) = 1 \Rightarrow f(n) \leqslant 0$ άτοπο. Άρα $f(ρ) = ρ$.
Αφού η f είναι γνήσια αύξουσα θα είναι:
$f(ρ + 1) \geqslant f(ρ) + 1 = ρ + 1$, αλλά επειδή $f(ρ + 1)/ρ + 1$ είναι $f(ρ + 1) \leqslant ρ + 1$, οπότε $f(ρ + 1) = ρ + 1$.
Γενικά για κάθε $ν \in \mathbb{N}$ θα είναι
$f(ρ + ν) \geqslant f(ρ + ν - 1) + 1 \geqslant \ldots \geqslant f(ρ) + ν = ρ + ν$
και επειδή $f(ρ + ν)/ρ + ν\ \forall\, ν \in \mathbb{N}$ ή $f(n) = n\ \forall\, n \geqslant ρ$
Το ίδιο ισχύει και $\forall\, n < ρ$
Πράγματι εφόσον η f είναι γνήσια αύξουσα είναι:
$1 \leqslant f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(ρ - 1) \leqslant ρ - 1$
Αν τώρα υπάρχει $m \in \{1, 2, \ldots, ρ - 1\}$: $f(m) > m$ τότε όπως και προηγουμένως θα είναι
$f(ρ - 1) \geqslant f(m) + (ρ - 1 - m) > m + (ρ - 1 - m) = ρ - 1$ που είναι άτοπο αφού $f(ρ - 1) \leqslant ρ - 1$
Το ίδιο συμβαίνει και αν υπάρχει $m \in \{1, 2, \ldots, ρ - 1\}$: $f(m) < m$
Οπότε τελικά $f(n) = n$ και για κάθε $n < ρ$. Άρα $f(n) = n\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

14η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «ο Αρχιμήδης»

Αθήνα, 18 Ιανουαρίου 1997

Θέματα Λυκείου

1. Έστω Ρ σημείο στο εσωτερικό ή στις πλευρές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες θέσεις του Ρ, το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης:

$$f(P) = A\hat{B}P + B\hat{Γ}P + Γ\hat{Δ}P + Δ\hat{A}P$$

2. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$ ii) $f(x) > -\frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$,

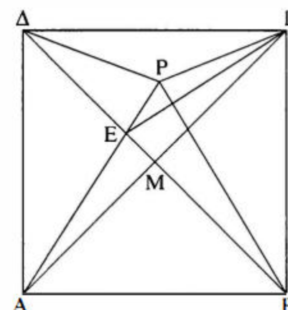
iii) $f(x)f\left[f(x) + \frac{1}{x}\right] = 1$ για κάθε $x > 0$.

Να υπολογίσετε το f(1).

3. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$.

4. Έστω p πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές το οποίο έχει 13, διαφορετικές μεταξύ τους, ακέραιες ρίζες. Να αποδείξετε ότι αν n ακέραιος αριθμός με $p(n) \neq 0$, τότε $|p(n)| \geq 7(6!)^2$.
Επίσης να δοθεί παράδειγμα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές και με 13, διαφορετικές μεταξύ τους, ακέραιες ρίζες τέτοιο ώστε: για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ να είναι $|p(n)| = 7(6!)^2$.

Λύσεις Λυκείου



1. Έστω Μ το κέντρο του τετραγώνου. Το Ρ είναι δυνατό να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός από τα τρίγωνα $A\hat{M}B$, $B\hat{M}\Gamma$, $\Gamma\hat{M}\Delta$ και $\Delta\hat{M}A$. Έστω στο $\Gamma\hat{\Delta}M$ Ε η τομή της ΑΡ με την ΒΔ. Τα τρίγωνα $A\hat{E}\Delta$ και $\Gamma\hat{E}\Delta$ είναι ίσα, αφού:

$$AE = \Delta E$$
$$A\Delta = \Gamma\Delta \quad \text{οπότε } \Delta\hat{A}E = \Delta\hat{\Gamma}E$$
$$A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{\Delta}E = 45^\circ$$

Τότε $\Delta\hat{A}P + B\hat{\Gamma}P = B\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}P \geqslant 90^\circ$ και αφού $A\hat{B}P \geqslant 45^\circ$ θα είναι $f(\rho) \geqslant 3\cdot45^\circ = 135^\circ$
Ακόμα θα ισχύει μια από τις παρακάτω ανισότητες: $P\hat{A}B \geqslant A\hat{B}P$ ή $P\hat{\Gamma}\Delta \geqslant \Gamma\hat{\Delta}P$
Αν π.χ. η πρώτη θα έχουμε: $A\hat{B}P + \Delta\hat{A}P \leqslant P\hat{A}B + \Delta\hat{A}P = 90^\circ$
Ακόμα $B\hat{\Gamma}P \leqslant 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\Delta}P \leqslant 45^\circ$. Επομένως $f(\rho) \leqslant 5\cdot45^\circ = 225^\circ$

2. Έστω $f(1) = \alpha$. Τότε από την υπόθεση, για $x = 1$ έχουμε: $\alpha f[\alpha + 1] = 1$ ή $f(\alpha + 1) = \frac{1}{\alpha}$ (1)

Για $x = \alpha + 1$ παίρνουμε $f(\alpha+1)f\left[f(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha+1}\right]=1$ ή $f(\alpha+1)f\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right]=1$ ή

$$f\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right)=\frac{1}{f(\alpha+1)} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha \quad (2)$$

Οπότε $f\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\right)=f(1)$ (3)

Επειδή όμως η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ θα πρέπει $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}=1$ ή $\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Αν $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, τότε $1<\alpha=f(1)<f(1+\alpha)=\frac{1}{\alpha}<1$ άτοπο

Ώστε $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, άρα $f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Σημείωση. Μια τέτοια συνάρτηση μπορεί να είναι η $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ όπου $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Η εξίσωση γράφεται $1997(13y^2 + 1996x^2) = 2x^2y^2$ (2)
Ο αριθμός 1997 είναι πρώτος και $1997/zx^2y^2$ οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:
i) $1997/z$ δηλαδή $z = 1997\cdot z_1$ όπου $z_1 \in \mathbb{N}^*$ και η (2) γίνεται $13y^2 + 1996x^2 = z_1\cdot x^2y^2$ (3)
οπότε $x^2/13y^2$ δηλ. x/y και $y^2/1996x^2 = 499(2x)^2$ (4)
Αλλά ο 499 είναι πρώτος οπότε $y/2x$ (5)
Επομένως $y = 1$ ή $y = 2$ ή y/x ή $y/2x$ (6)

4. Από την υπόθεση έχουμε $P(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{13})\cdot g(x)$ όπου $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ οι διαφορετικές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου και $|P(x)| = |\alpha||x - x_1||x - x_2||x - x_3|\ldots|x - x_{13}||g(x)|$ οπότε $|P(n)| = |\alpha||n - x_1||n - x_2||n - x_3|\ldots|n - x_{13}||g(n)|$ αφού $P(n) \neq 0$ θα έχουμε $|\alpha|,|g(n)| \geqslant 1$ και επειδή $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ είναι ακέραιες ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους θα υπάρχουν 6 ζεύγη από αυτές που θα απέχουν τουλάχιστον από το n απόσταση ίση με 1, με 2, με 3 … με 6, ενώ η 13^{η} που μένει απέχει $\geqslant 7$
Άρα $|P(n)| \geqslant |n - x_1||n - x_2||n - x_3|\ldots|n - x_{13}| \geqslant 1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5\cdot5\cdot6\cdot6\cdot7 = (1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6)^2\cdot7$

δηλ. $|P(n)| \geqslant (6!)^2 \cdot 7$
Το ζητούμενο πολυώνυμο μπορεί να είναι π.χ.
$P(x) = (x \pm 1)(x \pm 2)(x \pm 3)(x \pm 4)(x \pm 5)(x \pm 6)(x - 7)$

Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο

Λευκοπούλειος Διαγωνισμός Πιθανοτήτων

Στρατής Κουνιάς

Θέματα και λύσεις τουΛευκοπούλειου διαγωνισμού που έγινε 18 Ιανουαρίου 1997.

1. Ας υποθέσουμε ότι ν σχολεία στέλνουν στο Λευκοπούλειο διαγωνισμό από δύο μαθητές το καθένα. Ποια είναι η πιθανότητα οι τρεις μαθητές που βραβεύονται να προέρχονται από διαφορετικά σχολεία;

2. Ένας δρομέας πρόκειται να τρέξει στην τέταρτη λωρίδα ενός στίβου με 8 λωρίδες. Αν γνωρίζει ότι στον αγώνα παίρνουν μέρος εκτός από αυτόν άλλοι τρεις αθλητές, οι οποίοι τοποθετούνται εντελώς τυχαία στις υπόλοιπες 7 λωρίδες, ποια είναι η πιθανότητα να μην τρέχει δίπλα του (σε γειτονική λωρίδα) κανένας αντίπαλος;

3. Οι Α και Β συμφωνούν να παίξουν το εξής παιχνίδι:

Θα ρίχνουν εναλλάξ δύο (διακεκριμένα) ζάρια. Αποτέλεσμα κάθε ρίψεως θεωρείται το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών (2, 3, ..., 12). Νικητής είναι όποιος φέρει πρώτος το αποτέλεσμα 7. Αν ο Α αρχίσει το παιχνίδι (ρίχνοντας πρώτος τα δύο ζάρια) και βάλει στοίχημα το ποσό α, πόσο πρέπει να στοιχηματίσει ο Β ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο, δηλαδή τα στοιχήματα να είναι ανάλογα των αντίστοιχων πιθανοτήτων (να κερδίσουν το παιχνίδι);
Γενικεύσετε το πρόβλημα για ν παίκτες $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ με τον A_1 να ρίχνει πρώτος, τον A_2 δεύτερος κ.ο.κ.

Λύσεις:

Θέμα 1

α) Λύση Ρωμανού – Διογένη Μαλικιώση, 14^{ο} Λύκειο Θεσσαλονίκης, 1^{ος} νικητής.
Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν $2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)$ τρόποι να καταληφθούν οι τρεις πρώτες θεσεις. Οι τρόποι για να συμπληρωθεί η τριάδα, χωρίς να έχουμε δύο του ίδιου σχολείου είναι $2\nu(2\nu-2)(2\nu-4)$.
Άρα η πιθανότητα p είναι: $p = \dfrac{2\nu(2\nu-2)(2\nu-4)}{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)} = 1 - \dfrac{3}{2\nu-1}$

β) Λύση της Ελένης Κατηφόρη, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο, 2^{η} νικήτρια. Ίδια λύση έδωσε και ο Τάσος Κουιμάς, 2^{ο} Λύκειο Αργυρούπολης, 3^{ος} νικητής.
Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τριάδες στοιχείων επιλεγμένες από το πλήθος των 2ν μαθητών που συνολικά αποστέλλονται από τα σχολεία.

$$N(\Omega) = \binom{2\nu}{3} = \frac{(2\nu)!}{3!(2\nu-3)!}$$

Με Α συμβολίζουμε το ενδεχόμενο του οποίου ζητάμε την πιθανότητα. Τα σχολεία από τα οποία θα προέλθουν οι νικητές μαθητές είναι ν, άρα μπορούμε να τα επιλέξουμε κατά $\binom{\nu}{3}$ τρόπους. Όμως επειδή κάθε σχολείο στέλνει 2 μαθητές, κάθε τριάδα σχολείων αντιστοιχεί σε $2^3 = 8$ τριάδες μαθητών. Άρα το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι: $N(A) = \binom{\nu}{3} 2^3$. Επομένως

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{\nu}{3} 8}{\binom{2\nu}{3}} = \frac{2(\nu-2)}{2\nu-1}$$

Θέμα 2

Λύση Ρωμανού – Διογένη Μαλικιώση

Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να καταληφθούν οι υπόλοιπες θέσεις από τους τρεις αθλητές είναι: $\Delta_3^7 = 7\cdot 6\cdot 5$ (οι αθλητές είναι διακεκριμένοι). Στον αγώνα αυτό δεν τρέχει κανείς δίπλα του, αν οι τρεις αθλητές καταλαμβάνουν όλες τις υπόλοιπες θέσεις εκτός από την τρίτη 3η κι την 5η. Αυτό γίνεται με $\Delta_3^5 = 5\cdot 4\cdot 3$ τρόπους. Άρα η πιθανότητα είναι: $p = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 5} = \frac{2}{7}$

Θέμα 3

α) Λύση Ρωμανού – Διογένη Μαλικιώση. Ίδια λύση έδωσε και ο Μιλτιάδης Μαυρακάκης, Β Λύκειο Χανίων, Έπαινος.

Όλες οι ζαριές με τα δύο ζάρια είναι 36. Το πλήθος αυτών που έχουν άθροισμα 7 είναι 6, αυτές είναι οι (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6). Η πιθανότητα να κερδίσει ο Α στην πρώτη ρίψη είναι $\frac{1}{6}$. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Β είναι $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$, διότι πρέπει να χάσει πρώτα ο Α. Αν δεν κερδίσει κανείς στις δύο πρώτες ρίψεις, τότε θεωρούμε ότι το παιχνίδι αρχίζει από την αρχή. Είναι λογικό το ποσό του Β να είναι ίσο με $\beta = \frac{5}{6}\cdot\alpha$ διότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{36}}$.

Αν τώρα παίζουν το παιχνίδι ν παίκτες, οι A_1, A_2, ..., A_ν και στοιχηματίζουν αντίστοιχα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε πρέπει να ισχύει $\alpha_2 = \frac{5}{6}\cdot\alpha_1$, $\alpha_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu = \left(\frac{5}{6}\right)^{\nu-1}\cdot\alpha_1$

Δηλαδή $\forall\, \kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, ισχύει: $\alpha_\kappa = \left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}\alpha_1$

β) Ο Α κερδίζει το παιχνίδι στην πρώτη ή τρίτη ή πέμπτη κ.λ.π. προσπάθεια. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Α είναι: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2i}\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots = \frac{6}{11}$

Όμοια η πιθανότητα να κερδίσει ο Β είναι $\frac{5}{11}$, επομένως εφόσον τα στοιχήματα είναι ανάλογα των πιθανοτήτων θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{6}{11}}{\frac{5}{11}}$, ή $\beta = \left(\frac{5}{6}\right)\alpha$.

Άν έχουμε ν παίκτες, η πιθανότητα να κερδίσει ο κ-στος παίκτης το παιχνίδι είναι:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^{\nu+\kappa-1}\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots = \left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}\left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{\nu}},\ \kappa = 1, \ldots, \nu$$

Αυτό συμβαίνει διότι ο κ-στος παίκτης κερδίζει το παιχνίδι στην προσπάθεια κ ή στην ν + κ ή στην 2ν + κ κ.λ.π. και πρέπει να αποτύχουν όλοι οι προηγούμενοι για να κερδίσει αυτός. Τα στοιχήματα είναι ανάλογα των αντίστοιχων πιθανοτήτων, τότε $\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_1} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{6}}$

Δηλαδή $\alpha_\kappa = \left(\frac{5}{6}\right)^{\kappa-1}\alpha_1$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ «ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ»
(ή .... Μαθηματικές ΠΡΟ & ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ)

Β.Ε. Βισκαδουράκης

Είναι αναμενόμενο, πολλοί από τους αναγνώστες του «Ευκλείδη Β΄» που θα θελήσουν να α-σχοληθούν με τα παρακάτω προτεινόμενα για λύση θέματα (μικροί ή και μεγαλύτεροι) να θέσουν το ερώτημα: Και προς τι όλα αυτά;

Είναι ένα ερώτημα που μερικές φορές ίσως υποκρύπτει ένα λανθάνοντα εγωισμό, ο οποίος μας οδηγεί στο να κλείνουμε τα μάτια σε κάτι που είτε το θέλουμε είτε όχι, υπάρχει (καινούργια προβλήματα πάντα θα παρουσιάζονται και θα περιμένουν τη λύση τους – που δεν θ' αργήσει νάρθει –). Το να δώσετε τη λύση αυτή εσείς (ή και εσείς) φίλοι μαθητές είναι μια ευχαρίστηση που ότι και αν σας πει κανείς δεν μπορεί να αποδώσει την ποιότητα και την αξία της. Η πρόκληση για να το διαπιστώσετε βρίσκεται λίγες γραμμές παρακάτω . Δοκιμάστε (αλλά με πίστη και με πείσμα). Υπάρχουν προβλήματα για κάθε μαθητή της Α΄, Β΄, και Γ΄ Λυκείου που αγαπάει τα Μαθηματικά. Γι' αυτόν που βρίσκεται στην Α΄ τάξη του Λυκείου και θάθελε πιθανόν του χρόνου να συμμετάσχει στους Διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε., μέχρι και για τους πρωταθλητές των περσινών μας Διαγωνισμών.

Η συγκέντρωση, ταξινόμηση και επίλυση των περισσοτέρων απ' αυτά έγινε κατά την διάρκεια της δίμηνης πρόσφατης απεργίας των καθηγητών σας φίλοι μαθητές, («ουδέν κακόν, αμιγές καλού»).

Οσο για το χρόνο που χρειάστηκε; Πολύς.

Τόσος που εκείνο το «επίδομα εξωδιδακτικής απασχόλησης» για όλο το 1997 σίγουρα δεν αρκεί για την κάλυψη του.

Αλλά, δεν ξέρουν όλοι από κόπο και ξενύχτι.

Ομως, συγγνώμη φίλοι μου αν σας μελαγχόλησα . Υπόσχομαι να επανορθώσω στο επόμενο τεύχος. Θα δείτε τότε ότι αξίζει τον κόπο να ασχολείται κανείς, και μάλιστα στην μαθητική του σταδιοδρομία, σοβαρά με τα Μαθηματικά.

Πάρτε μέρος στην κοσμογονία της εποχής σας. Τα Μαθηματικά είναι το πιο σίγουρο όχημα για το μέλλον. Μη διστάσετε να ταξιδέψετε μαζί τους.

Ο «Ευκλείδης», όπως δεκαετίες τώρα, θάναι μαζί σας σύντροφος και αρωγός στον πρώτο καιρό αυτού του συναρπαστικού ταξιδιού.

Κρατείστε τον και στις διακοπές σας. Κι αν αποφασίσετε να ασχοληθείτε με τα παρακάτω προβλήματα, οι ιδέες σας, οι λύσεις σας, οι παρατηρήσεις σας, θάναι ευπρόσδεκτες όπως πάντα. Μόνο ειδικά για τούτα τα προβλήματα μην ξεχάσετε το γράμμα σας να το θέσετε υπόψιν του υπογράφοντος. Καλό καλοκαίρι λοιπόν φίλοι μου και καλό κουράγιο στην προσπάθεια σας.

Α. ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑ

1) Να δειχθεί ότι τα κλάσματα:
(i) $\frac{2n-1}{2n+1}$, για $n \in \mathbb{N}^*$ και
(ii) $\frac{3n+7}{4n+10}$, $n \in \mathbb{N}$, n άρτιος, είναι ανάγωγα (δηλ. δεν απλοποιούνται)

2) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n > 1$ ο αριθμός $A = 19 \cdot 8^n + 17$ είναι σύνθετος.

3) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πρώτοι αριθμοί στην ακολουθία των ακεραίων:
10001, 100010001, 1000100010001, …

4) Δείξτε ότι ο αριθμός $A = \underbrace{111\ldots1}_{91 \text{ άσσοι}}$ του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης είναι σύνθετος αριθμός.

5) Αν $\alpha_i \in \{+1, -1\}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και αν είναι:
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 + \ldots + \alpha_n\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$
να δείξετε ότι το n είναι πολλαπλάσιο του 4.

6) Δείξτε ότι αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $A = 1 + 2^n + 4^n$ είναι πρώτος, τότε ο n είναι της μορφής $n = 3^\kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}_+$.

7) Αν $m, n \in \mathbb{N}^*$ και n περιττός να δείξετε ότι το άθροισμα $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + m^n$ διαιρείται με το άθροισμα $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + m$.

8) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 3y^2 = 17$ δεν έχει ακέραια λύση.

9) Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η εξίσωση $x^2 + 1 = 7y^n$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}$.

10) Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, η εξίσωση $x^n + (x+1)^n = (x+2)^n$ δεν έχει λύση στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

11) Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ η εξίσωση: $x^3 + 3x = 4y^3$.

12) Να λυθεί στο $\mathbb{N}$ η εξίσωση: $(y+1)^x - 1 = y!$

13) Να βρεθούν οι φυσικοί $\alpha, \beta, \gamma, n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ισχύουν $\left\{ \begin{array}{c} \alpha^n - \beta^n - \gamma^n = n \cdot \alpha\beta\gamma \\ \alpha^2 = 2(\beta + \gamma) \end{array} \right\}$

14) Να βρεθεί τριψήφιος αριθμός $\overline{xyz}$, αν τα x, y, z είναι διαδοχικά ψηφία και $\overline{xz} = y + 11$.

15) Να βρείτε τετραψήφιο αριθμό με ίδια τα δύο πρώτα και ίδια τα δύο τελευταία ψηφία έτσι ώστε αυτός να είναι τέλειο τετράγωνο.

16) Βρείτε ένα τριψήφιο αριθμό $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τέτοιο ώστε η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου τριψήφιου που μπορούμε να φτιάξουμε με τα ψηφία α, β, γ (το καθένα μία φορά) να είναι ίση με τον αρχικό τριψήφιο αριθμό.

17) Ένας φυσικός αριθμός γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι κατά 1996 μονάδες μεγαλύτερος από τον ίδιο αυτό αριθμό γραμμένο χωρίς το τελευταίο του ψηφίο. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να έχει αυτός ο αριθμός;

18) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να λήγει σε 7 και που αν το 7 μετακινηθεί στην πρώτη θέση αριστερά, ο νέος αριθμός να είναι πενταπλάσιος από τον αρχικό αριθμό.

19) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να λήγει σε 6 και που αν το 6 μεταφερθεί αριστερά απ' όλα τα ψηφία του αριθμού, ο νέος αριθμός να είναι εξαπλάσιος από τον αρχικό αριθμό.

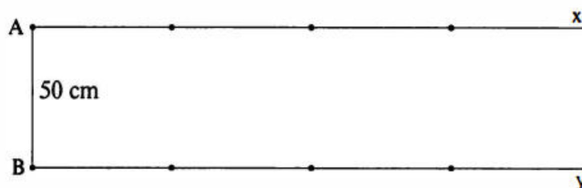
20) Έστω (x_n) $n \in \mathbb{N}^*$ μια ακολουθία με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = 1 + 2x_n$
(i) Βρείτε όλα τα n για τα οποία το x_n διαιρείται με το 5.
(ii) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$ έτσι ώστε το x_n να διαιρείται με το n.

21) Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών, τέτοιων ώστε το άθροισμα των ψηφίων του

α_n να είναι ίσο με n και τα ψηφία αυτά είναι μόνο 1, 3 ή 4. Να αποδείξετε ότι ο α_{2n} είναι τέλειο τετράγωνο.

22) Αν $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{496} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{1984} x^{1984}$
(i) Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των $\alpha_3, \alpha_8, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1983}$
(ii) Δείξτε ότι $10^{347} > \alpha_{992} > 10^{340}$

23) Έχουμε ένα μπιλιάρδο άπειρου μήκους και πλάτους 50cm. Με αρχή τα A και B υπάρχουν ανά 130cm υποδοχές στις πλευρές A_x και B_y. Από το A και με 45° γωνία ξεκινάει μια μπάλα η οποία προσκρούει στην απέναντι πλευρά B_y, ανακλάται (ως γνωστό) με 45° γωνία κ.τ.λ.



Να βρείτε πόσο μακριά θα πάει η μπάλα και σε ποια ακριβώς υποδοχή θα πέσει.

24) Σ' ένα τεστ με άριστα το 100 οι επιδόσεις των μαθητών Α, Β, Γ, Δ, Ε είναι 5 διαφορετικοί ακέραιοι, όλοι μεγαλύτεροι του 91. Είναι γνωστό ότι ο μέσος όρος των επιδόσεων του Α, του Β και του Γ είναι 95, ενώ ο μέσος όρος των επιδόσεων του Β, του Γ και του Δ είναι 94. Αν ο Α είναι πρώτος (με την καλύτερη επίδοση), ο Ε είναι τρίτος με επίδοση 96, ποια θέση κατέλαβε ο Δ;

25) Ο αριθμός 4444^{4444} γράφεται στην κανονική του μορφή στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, οπότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι Α και το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι Β. Να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του Β.

Β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

26) Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{11}{6}$, στο $\mathbb{R}$.

27) Να λυθεί στο σύνολο των ρητών αριθμών η εξίσωση: $\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$

28) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $x^4 + x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$

29) Να λυθούν οι εξισώσεις:
(i) $1 + 4^x + 9^x = 2^x + 3^x + 6^x$
(ii) $16^x(4x + 1) = 4$
(iii) $\sqrt{10x - y^2} - \sqrt{y+2} = \sqrt{25x^2 + y}$ ⇒ .... $-(5x-1)^2 - (y+1)^2 = 2\sqrt{(25x^2 y)(y+2)}$
⇒ $5x-1=0$ $y+1=0$

30) Αν $\alpha > 0$ να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $(\alpha^x + \alpha^{-x}) \cdot (1 + x^2) = 2$

31) Αν $\alpha > 1$ να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $\alpha^{x^2} + \alpha^4 = 2\alpha^{2x}$

32) Να λύσετε την εξίσωση: $(\eta\mu(x - y) + 1) \cdot (2\sigma\upsilon\nu(2x - y) + 1) = 6$

33) Αν η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ διαφορετικές μεταξύ τους (όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), να δείξετε ότι και η εξίσωση $x^4 + \alpha x^3 + (\beta - 2)x^2 - \alpha x + 1 = 0$ έχει τέσσερεις διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες.

34) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\left\{ \begin{array}{c} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{array} \right\}$

35) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το σύστημα: $\left\{ \begin{array}{c} x + y + z + t = 4 \\ \sqrt{xy} + \sqrt{zt} = 2 \\ \sqrt{xz} + \sqrt{yt} = 2 \end{array} \right\}$

Γ. ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

36) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $[\alpha \cdot [x]] = [[\alpha] \cdot x]$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

37) Να βρείτε το ακέραιο μέρος των αριθμών:
(i) $A = \sqrt{1997 + \sqrt{1997 + \sqrt{\ldots + \sqrt{1997}}}}$, (τα ριζικά είναι 1997).

(ii) $B = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[3]{1997}}}}$

38) Να δείξετε ότι: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

(i) $S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^\kappa}{2^{\kappa+1}}\right] + \ldots$

(ii) $S = \left[\frac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}+1}\right] + \left[\frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}+1}\right] + \ldots + \left[\frac{m^{n+1}+1}{m^{n-1}+1}\right]$ όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ και $m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$.

39) Να δείξετε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $[\sqrt{n^2 - n} + \sqrt{n^2 + n}] = [\sqrt{4n^2 - 1}]$

40) Αν α, β θετικοί ακέραιοι και αν $(1 + \sqrt{2})^n = \alpha + \beta\sqrt{2}$ να δείξετε ότι $[\beta\sqrt{2}] = \alpha$.

41) Αν $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ και $\left[\frac{x^2}{y+z}\right] + \left[\frac{y^2}{x+z}\right] + \left[\frac{z^2}{x+y}\right] = \left[\frac{2}{x+y+z}\right]$ να βρεθούν οι x, y, z. (όπου $[x]$ = ακέραιο μέρος του x)

Δ. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

42) Να συγκρίνετε τα ζεύγη των αριθμών
(i) 2^{1996} και 3^{1247} (ii) 4^{1987} και 5^{1703} (iii) 7 και $2\sqrt{7}$ (iv) $\sqrt{1001} + \sqrt{999}$ και $2\sqrt{1000}$

43) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[n]{n!}$ και $\sqrt[n+1]{(n+1)!}$

44) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
$A = \frac{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}}{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n}$ και $B = \frac{1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}}{1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^n}$ όταν $\alpha > \beta > 0$.

45) Να αποδείξετε την ανισότητα:
$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{1996}}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{1995}}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2^{998}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{999}}\right) < 1000$

46) Αν $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}_+$ και $\alpha + \beta \leqslant 4$ και $x + y \leqslant 9$ να δειχτεί ότι $\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} \leqslant 6$.

47) Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε την ανισότητα: $2^{x^2} + 2^{y^2} + 2^{z^2} \geqslant 2^{xy} + 2^{yz} + 2^{zx}$

48) Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί με $x + y + z = 1$ να δείξετε ότι:
$\frac{yz}{x+1} + \frac{zx}{y+1} + \frac{xy}{z+1} \leqslant \frac{1}{4}$

49) Αν $x, y, z > 0$ και $x + y + z = 1$, να αποδειχθεί ότι: $2(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz \geqslant 1$

50) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n > 1$ να δειχτεί ότι: $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \ldots + \sqrt[n]{n}}}} < 2$

51) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^2 \leqslant 4(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6)$

52) Αν $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ και $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_n$ τότε:
$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n}{n} \geqslant \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{n}$
Ενώ αν: $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ και $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$ τότε:
$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n}{n} \leqslant \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{n}$

53) Αν $x, y, z \in (0, +\infty)$ και $xyz = 1$ να δείξετε ότι:
$x^{1997} + y^{1997} + z^{1997} \geqslant x^{1996} + y^{1996} + z^{1996}$

54) Αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ είναι θετικοί πραγματικοί, να αποδείξετε την ανισότητα: $\sqrt[n]{(\alpha_1 + \beta_1)\cdot(\alpha_2 + \beta_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n + \beta_n)} \geqslant \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \sqrt[n]{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$

55) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ θετικοί πραγματικοί να αποδείξετε την ανισότητα:
$\frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2)}$

56) Να αποδείξετε την ανισότητα: $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[16]{16}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n + 1$

57) Αν είναι $0 < \alpha_i < 1$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ να δείξετε ότι:
$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n < n - 1$

58) Αν όλες οι ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης: $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\frac{\alpha_{n-1}\cdot\alpha_1}{\alpha_n\cdot\alpha_0} \geqslant n^2$

59) Αν οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ του πολυωνύμου
$P(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}x + 1$
είναι όλοι μη αρνητικοί και αν αυτό έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες, να δείξετε τότε ότι: $P(2) \geqslant 3^n$.

Ε. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

60) Από το μέσον P μιας χορδής AB θεωρούμε τις χορδές ΓΔ και ΕΖ ενός κύκλου (Ο). Αν οι χορδές ΓΖ και ΕΔ τέμνουν την AB στα Η και Θ, να δείξετε ότι θα είναι: ΗΡ = ΘΡ.

61) Έστω ABCD κυρτό τετράπλευρο και έστω τα σημεία $A_1 \in (CD)$, $A_2 \in (BC)$, $C_1 \in (AB)$, $C_2 \in (AD)$. Έστω $(AA_2) \cap (CC_1) \equiv \{M\}$, $(AA_1) \cap (CC_2) \equiv \{N\}$. Να δείξετε ότι αν τρία από τα τετράπλευρα ABCD, A_2BC_1M, AMCN, A_1NC_2D είναι εγγράψιμα σε κύκλο, τότε και το τέταρτο είναι επίσης εγγράψιμο.

62) Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1. Δείξτε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς της περιμέτρου του με το άθροισμα των διαγωνίων του, είναι μεγαλύτερη του 0 και μικρότερη του 2.

63) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο ακτίνας r. Έστω Κ το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο τριγώνων. Να δειχτεί ότι $2K \geqslant r^2\sqrt{3}$.

64) Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο με πλευρές $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ και διαγώνιες $A\Gamma = d_1$ και $B\Delta = d_2$. Να δείξετε τότε ότι:
(i) $d_1\cdot d_2 \leqslant \alpha\gamma + \beta\delta$
(ii) $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$ αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο
(iii) $d_1^2\cdot d_2^2 = \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2$ αν και μόνο αν $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 90°$
(iv) Εμβαδό (ΑΒΓΔ) $\leqslant \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{4}$

65) Έστω $A\widehat{B}\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$) με $B\Gamma = \alpha$ και έστω δ η διχοτόμος της $\widehat{B}$. Να δειχτεί η ανισότητα: $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\alpha}{\delta} < \frac{3}{2}$

ΣΤ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

66) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε: $f(f(n)) = n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

67) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι 1 – 1 και $f^2(x) \leqslant f(x)\cdot f(1 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

68) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^2(x^2) + f(2^x) + 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

69) Βρείτε όλες τις 1 – 1 συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f(f(x))\cdot f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

70) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

71) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f(x + y) = f^2(x) + f^2(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

72) Δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$x^2 f^2(x^2) + xf(2^x) + 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

73) Βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) \neq 0$ που να ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)\cdot f(y) = f(x + xy)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

74) Βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση: $xf(y) + yf(x) = (x - y) f(x) f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

75) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί της συνθήκες : (i) $f(x) \leqslant x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και (ii) $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
Δείξετε ότι $f(x) = x$ για $x \in \mathbb{R}$.

Ζ. ΑΡΧΗ DIRICHLET, RAMSEY, ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

76) Έστω A ένα οποιοδήποτε σύνολο 20 αριθμών από τους όρους της αριθμητικής προόδου 1, 4, 7, 10, …, 100. Δείξτε ότι μεταξύ των στοιχείων του συνόλου A θα υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους θα ισούται με 104.

77) Έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι μεταξύ των αριθμών $x, 2x, 3x, \ldots, (n - 1)x$ υπάρχει κάποιος ο οποίος διαφέρει από κάποιον ακέραιο το πολύ $\frac{1}{n}$.

78) Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο A από 10 αριθμούς μεταξύ των 1, 2, 3, …, 99. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο μη κενά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του A, με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

79) Αποδείξτε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε 4 πραγματικών αριθμών υπάρχουν δύο x, y έτσι ώστε:

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 1.$$

80) Αν όλες οι ακμές και οι διαγώνιες ενός οκταέδρου χρωματιστούν κόκκινες ή μπλε, να δείξετε ότι θα υπάρχει τρίγωνο με πλευρές ίδιου χρώματος.

81) Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε συγκέντρωση έξι ατόμων θα υπάρχουν τρεις τουλάχιστον που είτε θα γνωρίζονται ανά δύο είτε θα είναι άγνωστοι ανά δύο.

82) Πόσοι αριθμοί μπορούν να επιλεγούν μέσα από το σύνολο {1, 2, 3, …, 1997} ώστε να μην υπάρχει μεταξύ αυτών ζευγάρι αριθμών με διαφορά 4.

83) Επτά (7) ομάδες υλοτόμων κόβουν συνολικά 100 δέντρα. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός δέντρων που ενδέχεται να υλοτόμησε η ομάδα που υλοτόμησε τα περισσότερα; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός δέντρων που ενδέχεται να υλοτόμησε η ομάδα με τα λιγότερα δέντρα;

84) Κάθε πρόσωπο σε μια ομάδα N μελών αγαπάει ακριβώς 4 πρόσωπα της ομάδας. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το N έτσι ώστε να υπάρχουν δύο άτομα τουλάχιστον που να αγαπάει ο ένας τον άλλο;

85) Στο Δημοτικό Σχολείο ενός χωριού φοιτούν 20 μαθητές. Αν οποιοιδήποτε δύο μαθητές έχουν ένα κοινό παππού, δείξτε ότι κάποιος παππούς έχει τουλάχιστον 14 εγγόνια σ' αυτό το Σχολείο.

86) Δίνονται 2n διακεκριμμένα μεταξύ τους σημεία του επιπέδου. Δείξτε ότι αυτά μπορεί να συνδεθούν μεταξύ τους με μια συνεχή τεθλασμένη ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται να μην τέμνονται.

87) Δίνονται τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ στη σειρά σε μια ευθεία (ε). Κάθε σημείο χρωματίζεται κόκκινο ή μπλε. Αν τώρα το χρώμα δύο γειτονικών σημείων A_i και A_{i+1} είναι διαφορετικό, τότε χρωματίζουμε το τμήμα A_iA_{i+1} κίτρινο. Να αποδείξετε ότι αν το πρώτο και το τελευταίο σημείο είναι διαφορετικού χρώματος, τότε ο αριθμός των κίτρινων ευθύγραμμων τμημάτων θα είναι περιττός.

88) Ένα τετράγωνο διαστάσεων $(n - 1) \times (n - 1)$ χωρίζεται σε $(n - 1)^2$ μοναδιαία τετράγωνα με το συνήθη τρόπο. Κάθε μια από τις n^2 κορυφές αυτών των μοναδιαίων τετραγώνων χρωματίζεται κόκκινη ή μπλε. Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών που μπορούμε να κάνουμε, έτσι ώστε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο να έχει δύο ακριβώς κόκκινες κορυφές.
(Δύο χρωματισμοί θεωρούνται διαφορετικοί αν μια τουλάχιστον κορυφή στους δύο αυτούς χρωματισμούς εμφανίζεται με διαφορετικό χρώμα).

38η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα
Mar del Plata, Αργεντινή 1997

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Πρόβλημα 1

Στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες είναι κορυφές τετραγώνων με πλευρά μήκους ένα. Τα τετράγωνα αυτά χρωματίζονται εναλλάξ μαύρα ή άσπρα (όπως σε μία σκακιέρα).

Για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων **m** και **n**, θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο για το οποίο ισχύουν ότι:

i) οι κορυφές του είναι σημεία με ακέραιες συντεταγμένες

ii) οι κάθετες πλευρές του βρίσκονται κατά μήκος των πλευρών των παραπάνω τετραγώνων

iii) οι κάθετες αυτές πλευρές έχουν μήκος **m** η μια και **n** η άλλη.

Έστω S_1 το συνολικό εμβαδόν εκείνου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο μαύρο και έστω S_2 το συνολικό εμβαδόν εκείνου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο άσπρο. Θέτουμε $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

α) Να υπολογίσετε τα $f(m, n)$ για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων **m** και **n** οι οποίοι είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί.

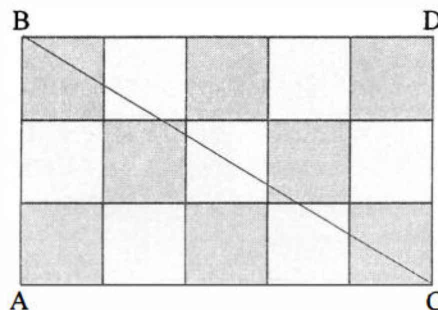
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων **m, n** ισχύει

$$f(m, n) \le \frac{1}{2}\max\{m, n\}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερά **c** τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων **m, n** να ισχύει $f(m, n) < c$.

Λύση

(α) Έστω ABC το ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν ακέραια μέτρα και οι κορυφές του είναι κορυφές των δοσμένων τετραγώνων με $\widehat{A} = 90°$, AB = m και AC = n. Ας θεωρήσουμε το m × n ορθογώνιο ABDC, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



σχήμα 1

Έστω ένα τυχαίο πολυγώνο P και ας συμβολίσουμε με $S_1(P)$ το μέρος της επιφάνειας του P, που είναι χρωματισμένο μαύρο και με $S_2(P)$ το μέρος της επιφάνειας του P, που είναι χρωματισμένο άσπρο.

Όταν τα m και n είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά ο χρωματισμός του ορθογωνίου έχει κέντρο συμμετρίας το μέσον της υποτείνουσας BC. Τότε έχουμε: $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ και $S_2(ABC) = S_2(BCD)$.

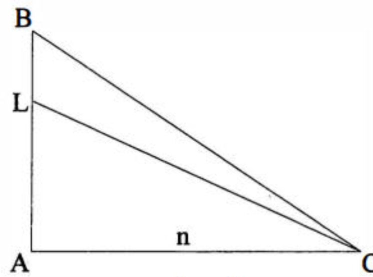
Επομένως $f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABDC) - S_2(ABDC)|$.

Παρατηρούμε ότι $f(m, n) = 0$ όταν m και n είναι και τα δύο άρτια και $f(m, n) = \frac{1}{2}$ όταν τα m και n είναι και τα δύο περιττά.

(β) Έστω τώρα ότι το m είναι περιττό και το n άρτιο. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο L στην AB τέτοιο ώστε AL = m − 1 όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

Αφού ο $m-1$ είναι άρτιος, έχουμε ότι $f(m-1, n) = 0$ και $S_1(ALC) = S_2(ALC)$.

Επομένως $f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \leq$ Εμβαδόν $(LBC) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2}\max\{m, n\}$.



σχήμα 2

(γ) Ας υπολογίσουμε το $f(2k+1, 2k)$. Όπως και στο (β) θα θεωρήσουμε ένα σημείο L στην AB, τέτοιο ώστε $AL = 2k$. Αφού $f(2k, 2k) = 0$ και $S_1(LBC) = S_2(ALC)$, έχουμε ότι

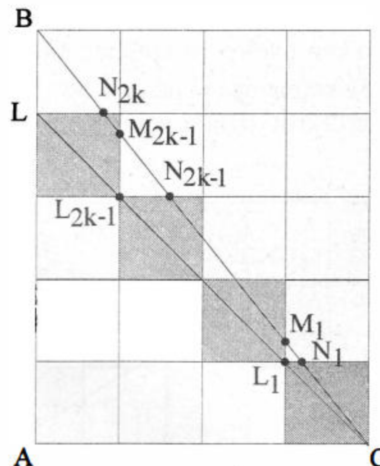
$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$

Το εμβαδόν του τριγώνου LBC είναι k. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η διαγώνιος LC διέρχεται μόνο από μαύρα τετράγωνα (δες το ακόλουθο σχήμα 3). Τότε το μέρος του LBC που είναι χρωματισμένο άσπρο αποτελείται από τα τρίγωνα BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, ..., $M_1L_1N_1$, τα οποία είναι όμοια με το BAC. Το συνολικό εμβαδόν που καταλαμβάνουν είναι:

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) = \frac{1}{4k(2k+1)}(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2) = \frac{4k+1}{12}$$

Επομένως $S_1(LBC) = k - \frac{1}{12}(4k+1) = \frac{1}{12}(8k-1)$ και $f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}$.

Η συνάρτηση αυτή παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές.



σχήμα 3

Πρόβλημα 2

Έστω τρίγωνο ABC του οποίου η μικρότερη γωνία είναι η A. Τα σημεία B και C διαιρούν τον περιγεγραμμένο περί το τρίγωνο ABC κύκλο σε δύο τόξα. Στο τόξο BC που δεν περιέχει το A παίρνουμε ένα σημείο U, διαφορετικό από τα B και C.

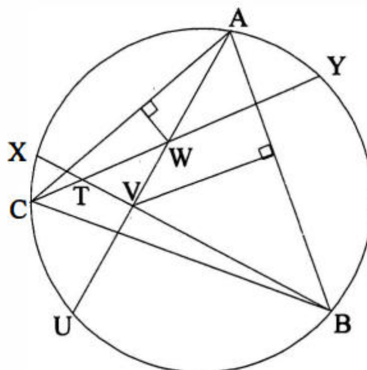
Έστω ότι οι μεσοκάθετες των ευθυγράμμων τμημάτων AB και AC τέμνουν την ευθεία AU στα σημεία V και W αντίστοιχα. Έστω ακόμα ότι οι ευθείες BV και CW τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι ισχύει $AU = TB + TC$.

Λύση

Ας συμβολίσουμε με b και c τις διαμέτρους που είναι μεσοκάθετες των AB και AC αντίστοιχα και ας ορίσουμε έναν προσανατολισμό για τα τόξα. Τότε ο συμβολισμός $\widehat{PQ}$ ορίζει ένα μοναδικό τόξο του κύκλου.

Έστω X, Y τα σημεία στα οποία τέμνουν τον κύκλο οι ευθείες BV και CW αντίστοιχα. Τότε $\widehat{YC} = \widehat{AU}$

και $\widehat{XB} = \widehat{AU}$ λόγω συμμετρίας. Συνεπώς, $\widehat{XB} = \widehat{YC}$, οπότε οι χορδές BX και YC είναι συμμετρικές ως προς τη διάμετρο d, που διέρχεται από το μέσον του τόξου BY (σχήμα 4).
Αφού το σημείο T ανήκει στη μεσοκάθετο d των BY και CX, προκύπτει ότι TB = TY και TC = TX.
Επομένως, AU = BX = BT + TX = TB + TC.



σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί ,που ικανοποιούν τις συνθήκες $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ και $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$, για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μετάθεση $y_1, y_2, \ldots, y_n$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

Λύση

Σε κάθε μετάθεση $\pi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αντιστοιχούμε την τιμή $S(\pi)$ που εκφράζει το άθροισμα $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$. Έστω $r = \frac{(n+1)}{2}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $|S(\pi)| \leq r$, για κάποια μετάθεση π.

Ας θεωρήσουμε την **ταυτοτική** μετάθεση $\pi_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και την αντίστροφη μετάθεση $\widetilde{\pi} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$. Αν $|S(\pi_0)| \leq r$ ή $|S(\widetilde{\pi})| \leq r$, τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Έστω ότι $|S(\pi_0)| > r$ και $|S(\widetilde{\pi})| > r$. Τότε:

$$S(\pi_0) + S(\widetilde{\pi}) = (x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) + (x_n + 2x_{n-1} + \ldots + nx_1) = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n)$$

επομένως έχουμε ότι $|S(\pi_0) + S(\widetilde{\pi})| = (n+1) = 2r$. Αφού καθένας από τους αριθμούς $S(\pi_0)$, $S(\widetilde{\pi})$ ξεπερνά κατ' απόλυτη τιμή το r, θα πρέπει να είναι ετερόσημοι, δηλ. ο ένας θα είναι μεγαλύτερος του r, ενώ ο άλλος μικρότερος του $-r$.

Ξεκινώντας από την π_0, μπορούμε να κατασκευάσουμε μεταθέσεις με συνεχείς εναλλαγές διαδοχικών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει μία ακολουθία μεταθέσεων $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ τέτοια ώστε $\pi_m = \widetilde{\pi}$ και για κάθε $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, η μετάθεση π_{i+1} προκύπτει από την π_i με εναλλαγή δύο διαδοχικών της όρων.

Επομένως, για τις δύο μεταθέσεις $\pi_i = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ και $\pi_{i+1} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ θα υπάρχει ένας δείκτης $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ τέτοιος ώστε:

$$z_k = y_{k+1},\ z_{k+1} = y_k,\ z_j = y_j \text{ για } j \neq k, k+1.$$

Αφού οι αριθμοί x_i δεν ξεπερνούν κατ' απόλυτη τιμή το r, θα έχουμε ότι

$$|S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| = |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = |y_k - y_{k+1}| \leq |y_k| + |y_{k+1}| \leq 2r.$$

Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας $S(\pi_0), S(\pi_1), \ldots, S(\pi_m)$ δεν ξεπερνά το 2r.

Όμως οι πραγματικοί αριθμοί $S(\pi_0)$, $S(\pi_m)$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[-r, r]$ και είναι ετερόσημοι. Συνεπώς, ένας τουλάχιστον από τους $S(\pi_i)$ θα ανήκει στο διάστημα αυτό, δηλ. $|S(\pi_i)| \leq r$ και έχουμε

αποδείξει το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες που όλα τα στοιχεία τους ανήκουν στο σύνολο $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται "ασημένιος" αν, επιπλέον, έχει την ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τα στοιχεία της i γραμμής του μαζί με τα στοιχεία της i στήλης του περιέχουν όλα τα στοιχεία του S.

Να αποδείξετε ότι:

i. δεν υπάρχει ασημένιος πίνακας στην περίπτωση $n = 1997$,

ii. υπάρχουν άπειρες το πλήθος τιμές του n για τις οποίες υπάρχουν ασημένιοι πίνακες.

Απόδειξη

(i) Έστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας **"ασημένιος"** πίνακας A $n \times n$. Έστω x ένα σταθερό στοιχείο του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, το οποίο δεν ανήκει στην κύρια διαγώνιο του πίνακα A. (Ένα τέτοιο στοιχείο υπάρχει, αφού το πλήθος των στοιχείων του πίνακα είναι $2n - 1$, ενώ η διαγώνιος αποτελείται από n). Την ένωση των στοιχείων της i–γραμμής και της i–στήλης θα την καλούμε **"i–σταυρό"**. Το δοσμένο στοιχείο x θα εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε σταυρό. Αν λοιπόν το x βρισκεται στην i–γραμμή και στη j–στήλη, τότε θα ανήκει ταυτόχρονα στον **" i–σταυρό"** και στον **" j–σταυρό"**. Θα λέμε τότε ότι οι δύο αυτοί σταυροί είναι "x–συνδεδεμένοι". (Π.χ. στον ακόλουθο πίνακα A ο 1ος και ο 4ος σταυρός είναι 6–συνδεδεμένοι). Επομένως, όλοι οι n σταυροί σχηματίζουν ζεύγη x–συνδεδεμένα, άρα ο n πρέπει να είναι άρτιος, ενώ ο 1997 είναι περιττός.

(ii) Για $n = 2$ ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι **"ασημένιος"**. Για $n = 4$ έχουμε τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Η κατασκευή τέτοιων πινάκων γενικεύεται. Έστω ότι υπάρχει ένας $n \times n$ **"ασημένιος"** πίνακας A. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν $2n \times 2n$ **"ασημένιο"** πίνακα D της μορφής: $D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$, όπου ο B είναι ο $n \times n$ πίνακας, που προκύπτει αν σε κάθε στοιχείο του A προσθέσουμε το $2n$, ενώ ο C προκύπτει αν στον πίνακα B αντικαταστήσουμε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του με $2n$. Τότε ο πίνακας D που προκύπτει είναι **"ασημένιος"**.

Για να το αποδείξουμε ας θεωρήσουμε τον **"i–σταυρό"** του D και έστω ότι $i \le n$ (η άλλη περίπτωση αποδεικνύεται όμοια). Ο σταυρός αυτός αποτελείται από τον **"i–σταυρό"** του A, την i–γραμμή του B και την i–στήλη του C. Ο **"i–σταυρός"** του A περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, ενώ η i–γραμμή του B και η i–στήλη του C περιέχουν όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{2n, 2n + 1, \ldots, 4n - 1\}$.

Πρόβλημα 5

Να βρεθούν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) ακεραίων $\alpha \ge 1$, $\beta \ge 1$, που ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha^{(\beta^2)} = \beta^{\alpha}$.

Λύση

Έστω (α, β) μία λύση της εξίσωσης και d ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β. Τότε $\alpha = du$ και $\beta = dv$, όπου u, v είναι σχετικά πρώτοι. Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$(du)^{dv^2} = (dv)^{u} \qquad (1)$$

Συγκρίνοντας τους εκθέτες dv^2 και u, προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $dv^2 = u$

Τότε από την (1) έχουμε ότι $u = v$. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι θα έχουμε ότι $u = v = 1$ και από την $dv^2 = u$ προκύπτει ότι $d = 1$. Επομένως, $\alpha = \beta = 1$, η οποία είναι λύση της (1).

Περίπτωση 2. $dv^2 > u$

Τότε η (1) γράφεται ως εξής: $d^{dv^2-u} \cdot u^{dv^2} = v^u$ (2) και έχουμε ότι το u^{dv^2} διαιρεί το v^u. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι, έχουμε ότι u = 1 και η (2) γίνεται $d^{dv^2-1} = v$ (3).
Αν d = 1 τότε λόγω της (3) θα είναι και v = 1 και η ανισότητα $dv^2 > u$ είναι αδύνατη. Για $d \geq 2$ έχουμε ότι $d^{dv^2-1} \geq 2^{2v^2-1} \geq 2^{2v-1} > v$, για v = 1, 2, 3, … και η ανισότητα αυτή έρχεται σε αντίφαση με την (3), οπότε δεν υπάρχουν λύσεις στην περίπτωση αυτή.

Περίπτωση 3. $dv^2 < u$

Οπότε d < u. Τότε η (1) γράφεται ως εξής: $u^{dv^2} = d^{u-dv^2} \cdot v^u$ (4) και έχουμε ότι το v^u διαιρεί το u^{dv^2}. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι, προκύπτει ότι v = 1 και η (4) γίνεται $u^d = d^{u-d}$ (5)
Οι βάσεις της εκθετικής αυτής εξίσωσης ικανοποιούν την ανίσωση d < u, επομένως οι εκθέτες θα έχουν την αντίθετη διάταξη, δηλ. d < u – d.
Λόγω της (5), κάθε πρώτος διαιρέτης p του d, θα είναι και πρώτος διαιρέτης του u. Θεωρώντας y, z τους μέγιστους εκθέτες για τους οποίους ισχύει ότι $p^y|u$, $p^z|d$, έχουμε λόγω της (5) ότι yd = z(u – d), οπότε y > z. Επομένως το d διαιρεί το u, δηλ. u = kd, για κάποιον ακέραιο k. Παρατηρούμε ότι $k \geq 3$, καθώς u > 2d. Αντικαθιστώντας όπου u = kd στη σχέση (5), έχουμε ότι
$k = d^{k-2}$ (6).
Τότε το d δεν είναι 1. Επομένως, $d \geq 2$.
Αν k = 3, τότε λόγω της (6) είναι d = 3, οπότε u = 9, α = 27, β = 3.
Αν k = 4, τότε λόγω της (6) είναι $d^2 = 4$, οπότε d = 2, u = 8, α = 16, β = 2.
Αν $k \geq 5$, τότε $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ και η (6) είναι αδύνατη.
Επομένως η εξίσωση έχει τρεις λύσεις: (α, β) = (1, 1), (27, 3) και (16, 2).

Πρόβλημα 6

Έστω n γνήσια θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με f(n) το πλήθος των τρόπων που μπορεί να παρασταθεί ο n ως άθροισμα δυνάμεων του 2 με ακέραιους εκθέτες οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι από το μηδέν.

Παραστάσεις οι οποίες διαφέρουν μόνο ως προς τη διάταξη των προσθετέων, θεωρούνται ως ταυτόσημες. Παραδείγματος χάριν ισχύει f(4) = 4, διότι ο αριθμός 4 μπορεί να παρασταθεί με τους ακόλουθους τέσσερις τρόπους: 4 ή 2 + 2 ή 2 + 1 + 1 ή 1 + 1 + 1 + 1.

Να αποδείξετε, ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$, ισχύει $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

Απόδειξη

Αν n = 2k + 1 είναι ένας περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει προσθετέο το "1". Σβήνοντας το "1" θα έχουμε μία αναπαράσταση του αριθμού 2k και αντιστρόφως. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση:

f(2k + 1) = f(2k) (1)

Επιπλέον, αν n = 2k είναι ένας άρτιος ακέραιος, τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει δύο τύπους: είτε θα περιέχει προσθετέους ίσους με 1 ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση σβήνοντας ένα "1" έχουμε μία αναπαράσταση του 2k – 1 όπως προηγουμένως. Επομένως, έχουμε μία 1 – 1 σχέση των αναπαραστάσεων 1ου τύπου του 2k και όλων των αναπαραστάσεων του 2k – 1. Στην περίπτωση του 2ου τύπου αναπαραστάσεων (χωρίς προσθετέους ίσους με "1"), μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους προσθετέους με 2 και να επιτύχουμε μία αναπαράσταση του k και η αντιστοίχιση αυτή είναι 1 – 1. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση:

f(2k) = f(2k – 1) + f(k) (2)

Οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν για κάθε ακέραιο $k \geq 1$. Προφανώς, f(1) = 1.
Ας θέσουμε f(0) = 1, ώστε η σχέση (1) να ισχύει και για k = 0. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα.
Αντικαθιστώντας στη (2) το f(2k – 1) με f(2k – 2) –λόγω της (1)– καταλήγουμε στην εξίσωση:

f(2k) – f(2k – 2) = f(k), για k = 1, 2, 3, …

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές για $k = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n), \text{ για } n = 1, 2, 3, \ldots \quad (3)$$

Θα υπολογίσουμε κατόπιν τα ζητούμενα φράγματα της ακολουθίας $f(2^n)$, για $n = 1, 2, \ldots$

Ο υπολογισμός του άνω φράγματος είναι εύκολος, καθώς οι προσθετέοι στη σχέση (3) είναι όλοι μικρότεροι από τον τελευταίο. Επιπλέον, αφού $2 = f(2) \le f(n)$, για $n \ge 2$, έχουμε ότι

$$f(2n) = 2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \le 2 + (n-1)f(n) \le f(n) + (n-1)f(n) = nf(n), \text{ για } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Συνεπώς,
$f(2^n) \le 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1}) \le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f(2^{n-2}) \le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-3}) \le \ldots \le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$

Αφού $2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$, για $\nu \ge 3$, έχουμε αποδείξει το άνω φράγμα.

Για το κάτω φράγμα θα αποδείξουμε πρώτα ότι: $f(b+1) - f(b) \ge f(\alpha+1) - f(\alpha)$ (4)
όπου $b \ge \alpha > 0$ ακέραιοι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί.

Πράγματι, αν οι α και b είναι και οι δύο άρτιοι, τότε λόγω της (1) θα έχουμε μηδενικά και από τα δύο μέλη της (4), ενώ αν είναι και οι δύο περιττοί, τότε λόγω της (2) θα έχουμε $f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right)$, $f(\alpha+1) - f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ και η ανισότητα (4) ισχύει αφού η f είναι αύξουσα.

Ας θεωρήσουμε τους ακεραίους $r \ge k \ge 1$, όπου r άρτιος. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις στην (4) των αριθμών $\alpha = r - j$, $b = r + j$ για $j = 0, \ldots, k-1$ και προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν, καταλήγουμε στην $f(r+k) - f(r) \ge f(r+1) - f(r-k+1)$.

Αφού ο r είναι άρτιος, θα έχουμε ότι $f(r+1) = f(r)$, επομένως $f(r+k) + f(r-k+1) \ge 2f(r)$, για $k = 1, \ldots, r$
Προσθέτοντας τις ανισότητες για $k = 1, \ldots, r$ έχουμε ότι: $f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \ge 2rf(r)$.
Λόγω της (3) το άθροισμα του δεξιού μέλους της ανισότητας ισούται με $f(4r) - 1$, οπότε
$f(4r) \ge 2rf(r) + 1 > 2rf(r)$, για κάθε ακέραιο $r \ge 2$.

Θέτοντας $r = 2^{m-2}$ έχουμε ότι $f(2^m) > 2^{m-1}\cdot f(2^{m-2})$ (5)

Για να εξασφαλίσουμε ότι ο $r = 2^{m-2}$ είναι άρτιος θα πρέπει $m > 2$, ωστόσο η (5) ισχύει και για $m = 2$.

Ας θεωρήσουμε κατόπιν έναν ακέραιο n μεγαλύτερο του 1. Έστω s θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $2s \le n$ και ας εφαρμόσουμε την ανισότητα (5) για $m = n, n-1, \ldots, n-2s+2$, οπότε παίρνουμε

$$f(2^n) > 2^{n-1}\cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-4}) > 2^{n-1}\cdot 2^{n-3}\cdot 2^{n-5}\cdot f(2^{n-6}) > \ldots >$$

$$2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2s+1)}\cdot f(2^{n-2s}) = 2^{s(n-s)}\cdot f(2^{n-2s})$$

Αν τώρα ο n είναι άρτιος, θέτουμε $s = \frac{n}{2}$, ενώ αν ο n είναι περιττός θέτουμε $s = \frac{n-1}{2}$.

Προκύπτουν τότε οι ανισότητες:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}}\cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}}, \text{ αν ο n είναι άρτιος}$$

$$f(2^n) > 2^{\frac{(n^2-1)}{4}}\cdot f(2^1) = 2^{\frac{(n^2-1)}{4}}\cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}, \text{ αν ο n είναι περιττός.}$$

Έχουμε λοιπόν υπολογίσει το ζητούμενο κάτω φράγμα για κάθε ακέραιο $n \ge 2$ (το οποίο επίσης ισχύει και για $n = 1$).

Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο

Λευκοπούλειος Διαγωνισμός Πιθανοτήτων

31/1/1998

1. Κάθε πακέτο του απορρυπαντικού TIDE περιέχει ένα κουπόνι πάνω στο οποίο αναγράφεται ένα από τα γράμματα T, I, D ή E. Αν ο πελάτης συγκεντρώσει όλα τα γράμματα της λέξης TIDE παίρνει ένα πακέτο δωρεάν. Έστω ότι όλα τα γράμματα έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανισθούν σε ένα πακέτο. Να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει i πακέτα (i = 0, 1, 2) ένα άτομο που αγοράζει 8 πακέτα του απορρυπαντικού.

2. Έστω ότι ν ανδρόγυνα κάθονται με τυχαίο τρόπο στις 2ν θέσεις ενός α) ευθύγραμμου, β) κυκλικού, τραπεζιού. Ποια είναι η πιθανότητα οι σύζυγοι κ συγκεκριμένων ανδρογύνων να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο;

3. Ο ανελκυστήρας μιας ν-όροφης οικοδομής ξεκινάει από το ισόγειο της οικοδομής με κ άτομα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες αποβίβασης.

α) και των κ ατόμων σε διαφορετικό όροφο

β) r συγκεκριμένων ατόμων από τα κ στον ίδιο όροφο και όλων των υπολοίπων σε διαφορετικούς μεταξύ τους ορόφους οι οποίοι να διαφέρουν επίσης και από τον όροφο όπου αποβιβάστηκαν τα r άτομα.

γ) r_i ατόμων από τα κ στον i όροφο $i = 1, 2, \ldots, \nu$ $(r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = \kappa)$.

Λύσεις των θεμάτων

1. Έστω p_i, i = 0, 1, 2 η πιθανότητα να κερδίσει ο αγοραστής i πακέτα. Για την εύρεση της p_2 παρατηρούμε ότι το πλήθος των συνολικών περιπτώσεων είναι 4^8 ενώ των ευνοϊκών $\frac{8!}{(2!)^4}$ [αν x είναι το πλήθος των μεταθέσεων των στοιχείων TTIIDDEE, θεωρώντας ότι τα ζεύγη γραμμάτων TT, II, DD, EE αποτελούνται από διαφορετικά στοιχεία (π.χ. T_1T_2, I_1I_2, D_1D_2, E_1E_2) καταλήγουμε σε $2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!$ μεταθέσεις με 8 διαφορετικά στοιχεία. Άρα $(2!)^4 x = 8!$].

Επομένως $p_2 = \dfrac{\frac{8!}{(2!)^4}}{4^8} \simeq 0{,}03845.$

Για τον υπολογισμό του p_0 παρατηρούμε ότι $p_0 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ όπου A_1, A_2, A_3, A_4 είναι τα ενδεχόμενα να μην εμφανισθεί το γράμμα T, I, D, E αντίστοιχα, στις 8 αγορές. Όμως

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

όπου $S_1 = P(A_1) + \ldots + P(A_4) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^8$

$$S_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \ldots + P(A_3 \cap A_4) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$S_3 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^8$$

$$S_4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $p_0 = 0{,}377$. Τέλος $p_1 = 1 - p_0 - p_2 = 0{,}58455$

2. α) Το πλήθος των συνολικών αποτελεσμάτων είναι (2ν)! Για την εύρεση των ευνοϊκών αποτελεσμάτων, θεωρούμε τα κ συγκεκριμένα ανδρόγυνα ως κ στοιχεία και συμπληρώνουμε με τα υπόλοιπα 2(ν – κ) άτομα των οποίων η σχετική θέση δε μας ενδιαφέρει. Έτσι έχουμε να μεταθέσουμε αρχικά 2(ν – κ) + κ = 2ν – κ στοιχεία και στη συνέχεια για τα κ συγκεκριμένα ανδρόγυνα να θεωρήσουμε τις

μεταθέσεις ΑΓ και ΓΑ. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $(2\nu-\kappa)!2^{\kappa}$ και η ζητούμενη πιθανότητα $\dfrac{(2\nu-\kappa)!2^{\kappa}}{(2\nu)!}$

β) Σε κάθε κυκλική μετάθεση r στοιχείων αντιστοιχούν r (απλές) μεταθέσεις. Έτσι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων r στοιχείων είναι (r − 1)! Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο όπως πριν, βρίσκουμε την πιθανότητα $\dfrac{(2\nu-\kappa-1)!2^{\kappa}}{(2\nu-1)!}$.

3. Το πλήθος των συνολικών περιπτώσεων είναι και στα τρία ερωτήματα ίσο με ν^{κ}

α) Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις παρατηρούμε ότι: το πρώτο άτομο μπορεί να διαλέξει τον όροφο που θα κατέβει κατά ν τρόπους, για κάθε τέτοια επιλογή το δεύτερο άτομο επιλέγει τον όροφο που θα κατέβει κατά ν − 1 τρόπους … το κ άτομο επιλέγει τον όροφο που θα κατέβει με ν − κ + 1 τρόπους.
Άρα υπάρχουν $\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)=\Delta_{\kappa}^{\nu}$ τρόποι επιλογής και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\Delta_{\kappa}^{\nu}}{\nu^{\kappa}}=\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}{\nu^{\kappa}},\ \kappa\leqslant\nu$$

β) Θεωρούμε τα r άτομα που θέλουμε να κατέβουν στον ίδιο όροφο ως ένα άτομο – ομάδα, οπότε το πρόβλημα ανάγεται στο ερώτημα (α) με (κ − r) + 1 άτομα, αντί κ. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\dfrac{\Delta_{\kappa-r+1}^{\nu}}{\nu^{\kappa}}$

γ) Τα άτομα που κατεβαίνουν στον πρώτο όροφο μπορούν να διαλεχτούν κατά $\binom{\kappa}{r_1}$ τρόπους, για κάθε τέτοια επιλογή τα άτομα που κατεβαίνουν στο δεύτερο όροφο μπορούν να διαλεχτούν κατά $\binom{\kappa-r_1}{r_2}$ τρόπους κ.λ.π. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{\kappa}{r_1}\binom{\kappa-r_1}{r_2}\binom{\kappa-r_1-r_2}{r_3}\ldots 1}{\nu^{\kappa}}=\frac{\kappa!}{r_1!r_2!\ldots r_{\kappa!}}\cdot\frac{1}{\nu^{\kappa}}$$

Θέματα Ολυμπιάδων

Η συνάρτηση φ(ν) του Euler και οι εφαρμογές της

Δ. Γ. Κοντογιάννης

1.1. Ορισμός.

Η συνάρτηση $\varphi\colon \mathbb{N}^{*}\to\mathbb{N}^{*}$ που ορίζεται με τον εξής τρόπο: φ(ν) είναι το πλήθος θετικών ακεραίων που είναι μη μεγαλύτεροι του ν και σχετικά πρώτοι με το ν, ονομάζεται συνάρτηση Euler (Euler totient function). Ο πίνακας μας δείχνει μερικές τιμές της φ(ν).

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
φ(ν)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

1.2. Θεώρημα.

Για τη συνάρτηση Euler ισχύει:

α) $\varphi(\nu)\leqslant\nu$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^{*}$

β) $\varphi(\nu)=\nu-1$ αν και μόνο αν ο ν είναι πρώτος.

Απόδειξη

α) Από τον ορισμό 1.1. η (α) προκύπτει άμεσα.

β) Αν ο ν είναι πρώτος, τότε είναι σχετικά πρώτος με κάθε αριθμό $\kappa < \nu$. Άρα $\varphi(\nu) = \nu - 1$.

Αν ο ν είναι σύνθετος τότε υπάρχει $\kappa < \nu$ με κ/ν, άρα $(\kappa, \nu) = \kappa$, επομένως $\varphi(\nu) < \nu - 1$.

Εφαρμογή. Αν ν σύνθετος, τότε $\varphi(\nu) \leqslant \nu - 2$.

1.3. Θεώρημα

Αν π πρώτος, τότε $\varphi(\pi^\nu) = \pi^\nu - \pi^{\nu-1} = \pi^\nu\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη

Οι μόνοι αριθμοί του συνόλου $1, 2, \ldots, \pi^\nu$ που δεν είναι σχετικά πρώτοι με τον π^ν, είναι όσοι διαιρούνται με τον π, δηλ. οι αριθμοί κπ ($\kappa \in \mathbb{N}$, με $\kappa\pi \leqslant \pi^\nu$). Προφανώς το πλήθος των κ είναι $\pi^{\nu-1}$. Ώστε στο σύνολο $1, 2, \ldots, \pi^\nu$ υπάρχουν ακριβώς $\pi^{\kappa-1}$ που δεν είναι σχετικά πρώτοι με τον π^ν, άρα $\varphi(\pi^\nu) = \pi^\nu - \pi^{\nu-1}$.

1.4. Θεώρημα

Έστω $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ με $(n, k) = 1$ και $\nu \in \mathbb{Z}$. Τότε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των αριθμών $\nu, k + \nu, 2k + \nu, \ldots, (n-1)k + \nu$ με τον n είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιους ακεραίους ℓ και m με $0 \leqslant \ell < m < n$ ώστε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των $\ell k + \nu$ και $mk + \nu$ με τον N να είναι ίσα. Τότε η διαφορά $(\ell - m)k$ είναι διαιρετή με τον n πράγμα άτοπο, αφού $\ell - m < n$ και $(k, n) = 1$.

Ώστε όλα τα υπόλοιπα είναι διαφορετικά μεταξύ τους, δηλαδή ...

1.5. Θεώρημα

Η συνάρτηση $\varphi(\nu)$ είναι πολλαπλασιαστική, δηλ. $\varphi(kn) = \varphi(k)\varphi(n)$ αν $(k, n) = 1$.

Απόδειξη

Επειδή $\varphi(1) = 1$, η πρόταση ισχύει αν $k = 1$ ή $n = 1$. Έστω ότι $\kappa > 1$, $n > 1$

Όπως έχουμε ορίσει, ο $\varphi(kn)$ είναι το πλήθος των όρων του **πίνακα:**

1	2	…	τ	…	k
k + 1	k + 2	…	k + τ	…	2k
2k + 1	2k + 2	…	2k + τ	…	3k
…	…	…	…	…	…
(n − 1)k + 1	(n − 1)k + 2	…	(n − 1)k + τ	…	nk

οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον nk, δηλ. με το πλήθος των όρων που είναι σχετικά πρώτοι με τον k και με τον n ταυτόχρονα. Έστω $\tau \in \mathbb{N}^*$ με $\tau \leqslant k$. Αν $(\tau, k) = 1$, τότε όλοι οι αριθμοί της στήλης είναι σχετικά πρώτοι με τον k. Αν $(\tau, k) > 1$ τότε δεν υπάρχει αριθμός της στήλης σχετικά πρώτος με τον k.

Το πλήθος των αριθμών $\tau \leqslant k$ με $(\tau, k) = 1$ είναι προφανώς $\varphi(k)$ και είναι ο αριθμός των στηλών, των οποίων όλοι οι όροι είναι σχετικά πρώτοι. Ας θεωρήσουμε μια τέτοια στήλη π.χ. την τ. Τότε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των στοιχείων της στήλης με τον n είναι $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Όμως το πλήθος των στοιχείων της στήλης που είναι σχετικά πρώτο με τον n είναι $\varphi(n)$. Άρα ...

1.6. Πόρισμα

Αν $k_1, k_2, \ldots, k_\nu \in \mathbb{N}^*$, σχετικά πρώτοι ανά δύο τότε $\varphi(k_1k_2\ldots k_\nu) = \varphi(k_1)\varphi(k_2)\ldots\varphi(k_\nu)$.

Η απόδειξη επαγωγικά.

1.7. Θεώρημα

Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και $n = \pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\ldots\pi_\nu^{k_\nu}$ η κανονική ανάλυση του n, τότε $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu}\right)$

Απόδειξη

Από το 1.6. έχουμε $\varphi(\pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\ldots\pi_\nu^{k_\nu}) = \varphi(\pi_1^{k_1})\varphi(\pi_2^{k_2})\ldots\varphi(\pi_\nu^{k_\nu}) =$

$$(\pi_1^{k_1} - \pi_1^{k_1-1})(\pi_2^{k_2} - \pi_2^{k_2-1})\ldots(\pi_\nu^{k_\nu} - \pi_\nu^{k_\nu-1}) = \pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\ldots\pi_\nu^{k_\nu}\left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu}\right) =$$

$$n\left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu}\right) =$$

1.8. Θεώρημα

Είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varphi(\nu) = +\infty$.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varphi(\nu) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\nu}$ (1) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Προφανώς η (1) ισχύει για $\nu = 1$. Έστω $\nu > 1$ και $\nu = 2^\kappa \pi_1^{k_1}\ldots\pi_\tau^{k_\tau}$, όπου $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_\tau \in \mathbb{N}$.

Ως γνωστό αν $\alpha \in \mathbb{N}$ με $\alpha > 2$, τότε $\alpha - 1 > \sqrt{\alpha}$ και αν $\beta \in \mathbb{N}^*$, τότε $\beta - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\beta}{2}$.

Τότε από το 1.7. έχουμε: $\varphi(\nu) \geqslant 2^{\kappa-1}\pi_1^{k_1-1}\pi_2^{k_2-1}\ldots\pi_\tau^{k_\tau-1}(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1)\ldots(\pi_\tau - 1) \geqslant$

$$2^{\kappa-1}\pi_1^{k_1-1}\pi_2^{k_2-1}\ldots\pi_\tau^{k_\tau-1} \geqslant 2^{\kappa-1}\pi_1^{\frac{1}{2}k_1}\pi_2^{\frac{1}{2}k_2}\ldots\pi_\tau^{\frac{1}{2}k_\tau} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\nu}$$

1.9. Θεώρημα

Αν ν σύνθετος φυσικός τότε $\varphi(\nu) \leqslant \nu - \sqrt{\nu}$ (1)

Απόδειξη

Έστω π_1 ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του ν. Τότε $\pi_1 \leqslant \sqrt{\nu}$ και $\varphi(\nu) \leqslant \nu\left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right) \leqslant \nu - \frac{\nu}{\sqrt{\nu}}$.

1.10. Θεώρημα

Αν ν ακέραιος και $\nu \geqslant 2$, τότε ο $\varphi(\nu)$ είναι άρτιος.

Απόδειξη

Έστω $\nu = 2^\kappa\lambda$, όπου $\kappa \in \mathbb{N}^*$ και λ περιττός. Τότε $\varphi(2^\kappa\lambda) = \varphi(2^\kappa)\varphi(\lambda) = 2^{\kappa-1}\varphi(\lambda)$ δηλ. άρτιος.

Αν $\nu = \pi^\kappa\lambda$, όπου π περιττός πρώτος και $(\pi^\kappa, \lambda) = 1$ τότε $\varphi(\pi^\kappa\lambda) = \varphi(\pi^\kappa)\varphi(\lambda) = (\pi^\kappa - \pi^{\kappa-1})\varphi(\lambda)$.

Αλλά $\pi^\kappa - \pi^{\kappa-1} = \pi^{\kappa-1}(\pi - 1)$ άρτιος. Ώστε $\varphi(\nu)$ άρτιος, αν $\nu \geqslant 2$.

1.11. Θεώρημα Gauss

Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\sum\limits_{\delta/\nu}\varphi(\delta) = \nu$, όπου δ θετικός διαιρέτης του ν.

Την (όχι δύσκολη) απόδειξη του θεωρήματος 11 αφήνουμε στους αναγνώστες. Εδώ θα δώσουμε το εξής παράδειγμα:

Έστω ν = 12. Οι διαιρέτες του 12 είναι οι: 1, 2, 3, 4, 6 και 12.

Τότε $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$.

1.12. Θεώρημα Euler

Αν α, ν θετικοί ακέραιοι, και $(\alpha, \nu) = 1$, τότε $\alpha^{\varphi(\nu)} \equiv 1(\mathrm{mod}\nu)$.

Το θεώρημα είναι μια "γενίκευση" του γνωστού θεωρήματος του Fermat και εξαιρετικά χρήσιμο στη θεωρία αριθμών. Η απόδειξή του αφήνεται στον αναγνώστη.

Ασκήσεις

1) Αν $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, να αποδείξετε ότι $\varphi(\nu) = \sum\limits_{\kappa=1}^{\nu-1}\left[\frac{1}{(\nu, \kappa)}\right]$ (1)

Απόδειξη

Αν $\nu > 1$, $\kappa < \nu$ τότε $(\nu, \kappa) = 1$, οπότε $\left[\frac{1}{(\nu, \kappa)}\right] = 1$.

Ακόμα, αν $(\nu, \kappa) > 1$, τότε $\left[\frac{1}{(\nu, \kappa)}\right] = 0$.

Τότε το β΄ μέλος της (1) είναι ίσο με το πλήθος των φυσικών αριθμών $< \nu$ που είναι σχετικά πρώτος προς τον ν και για $\nu > 1$, ο αριθμός είναι $\varphi(\nu)$.

2) Να προσδιορίσετε τους $\nu \in \mathbb{N}^*$, για τους οποίους $4 \nmid \varphi(\nu)$

Λύση

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 1, 2, 4 και οι αριθμοί π^κ και $2\pi^\kappa$, όπου π πρώτος της μορφής $4t + 3$.

3) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη (x, n), όπου $x, n \in \mathbb{N}$, με $n > x$ ώστε $d(x) = d(n)$, $\varphi(x) = \varphi(n)$, $\sigma(x) = \sigma(n)$. (με $d(x)$ συμβολίζουμε το πλήθος και με $\sigma(\nu)$ το άθροισμα των διαιρετών του ν και οι συναρτήσεις $d(\nu)$, $\sigma(\nu)$ είναι πολλαπλασιαστικές).

Λύση

π.χ. $x = 3^\kappa 568$, $n = 3^\kappa 638$ με $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$

4) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ ώστε $\varphi(\nu) - \varphi(\nu - 1) > \kappa$ και $\varphi(\nu) - \varphi(\nu + 1) > \kappa$.

5) Να προσδιορίσετε τους φυσικούς x, για τους οποίους $\varphi(x) = \frac{4}{5}x$ (1)

Λύση

Επειδή $\varphi(x) \in \mathbb{N}^*$, τότε $\frac{4}{5}x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 5^\alpha n$ με $\alpha \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$ και $(n, 5) = 1$.

Ακόμα $\varphi(5^\alpha n) = \frac{4}{5}5^\alpha n \Leftrightarrow \varphi(5^\alpha)\cdot\varphi(n) = 4\cdot 5^{\alpha-1}\cdot n \Leftrightarrow (5^\alpha - 5^{\alpha-1})\varphi(n) = 4\cdot 5^{\alpha-1}\cdot n \Leftrightarrow$

$4\cdot 5^{\alpha-1}\cdot\varphi(n) = 4\cdot 5^{\alpha-1}\cdot n \Leftrightarrow \varphi(n) = n \Leftrightarrow n = 1 \Leftrightarrow n = 5^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$

6) Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x - \varphi(x)) = x$ (1), όπου π πρώτος.

7) Να προσδιορίσετε το άθροισμα $\varphi(1) + \varphi(\pi) + \ldots + \varphi(\pi^\kappa)$, όπου π πρώτος και $\kappa \in \mathbb{N}^*$.

Απάντηση

Είναι $\varphi(1) + \varphi(\pi) + \ldots + \varphi(\pi^\kappa) = 1 + (\pi - 1) + \ldots + \pi^\kappa - \pi^{\kappa-1} = \pi^\kappa$

8) Αν $(\alpha, \beta) = \delta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\frac{\delta}{\varphi(\delta)}$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα 1.7. έχουμε:

$$\frac{\varphi(\alpha\beta)}{\alpha\beta} = \prod_{\pi/\alpha\beta}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{\prod_{\pi/\alpha}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\prod_{\pi/\beta}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)}{\prod_{\pi/\alpha\beta}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)} = \frac{\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\frac{\varphi(\beta)}{\beta}}{\frac{\varphi(\delta)}{\delta}} = \frac{1}{\alpha\beta}\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\frac{\delta}{\varphi(\delta)}$$

9) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι $\varphi(\alpha) \geqslant \frac{\alpha}{d(\alpha)}$ (1)

Απόδειξη

Έστω $\alpha = \pi_1^{\kappa_1}\pi_2^{\kappa_2}\ldots\pi_\nu^{\kappa_\nu}$. Τότε θα έχουμε:

$$\varphi(\alpha)d(\alpha) = \alpha\left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu}\right)(\kappa_1 + 1)\ldots(\kappa_\nu + 1) \geqslant \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^\nu\cdot 2^\nu = \alpha$$

10) Αν $\alpha = \pi_1^{\kappa_1}\pi_2^{\kappa_2}\ldots\pi_\nu^{\kappa_\nu}$, να αποδειχθεί ότι $\sigma(\alpha)\varphi(\alpha) = \alpha^2\left(1 - \frac{1}{\pi_1^{1+\kappa_1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2^{1+\kappa_2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu^{1+\kappa_\nu}}\right)$

Απόδειξη

Ως γνωστόν $\sigma(\alpha) = \frac{\pi_1^{1+\kappa_1} - 1}{\pi_1 - 1}\cdot\frac{\pi_2^{1+\kappa_2} - 1}{\pi_2 - 1}\cdot\ldots\cdot\frac{\pi_\nu^{1+\kappa_\nu} - 1}{\pi_\nu - 1}$ ενώ $\varphi(\alpha) = \alpha\left(\frac{\pi_1 - 1}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_2 - 1}{\pi_2}\right)\ldots\left(\frac{\pi_\nu - 1}{\pi_\nu}\right)$,

οπότε $\sigma(\alpha)\varphi(\alpha) = \alpha\frac{\pi_1^{1+\kappa_1} - 1}{\pi_1}\frac{\pi_2^{1+\kappa_2} - 1}{\pi_2}\ldots\frac{\pi_\nu^{1+\kappa_\nu} - 1}{\pi_\nu}$ ή

$$\sigma(\alpha)\varphi(\alpha) = \alpha^2\frac{\pi_1^{1+\kappa_1} - 1}{\pi_1^{1+\kappa_1}}\frac{\pi_2^{1+\kappa_2} - 1}{\pi_2^{1+\kappa_2}}\ldots\frac{\pi_\nu^{1+\kappa_\nu} - 1}{\pi_\nu^{1+\kappa_\nu}} = \alpha^2\left(1 - \frac{1}{\pi_1^{\kappa_1+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2^{\kappa_2+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu^{\kappa_\nu+1}}\right)$$

11) Με τα δεδομένα της 10 να αποδείξετε ότι $\sigma(\alpha)\varphi(\alpha) > \alpha^2\left(1 - \frac{1}{\pi_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu^2}\right)$

Απόδειξη προφανής αφού $\kappa_i \geqslant 1$

12) Να αποδείξετε ότι $\frac{\varphi(\nu)\sigma(\nu) + 1}{\nu} \in \mathbb{Z}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ αν ο ν είναι πρώτος, ενώ δεν είναι ακέραιος αν ν διαιρείται με το τετράγωνο ενός πρώτου.

Απόδειξη

Αν ν πρώτος, τότε $\varphi(\nu) = \nu - 1$ και $\sigma(\nu) = \nu + 1$. Τότε $\frac{\varphi(\nu)\sigma(\nu) + 1}{\nu} = \frac{\nu^2}{\nu} = \nu \in \mathbb{Z}$

Αν όμως $\nu = \pi^\tau\kappa$ $(\tau \geqslant 2)$ και $(\pi, \kappa) = 1$, τότε

$$\frac{\varphi(\nu)\sigma(\nu) + 1}{\nu} = \frac{\varphi(\pi^\tau)\varphi(\kappa)\sigma(\nu) + 1}{\pi^\tau\kappa} = \frac{\pi(\pi^{\tau-1} - \pi^{\tau-2})\varphi(\kappa)\sigma(\kappa) + 1}{\pi^\tau\kappa}$$

Επομένως αφου ο π δε διαιρεί τον αριθμητή, ο αριθμός δεν είναι ακέραιος.

13) Σύμφωνα με την εικασία του C. Goldbach κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων.
Ο P. Erdös έκανε αργότερα την εξής εικασία: για κάθε άρτιο αριθμό 2ν, υπάρχουν ακέραιοι p, q τέτοιοι ώστε: $\varphi(p) + \varphi(q) = 2\nu$ (1).
Να εξετάσετε αν η υπόθεση Goldbach ικανοποιεί την υπόθεση Erdös.

Απάντηση

Ναι. Πράγματι,αν ισχύει η εικασία Goldbach, τότε για κάθε ν υπάρχουν πρώτοι p, q τέτοιοι ώστε:
$2\nu + 2 = p + q = \varphi(p) + 1 + \varphi(q) + 1$ ή $2\nu = \varphi(p) + \varphi(q)$, δηλ. η εικασία του Erdös ισχύει.

14) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha = \pi_1^{\kappa_1}\pi_2^{\kappa_2}\ldots\pi_\nu^{\kappa_\nu}$ η κανονική ανάλυση του α, τότε:

$$1 > \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} > \left(1 - \frac{1}{\pi_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\pi_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{\pi_\nu}\right)$$

15) α) Να αποδείξετε ότι $\sum_{\delta/\nu}\frac{1}{\delta} = \frac{\sigma(\nu)}{\nu}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma(\nu!)}{\nu!} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$.

16) (Θεωρ. Lucas) Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ και υπάρχει ακέραιος α τέτοιος ωστε

i) $\alpha^{\nu-1} \equiv 1(\text{mod}\nu)$

ii) $\alpha^{\frac{\nu-1}{\rho}} \not\equiv 1(\text{mod}\nu)$, για κάθε πρώτο ρ, με $\rho/\nu - 1$ να αποδείξετε ότι ο ν είναι πρώτος.

17) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\frac{\nu^2}{2} < \varphi(\nu)\,\sigma(\nu) < \nu^2$

$59^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "

ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1999

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς **χ, ψ** αν

$$x^2(\psi+2)=4375$$

2. Αν **α, β, γ** φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε **α+β+γ=20** και **3α+2β+3γ=67**, να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathbf{A=(2\alpha+\beta+2\gamma)(4\alpha+3\beta+4\gamma)}.$$

3. Το σημείο $\mathbf{M_1}$ είναι το μέσον του **ΑΒ,** το $\mathbf{M_2}$ το μέσον του $\mathbf{AM_1}$, το $\mathbf{M_3}$ το μέσον του $\mathbf{AM_2}$ κτλ., και το $\mathbf{M_{10}}$ το μέσον του $\mathbf{AM_9}$. Αν $\mathbf{AB=2^{11}.3}$, να βρείτε το $(\mathbf{AM_{10}})$.

4. Έστω ορθογώνιο **ΑΒΓΔ** με **ΑΒ = 2ΑΔ** και ισόπλευρο τρίγωνο **ΑΒΜ**, όπου το **Μ** βρίσκεται προς το μέρος της **ΓΔ**. Αν **Ε** είναι το μέσον της **ΒΜ**, να υπολογίσετε τη γωνία **ΒΕΓ**.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν

$$\alpha=(8^7-9.8^6+9.8^5-9.8^4+9.8^3-9.8^2+9.8-1)^{1000}$$

και

$$\beta=1024^{200}.625^{1000}$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\alpha^2 \text{ και } \beta.$$

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A=1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+\ldots+9^9+10^{10}$$

δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

3. Έστω **Δ** σημείο της βάσης τριγώνου **ΑΒΓ** και **Ι** το μέσον του **ΑΔ**. Η **ΒΙ** τέμνει την **ΑΓ** στο **Ε και η ΓΙ** την **ΑΒ** στο **Ζ**. Αν **ΔΗ//ΑΓ** και **ΔΘ//ΑΒ**, να αποδείξετε ότι το **ΕΖΗΘ** είναι παραλληλόγραμμο. (Η σημείο της ΒΙ, Θ σημείο της ΓΙ)

4. Να χωρίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά **4cm** σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα, των οποίων το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι **25cm**.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν α, β, γ ρητοί θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathbf{(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)}$$

είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

2. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο **Ο** και ακτίνα **2** και τετράγωνο **ΟΑΒΓ**. Αν το τετράγωνο και ο κύκλος έχουν κοινό μέρος εμβαδού ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τετραγώνου, να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν **τέσσεροι** διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτούς να είναι δύναμη του **5**.

4. Έστω **ΑΒΓ** ισόπλευρο τρίγωνο και **Δ, Ε** σημεία των **ΑΒ, ΑΓ**. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα **ΔΕ, ΒΕ, ΓΔ** αποτελούν πλευρές τριγώνου.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

που ικανοποιεί τη σχέση $f(1) = 1999$

και $f(1) + f(2) + \dots + f(\nu) = \nu^2 f(\nu)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Να προσδιορίσετε τον $f(1999)$

2. Να βρείτε όλους τους ακέραιους ν, για τους οποίους η εξίσωση $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{\nu}{x+\psi}$ έχει ακέραιες λύσεις x, ψ $(x \neq -\psi)$.

3. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ πραγματικοί αριθμοί, ονομάζουμε άθροισμα Cesaro τον αριθμό $s_1 + s_2 + \dots + s_\nu$, όπου $s_\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, \dots, \nu)$

Αν το άθροισμα Cesaro των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{99}$ είναι **1000**, να υπολογίσετε το άθροισμα Cesaro των αριθμών $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{99}$.

4. Από το βαρύκεντρο Θ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Κ,Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{BK}{AK}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma\Lambda}{\Lambda A}\right)^2 \geqslant \frac{1}{8}$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\alpha_\nu = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+2)}$,

να αποδείξετε ότι $\alpha_{1999} < \frac{1}{4}(2{,}999)$.

2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί **α, β, γ, δ** του διαστήματος $I = [\nu^2, (\nu+1)^2]$ που να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

β) Να προσδιορίσετε όλους τους φυσικούς αριθμούς **α, β, γ, δ** του διαστήματος $I = [\nu^3, (\nu+1)^3]$ που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

3. Θεωρούμε την παράσταση $K = x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + \dots + x_\nu\psi_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ όπου οι αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 ή 1. Αν (ν) το πλήθος των 2ν-άδων $(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu)$ για τις οποίες ο αριθμός **Κ** είναι άρτιος και το πλήθος των 2ν-άδων αυτών, για τις οποίες ο **Κ** είναι περιττός, να αποδείξετε ότι $\frac{A(\nu)}{\Pi(\nu)} = \frac{2^\nu + 1}{2^\nu - 1}$.

4. Έστω **ΑΒΓΔ** κυρτό τετράπλευρο. Αν **κ = max(AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ)** να αποδείξετε ότι $4\kappa^2 \geqslant A\Gamma^2 + B\Gamma^2$.

Υποδείξεις

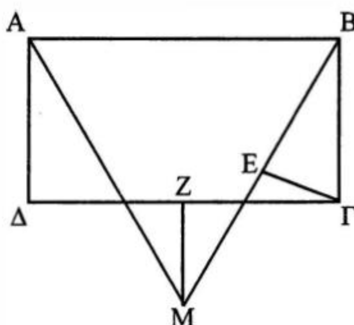
Β΄ Γυμνασίου

1. Είναι $4375 = 5^4 \cdot 7$
Άρα x = 5 και y = 173 ή x = 25 και y = 5 ή x = 1 και y = 4373.

2. Είναι $A = (67-20)(67+20) = 47 \cdot 87$, αφού $2\alpha + \beta + 2\gamma = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = 67 - 20$ κ.λ.π.

3. Είναι $AM_1 = \frac{1}{2}AB = 2^{10} \cdot 3$, $AM_2 = \frac{1}{2}AM_1 = 2^9 \cdot 3$ κ.λ.π., οπότε $AM_{10} = 2 \cdot 3 = 6$

4. Φέρνουμε $MZ \perp \Delta\Gamma$. Η γωνία $B\widehat{E}\Gamma$ είναι 75°, γιατί ΒΓ // ΜΖ, οπότε $\Gamma\widehat{B}E = 30°$ κ.λ.π.

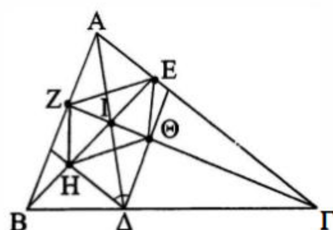


Γ΄ Γυμνασίου

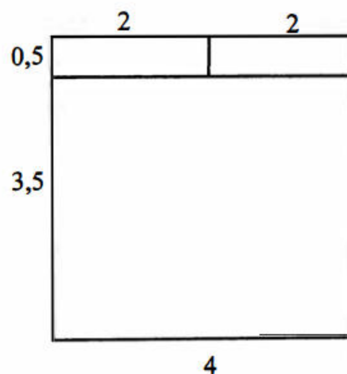
1. Η βάση στον α γράφεται (9 = 8 + 1)
$8^7 - 8^7 - 8^6 + 8^6 + 8^5 - 8^5 - 8^4 + 8^4 + 8^3 - 8^3 - 8^2 + 8^2 + 8 - 1 = 7$
Άρα $\alpha = 7^{1000}$ και $\beta = 2^{2000} \cdot 5^{4000} = 50^{2000}$

2. Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος (που είναι 7), γιατί τα τελευταία ψηφία των $1^1, 2^2, \ldots, 10^{10}$ είναι 1, 4, …, 0.

3. Τα τρίγωνα ΙΔΘ και ΙΑΖ είναι ίσα και άρα ΙΖ = ΙΘ. Όμοια ΙΕ = ΙΗ.



4. Μια λύση φαίνεται στο αντίστοιχο σχήμα. Οι μαθητές έδωσαν και άλλες λύσεις.

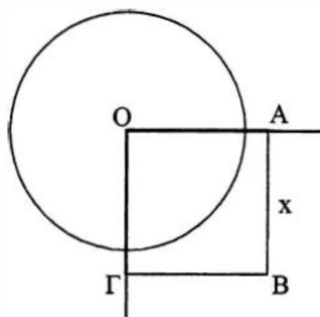


Α΄ Λυκείου

1. Η εξίσωση γράφεται $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha^2\beta^2\gamma^2$ και άρα $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha^2 = \alpha^2(\beta^2\cdot\gamma^2 + 1)$ δηλαδή $(\alpha + \gamma)(\beta + \alpha) = \alpha^2(\beta^2\gamma^2 + 1)$ και κυκλικώς.

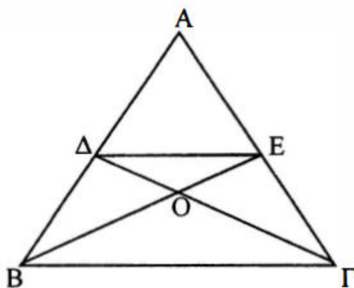
   Άρα $(\beta^2\gamma^2 + 1)(\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha^2\gamma^2 + 1) = \dfrac{(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\alpha+\gamma)^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, δηλ. ο αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο ρητού.

2. Έστω x η πλευρά του τετραγώνου. Τότε $\frac{3}{5}x^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. Άρα $x^2 = \frac{5}{12}\pi R^2$, δηλαδή $x = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{5\pi}{3}}$



3. Δύο από τους τέσσερις αριθμούς θα είναι ή άρτιοι ή περιττοί και το άθροισμά τους θα είναι άρτιος και άρα όχι δύναμη του 5.

4. Έστω Ο το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ. Τότε ΔΕ < ΟΔ + ΟΕ < ΒΕ + ΓΔ. Έστω ΔΓ > ΒΕ τότε ΔΓ < ΔΕ + ΕΓ < ΔΕ + ΒΕ αφού ΒΕ > ΕΓ ($60° > \widehat{ΕΒΓ}$)



Β΄ Λυκείου

1. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε $f(\nu) = \nu^2 f(\nu) - (\nu - 1)^2 f(\nu - 1)$.

   Δηλαδή $(\nu^2 - 1)f(\nu) = (\nu - 1)^2 f(\nu - 1)$ ή $f(\nu) = \frac{\nu-1}{\nu+1}f(\nu - 1)$ $\nu = 2, 3, \ldots$

   Άρα $f(\nu) = \frac{1}{3}, \frac{2}{4} \ldots \frac{\nu-1}{\nu+1}, f(1) = \frac{2}{\nu(\nu+1)}f(1)$ δηλαδή $f(1999) = \frac{1}{1000}$.

2. Έχουμε $(x + y)^2 = \nu\, x\, y$, δηλαδή $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - (\nu - 2)\frac{x}{y} + 1 = 0$.

   Η διακρίνουσα $\Delta = (\nu - 2)^2 - 4$ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο $(\nu - 2)^2 - 4 = \kappa^2$, οπότε $(\nu - 2 - \kappa)(\nu - 2 + \kappa) = 4$. Επομένως $\nu = 4$ και $\kappa = 0$.

3. Το ζητούμενο άθροισμα Cesaro είναι:

   $$\frac{1 + (1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{99})}{100} = \frac{100 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{99}}{100} =$$

   $$\frac{100 + 99\cdot 1000}{100} = 1 + 990 = 991$$

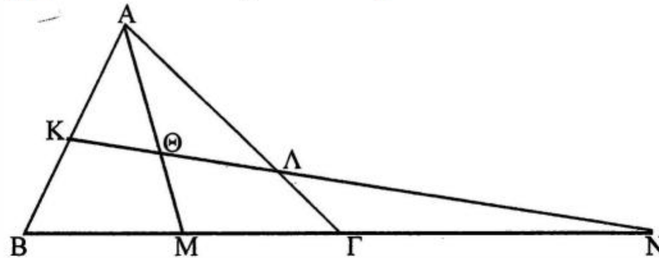
4. Έστω Ν η τομή της ΚΛ με τη ΒΓ και ΑΡ // ΚΛ με Ρ επί της ΒΓ. Τότε $\frac{ΒΚ}{ΚΑ}=\frac{ΒΝ}{ΝΡ}$ και $\frac{ΜΘ}{ΘΑ}=\frac{ΜΝ}{ΝΡ}=\frac{1}{2}$.

Άρα 2ΜΝ = ΝΡ οπότε $\frac{ΒΚ}{ΚΑ}=\frac{ΒΝ}{2ΜΝ}$(1)

Επίσης $\frac{ΓΛ}{ΛΑ}=\frac{ΓΝ}{ΝΡ}=\frac{ΓΝ}{2ΜΝ}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΒΚ}{ΚΑ}+\frac{ΓΛ}{ΛΑ}=\frac{ΒΝ+ΓΝ}{2ΜΝ}=1$ (3)

Έστω $α=\frac{ΒΚ}{ΚΑ}$ και $β=\frac{ΓΛ}{ΛΑ}$. Τότε $α^4+β^4\geqslant\frac{1}{8}(α+β)^4=\frac{1}{8}$



Γ΄ Λυκείου

1. Έχουμε $\frac{1}{ν(ν+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ν}-\frac{1}{ν+2}\right)$ και έτσι $α_ν=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{ν+1}-\frac{1}{ν+2}\right)$.

Άρα $α_{1999}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{1000}\right)$, (Μπορούμε να δούμε ότι $4α_{1999}>2{,}998$).

2. Παρατηρούμε ότι αν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ είναι όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ο λόγος $ω=\frac{x}{y}$, όπου $x, y\in\mathbb{N}^*$ με $(x, y)=1$ και $δ=α\frac{x^3}{y^3}\in\mathbb{N}$ ή $α=κy^3$ ($κ\in\mathbb{N}^*$). Ώστε $α=κy^3$, $β=κy^2x$, $γ=κyx^2$, $δ=κx^2$.

Αφού όμως α, β, γ, δ ∈ Ι, ώστε $x, y\in\left[\sqrt[3]{\frac{ν^2}{κ}},\sqrt[3]{\frac{(κ+1)^2}{κ}}\right]$.

Όμως $\sqrt[3]{(ν+1)^2}-\sqrt[3]{ν}=\frac{2ν+1}{\sqrt[3]{(ν+1)^4}+\sqrt[3]{ν^4}+\sqrt[3]{ν^2(ν+1)^2}}<\frac{2ν+1}{ν+1+1}=1$, οι x, y πρέπει να είναι διαφορετικοί φυσικοί, άτοπο. Για $κ, y\in\left[\sqrt[3]{\frac{ν^3}{k}},\sqrt[3]{\frac{(ν+1)^3}{k}}\right]$ έχουμε πλάτος 1 και $κ=1$, $y=ν$, $x=ν+1$.

3. Για να είναι ο Κ περιττός, πρέπει ένας περιττός αριθμός από τους x_iy_i να είναι 1 και οι άλλοι 0. Αλλά για τον i το ζεύγος (x_i, y_i) παίρνει τιμές (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) και υπάρχει μια μόνο περίπτωση ώστε $x_iy_i=1$, ενώ 3 περιπτώσεις για να είναι $x_iy_i=0$. Έτσι για κ = 1, …, ν το πλήθος των δυνατοτήτων για να είναι τα κ μονώνυμα $x_iy_i=0$ είναι $\binom{ν}{κ}3^κ$.

Τότε $Π(ν)=\binom{ν}{ν-1}3^{ν-1}+\binom{ν}{ν-3}3^{ν-3}+\ldots$

Και $Α(ν)=\binom{ν}{ν}3^ν+\binom{ν}{ν-2}3^{ν-2}+\ldots$

Όμως: $Α(ν)+Π(ν)=(3+1)^ν=2^{2ν}$, ενώ $Α(ν)-Π(ν)=(3-1)^ν=2^ν$.

Τότε: $Π(ν)=\frac{2^{2ν}-2^ν}{2}=\frac{2^ν(2^ν-1)}{2}$ και $Α(ν)=\frac{2^{2ν}+2^ν}{2}=\frac{2^ν(2^ν+1)}{2}$

Οπότε: $\frac{A(\nu)}{\Pi(\nu)} = \frac{2^\nu + 1}{2^\nu - 1}$

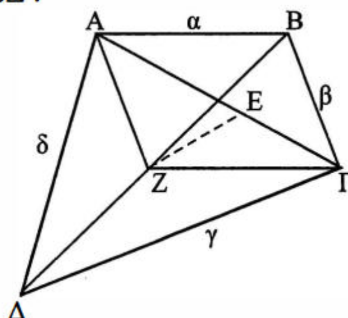
4. Αν Ε, Ζ τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα, τότε

$\alpha^2 + \delta^2 = 2AZ^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$, $\beta^2 + \gamma^2 = 2\Gamma Z^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$ $AZ^2 + Z\Gamma^2 = 2EZ^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2 + 4EZ^2$

Οπότε: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geqslant A\Gamma^2 + B\Delta^2$

Άρα $4\max(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2) \geqslant A\Gamma^2 + B\Delta^2$.



16η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

6 Φεβρουαρίου 1999

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Θέματα μεγάλων τάξεων

1. Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma > 0$. Ν' αποδειχτεί ότι: $[f(xy)]^2 \leq f(x^2)f(y^2)$

2. Πρόβλημα 10ον του 5΄ κεφαλαίου των ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ του ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ.
Ευρείν τρίγωνον ορθογώνιον όπως ο εν τω εμβαδώ αυτού, προσλαβών το εν συναμφοτέρω της τε υποτεινούσης και μιας των ορθών, ποιή δοθέντα αριθμόν. Δηλαδή
Να βρείτε ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε αν προστεθεί στην αριθμητική τιμή του εμβαδού του το μέτρο μιας κάθετου πλευράς του, βρίσκουμε δοσμένο αριθμό.
Οι αριθμοί εδώ είναι **ακέραιοι**. Να βρεθεί το τρίγωνο όταν ο δοσμένος αριθμός είναι 75.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ συμβολίζουμε με Δ, Ε και Ζ τα ίχνη των υψών του που άγονται από τις κορυφές Α, Β και Γ αντίστοιχα και με Η το ορθόκεντρό του. Αν Θ είναι το σημείο τομής της ΕΖ με την ευθεία ΒΓ, Κ, Λ τα σημεία τομής των ευθειών ΑΒ, ΑΓ με την παράλληλη από το Δ προς την ΕΖ και Ρ, Π τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΗ, ΖΕ, να δειχθεί ότι οι ευθείες ΡΠ, ΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΘΚΛ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Πάνω σε μια περιφέρεια κύκλου C θεωρούμε ν διαφορετικά σημεία ($\nu \geqslant 3$), τα οποία αν ενωθούν ανά δύο μεταξύ τους χωρίζουν τον κύκλο σε περιοχές (κομμάτια). Να προσδιοριστεί ο μέγιστος αριθμός περιοχών του κυκλικού δίσκου που ορίζονται με τον τρόπο αυτό.

Θέματα μικρών τάξεων

1. Έστω ν σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και έστω x, y θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $xy = \nu x + \nu y$ Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του x συναρτήσει του ν.

2. Ν' αποδειχθεί ότι εάν α και β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^{2000} + \beta^{2000} = \alpha^{1998} + \beta^{1998}$ τότε ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2$.

3. Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο και σημεία Δ επί της πλευράς ΑΒ, Ε επί της ΑΓ, $Δ_1$ και $Ε_1$ επί της ΒΓ τέτοια ώστε $ΔΒ + ΒΔ_1 = ΑΒ$ και $ΕΓ + ΓΕ_1 = ΑΒ$. Να προσδιοριστεί η (μικρότερη) γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $ΔΕ_1$ και $ΕΔ_1$.

4. Ορίζουμε το **εναλλακτικό άθροισμα** ενός συνόλου $Α = \{α_1, α_2, \ldots, α_κ\}$ πραγματικών αριθμών ($α_1 < α_2 < \ldots < α_κ$) τον αριθμό $Σ_Α = α_κ - α_{κ-1} + α_{κ-2} - \ldots + (-1)^{κ-1}α_1$
(π.χ. αν $Α = \{1, 2, 5, 7\}$, τότε $Σ_Α = 7 - 5 + 2 - 1 = 3$).
Θεωρούμε τα εναλλακτικά αθροίσματα όλων των υποσυνόλων του συνόλου $Α = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ τα οποία και αθροίζουμε. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του τελικού αθροίσματος;

Σημείωση: Το Σάββατο 6/2/99 πραγματοποιήθηκε με απόλυτη επιτυχία η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα στην οποία πήραν μέρος περίπου 250 "μικροί" και "μεγάλοι". Αν και τα θέματα ήταν υψηλού επιπέδου υπήρξαν πολλοί μαθητές που όχι μόνο τα αντιμετώπισαν με επιτυχία, αλλά έδωσαν και διαφορετικές λύσεις από αυτές της επιτροπής. Όλα τα προβλήματα των "μεγάλων" λύθηκαν με δύο ή τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως και αρκετά από τα προβλήματα των "μικρών". Κυρίως αυτές τις λύσεις θα παρουσιάσουμε εδώ.

Λύσεις (Θέματα «μεγάλων»)

1. Απόδειξη: Έστω διανύσματα του χώρου, με συντεταγμένες $\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{α}x^2 \\ \sqrt{β}x \\ \sqrt{γ} \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{α}y^2 \\ \sqrt{β}y \\ \sqrt{γ} \end{bmatrix}$. Ισχύει η ανισότητα Cauchy – Schwarz: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 \leqslant |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2 \Leftrightarrow$
$(\sqrt{α}x^2\cdot\sqrt{α}y^2 + \sqrt{β}x\cdot\sqrt{β}y + \sqrt{γ}\cdot\sqrt{γ})^2 \leqslant (αx^4 + βx^2 + γ)(αy^4 + βy^2 + γ) \Leftrightarrow [f(xy)]^2 \leqslant f(x^2)f(y^2)$. Το ίσον αν και μόνο αν $α = β = 0$ ή ($β = 0$ και $x = -y$).

Την κομψή αυτή λύση έδωσε ο μαθητής Ματσούκας Θεοφάνης (Δράμα) αλλά και άλλοι μαθητές.

Βέβαια το θέμα μπορούσε να αποδειχθεί και με κατάλληλες πράξεις.

2. 1η Λύση: Θέλουμε $βγ + 2β = 150$ (το ίδιο αν $βγ + 2γ = 150$)οπότε $β(γ + 2) = 150$
$150 = 2\cdot3\cdot5\cdot5 = 1\cdot150 = 2\cdot75 = 3\cdot50 = 5\cdot30 = 6\cdot25 = 10\cdot15$

Από τις περιπτώσεις αυτές βρίσκουμε $α = 17$, $β = 15$, $γ = 8$ ή $α = 17$, $β = 8$, $γ = 15$

Την απλή αυτή λύση έδωσαν οι μαθητές Οικονόμου Αθηνά (Κέρκυρα), Χαλούλος Γεώργιος (Αθήνα), Σταυρόπουλος Μενέλαος (Πύργος).

2η Λύση: Ο αριθμοί α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση $α^2 = β^2 + γ^2$ έχουν τη μορφή $β = 2κλt$, $γ = (κ^2 - λ^2)t$, $α = (κ^2 + λ^2)t$ όπου $κ, λ, t \in \mathbf{N}^*$.

Τότε $Ε + γ = 75 \Leftrightarrow t(κ - λ)(κ + λ)(κλ + 1) = 75$

Τελικά βρίσκουμε $β = 8$, $γ = 15$, $α = 17$

Τη λύση αυτή έδωσαν Αντωνακόπουλος Σπύρος (Αθήνα), Ματσούκας Θ. (Δράμα), Μπουρνή Θεοδ. (Ρόδος).

3. Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΗΖ είναι εγγράψιμο και έχει κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου το Ρ. Τότε ΡΕ = ΡΖ και ακόμα ΜΕ = ΜΖ όπου Μ το μέσον της ΒΓ. Οπότε ΡΜ ⊥ ΕΖ. Αλλά και ΡΛ ⊥ ΕΖ, άρα η ΡΛ διέρχεται από το μέσον Μ της ΒΓ. Μένει να αποδείξουμε ότι το ΘΚΜΛ είναι εγγράψιμο. Στο πλήρες τετράπλευρο ΕΗΖΒΓ οι διαγώνιες ΑΗ, ΖΕ τέμνουν τη διαγώνιο ΒΓ στα σημεία Δ, Θ, που είναι συζυγή αρμονικά των Β, Γ, δηλ. $\dfrac{ΔΒ}{ΔΓ} = \dfrac{ΘΒ}{ΘΓ}$ (1)

Ακόμα αφού $Α\widehat{Ζ}Ε = Α\widehat{Κ}Λ = \widehat{Γ}$ το ΒΚΓΛ είναι εγγράψιμο, άρα $ΒΔ\cdotΔΓ = ΚΔ\cdotΔΛ$

Από την (1) βρίσκουμε:

$$\frac{ΘΓ}{ΔΓ} = \frac{ΘΒ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{ΘΓ - ΔΓ}{ΔΓ} = \frac{ΘΒ - ΔΒ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{ΔΘ}{ΔΓ} = \frac{ΔΘ - 2ΒΔ}{ΔΒ} \Leftrightarrow \frac{ΔΘ}{ΔΓ} = \frac{2ΒΔ\cdotΔΓ}{ΔΓ - ΔΒ} (2)$$

Είναι όμως $\left.\begin{array}{l}\Delta M = \Delta\Gamma - M\Gamma \\ \Delta M = BM - B\Delta\end{array}\right\}$ Επομένως: $2\Delta M = \Delta\Gamma - B\Delta$ οπότε: $\Delta M = \dfrac{\Delta\Gamma - B\Delta}{2}$ (3)

$\Delta\Theta\cdot\Delta M \overset{(1),(2)}{=\!=} \dfrac{2B\Delta\cdot\Delta\Gamma}{B\Gamma - B\Delta}\cdot\dfrac{\Delta\Gamma - \Delta B}{2} = B\Delta\cdot\Delta\Gamma = \Delta K\cdot\Delta\Gamma$, δηλ. το τετράπλευρο ΘΚΜΛ είναι εγγράψιμο.

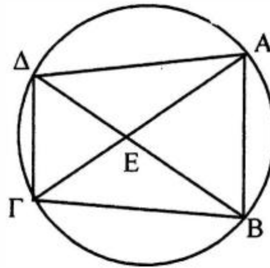
Τη λύση αυτή έδωσαν οι Ματσούκας Θεοφ. (Δράμα), Αντωνακόπουλος Σπ. (Αθήνα), Σταυρόπουλος Μ. (Πύργος).

Η Μπουρνή Θεοδ. απέδειξε την άσκηση με τη βοήθεια Αναλυτικής Γεωμετρίας.

4. Προφανώς ο μέγιστος αριθμός περιοχών σχηματίζεται όταν οι διάμετροι ανα τρεις διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Σχηματίζεται τότε ένα πλήρες γράφημα, για το οποίο ισχύει ο τύπος Euler: Κ + Ε = Α + Ι, όπου Κ ο αριθμός των "κορυφών", Ε των "εδρών", Α των "ακμών".

Παρατηρούμε ότι ανά 4 τα σημεία του κύκλου ορίζουν ένα εσωτερικό (στο Σχ. 2 το Ε) που διαιρεί καθεμιά από τις διαγωνίους στην οποία ανήκει σε δυο μέρη.



Έτσι το πληθος των ακμών του σχήματος είναι : ν τα τόξα του κύκλου + $\binom{\nu}{2}$ οι πλευρές και διαγώνιες $+ 2\binom{\nu}{4}$ τα εσωτερικά τμήματα.

Ενώ οι κορυφές του είναι ν τα σημεία + $\binom{\nu}{4}$ τα εσωτερικά σημεία.

Από τον Euler λοιπόν έχουμε $\nu + \binom{\nu}{4} + E = \binom{\nu}{2} + 2\binom{\nu}{4} + \nu + 1 \Leftrightarrow E = \binom{\nu}{4} + \binom{\nu}{2} + 1$

Με τον τρόπο αυτό έλυσαν την άσκηση οι Μπουρνή Θεοδ., Ματσούκας Θεοφ., Οικονόμου Αθ.
Ο Αντωνακόπουλος Σ. έλυσε την άσκηση χωρίς τον τύπο Euler, μόνο με τη βοήθεια υπολογισμών

Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο
Λευκοπούλειος Διαγωνισμός
7 Φεβρουαρίου 1999

Στρατής Κουνιάς
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πρόεδρος Ελληνικού Στατιστικού Ινστιτούτου

Να προσπαθήσετε όσα θέματα μπορείτε

Θέμα 1

ν συμμετρικοί κύβοι (ζάρια) ρίχνονται συγχρόνως 6^ν φορές (ν = 1, 2, …)

α) Να βρεθεί η πιθανότητα π_ν εμφάνισης ν-πλού 6 τουλάχιστον μία φορά (για ν = 1 τουλάχιστον ένα 6 σε 6 ρίψεις ενός ζαριού, για ν = 2 τουλάχιστον 1 φορά εξάρες ή δύο, σε $6^2 = 36$ ρίζεις δυο ζαριών, κ.ο.κ.).

β) Να δειχτεί ότι η π_ν είναι φθίνουσα συνάρτηση του ν.

γ) Να βρεθεί το όριο του π_ν όταν $\nu \to \infty$.

Θέμα 2

Τέσσεροι φίλοι, οι Α, Β, Γ, Δ, είχαν ένα απόγευμα ελεύθερο και είχε ο καθένας να κάνει μία από τις 5 επιλογές: κινηματογράφο, προπόνηση, καφετέρια, ανάβαση στο βουνό, διάβασμα. Και οι πέντε επιλογές είναι το ίδιο ενδιαφέρουσες για τους 4 φίλους και ο καθένας κάνει τυχαία μία επιλογή.
Ποια η πιθανότητα:

α) Μόνο οι Α και Β να πάνε για προπόνηση.
β) Οι 3 τουλάχιστον από τους 4 να πάνε κινηματογράφο.
γ) Τουλάχιστον ένας να πάει καφετέρια και τουλάχιστον δύο να πάνε κινηματογράφο.

Θέμα 3

Οι μαθητές μιας τάξης έλαβαν μέρος σε εξετάσεις Ιστορίας που ήταν να απαντήσουν σε 10 ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση δίνονταν τρεις απαντήσεις από τις οποίες η μία ήταν σωστή και ο μαθητής επέλεγε ποια ήταν η σωστη απάντηση σε κάθε ερώτηση. Οι μαθητές που δεν είχαν διαβάσει επέλεγαν τυχαία μία από τις τρεις απαντήσεις σε κάθε ερώτηση.

Ο βαθμός ήταν όσες και οι σωστές απαντήσεις του μαθητή.

α) Ποια η πιθανότητα να πάρει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 5 και έτσι να περάσει το μάθημα ένας αδιάβαστος μαθητής;

β) Δείξε ότι η πιθανότητα π να περνά το μάθημα, τουλάχιστον ένας στους 3 αδιάβαστους μαθητές, είναι μεγαλύτερη του 0,5.

γ) Δείξε ότι από 35 αδιάβαστους μαθητές, η πιθανότητα π_{35} ένα τουλάχιστον να πάρει βαθμό τουλάχιστον 7 είναι μεγαλύτερη του 0,5.

Λύσεις

Θέμα 1

α) $\nu = 1$. Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί 6 σε μια ρίψη ενός ζαριού είναι $\frac{5}{6}$ και στις 6 ρίψεις του ενός ζαριού είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^6$. Επομένως η πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον ένα 6 σε 6 ρίψεις ενός ζαριού είναι $\pi_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6$

$\nu = 2$. Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε

$$\pi_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{36} = 1 - \left(1 - \frac{1}{6^2}\right)^{6^2}$$

Η πιθανότητα να εμφανιστεί ένα τουλάχιστον ν-πλο 6 σε 6^ν ρίψεις ν ζαριών είναι: $\Pi_\nu = 1 - \left(1 - \frac{1}{6^\nu}\right)^{6^\nu}$

β) Όταν το ν αυξάνει, τότε το 6^ν και το $\left(1 - \frac{1}{6^\nu}\right)$ αυξάνει και το π_ν φθίνει.

γ) Επειδή το όριο του $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι το e^x όταν $n \to \infty$, τότε το όριο του π_ν είναι το $1 - e^{-1}$ όταν $n \to \infty$.

Θέμα 2

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι $5^4 = 625$.

α) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $4^2 = 16$ διότι οι Γ και Δ πάνε στις 4 άλλες δραστηριότητες. Επομένως $\pi = \frac{4^2}{5^4} = 0{,}0256$

β) Αν πάνε οι 3 στον κινηματογράφο, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι $\binom{4}{3} \times 4 = 16$ και αν πάνει οι 4 στον κινηματογράφο οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι 1. Τότε η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$\pi = \frac{(16+1)}{625} \approx 0{,}0272$

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Ένας πάει στην καφετέρια και 2 στον κινηματογράφο, υπάρχουν $\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} \times 3 = 36$ ευνοϊκές περιπτώσεις.

ii) Ένας πάει στην καφετέρια και 3 στον κινηματογράφο, υπάρχουν 4 ευνοϊκές περιπτώσεις.

iii) Δύο πάνε στην καφετέρια και 2 στον κινηματογράφο, υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ ευνοϊκές περιπτώσεις.

Επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι $\pi = \frac{(36+4+6)}{625} \approx 0.088$.

Θέμα 3

Υπάρχουν 3^{10} δυνατές απαντήσεις του μαθητή. Για να απαντήσει σωστά ο μαθητής σε **k** ερωτήσεις, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι: $\binom{10}{k} \times 2^{10-k}$, $k = 0, 2, \ldots, 10$.

α) Για να περάσει ο μαθητής θα πρέπει να απαντήσει σε 5 τουλάχιστον ερωτήσεις. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{10}{5} \times 2^5 + \binom{10}{6} \times 2^4 + \binom{10}{7} \times 2^3 + \binom{10}{8} \times 2^2 + \binom{10}{9} \times 2^1 + \binom{10}{10} \times 2^0 = 12585$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\pi = \frac{12585}{3^{10}} \approx 0{,}213$

β) Η πιθανότητα να μην περάσει κανείς από τους τρεις είναι $(1 - 0{,}213)^3 \approx 0{,}487$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\pi = 1 - 0{,}487 \approx 0{,}513$

γ) Για να πάρει ένας μαθητής βαθμό τουλάχιστον 7, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{10}{7} \times 2^3 + \binom{10}{8} \times 2^2 + \binom{10}{9} \times 2 + \binom{10}{10} = 1161$$

Επομένως για να πάρει ο μαθητής βαθμό κάτω από 7 η πιθανότητα είναι $1 - \frac{1161}{3^{10}} \approx 0{,}98$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\pi_{35} = 1 - 0{,}98^{35} = 0{,}501$.



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί - Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Υπεύθυνοι στήλης: **Δούναβης Α. - Λουρίδας Σ. - Τυρλής Ι.**



Ολυμπιακές Προσεγγίσεις

του Σωτήρη Λουρίδα

Συνάρτηση Euler

Συνάρτηση Euler[1] ονομάζεται η συνάρτηση $y = \varphi(x)/\mathbb{N}$ με $\varphi(x)$ να παριστάνει το πλήθος των θετικών ακεραίων που αφ' ενός μεν είναι μικρότεροι ή ίσοι του x, αφ' ετέρου είναι πρώτοι προς το x ($\varphi(1) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$ κ.τ.λ.) Για τη συνάρτηση αυτή ισχύει $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. Αν ο α είναι αριθμός ακέραιος πρώτος και κ θετικός ακέραιος τότε $\varphi(\alpha^{\kappa}) = \alpha^{\kappa} - \alpha^{\kappa-1} = \alpha^{\kappa} \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$. Αν ο θετικός ακέραιος x_0 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, $x_0 = \rho_1^{x_1} \cdot \rho_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \rho_\nu^{x_\nu}$ όπου $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ φυσικοί αριθμοί τότε

$$\varphi(x) = (\rho_1^{x_1} - \rho_1^{x_1-1}) \cdot (\rho_2^{x_2} - \rho_2^{x_2-1}) \cdot \ldots \cdot (\rho_\nu^{x_\nu} - \rho_\nu^{x_\nu-1})$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x_0\left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_\nu}\right)$$

π.χ. $\varphi(10) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι όταν $y = \varphi(x)/\mathbb{N}$ η συνάρτηση Euler και $\varphi(x) = \frac{x}{2}$.

Λύση

Έστω θετικός ακέραιος x_0 ώστε $\varphi(x_0) = \frac{x_0}{2}$.

Θεωρούμε $x_0 = \rho_1^{x_1} \cdot \rho_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \rho_\nu^{x_\nu} \Rightarrow$

$$\rho_1^{x_1} \cdot \rho_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \rho_\nu^{x_\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho_\nu}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\rho_1^{x_1} \cdot \rho_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \rho_\nu^{x_\nu} \Rightarrow$$

$$2(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1)\ldots(\rho_\nu - 1) = \rho_1\rho_2\ldots\rho_\nu$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο ρ_1 είναι ο μικρότερος απ' όλους τότε, αναγκαστικά, $\rho_1 = 2$.

Οπότε: $(\rho_2 - 1)(\rho_3 - 1)\ldots(\rho_\nu - 1) = \rho_2\rho_3\ldots\rho_\nu$.

Άτοπο αφού $(\rho_2 - 1)(\rho_3 - 1)\ldots(\rho_\nu - 1) < \rho_2\rho_3\ldots\rho_\nu$.

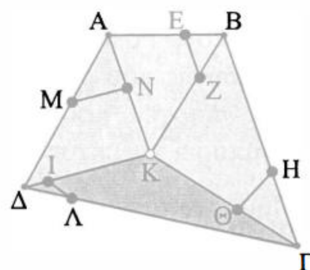
Άρα ο x_0 δε μπορεί να έχει πρώτο παράγοντα εκτός και είναι της μορφής $x_0 = 2^{\rho}$ όπου ρ θετικός ακέραιος.

Αντίστροφα $\varphi(2^{\kappa}) = 2^{\kappa} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2^{\kappa}$

2. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε την επιφάνεια που δημιουργείται αν από την επιφάνεια που ορίζει αυτό "βγάλουμε" ένα από τα σημεία της που δεν ανήκει σε μία από τις πλευρές του (φανταστείτε μια αδιάστατη τρύπα). Δείξτε ότι η επιφάνεια αυτή μπορεί να διαμεριστεί σε τέσσερα σύνολα ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση

Θεωρώ Ε την επιφάνεια που δημιουργείται όπως αναφέραμε στην εκφώνιση και Κ η θέση της "τρύπας". Προφανώς η σχέση xσy = "x παράλληλο ευθύγραμμο τμήμα με y" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας που προφανώς διαμερίζει την επιφάνεια σε τέσσερις κλάσεις (δες σχήμα) ως εξής:



Η 1^{η} με βάση τον αντιπρόσωπό της ΕΖ όπου Ε ανήκει στην ΑΒ και Ζ στο ΒΚ και ΕΖ // ΑΚ η

[1] Leonhard Euler (1707 – 1783)

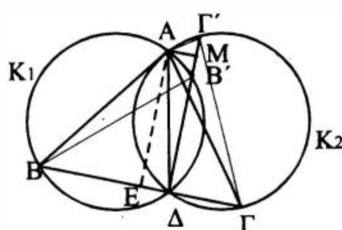
δεύτερη με βάση τον αντιπρόσωπό της ΗΘ, Η σημείο της ΒΓ και Θ της ΓΚ με ΗΘ // ΒΚ, η τρίτη με βάση τον αντιπρόσωπό της ΙΛ όπου Ι σημείο της ΔΚ και Λ σημείο της ΔΓ με ΙΛ // ΚΓ και η τέταρτη με βάση τον αντιπρόσωπό της ΜΝ με Μ σημείο της ΑΔ και Ν σημείο της ΑΚ με ΜΝ // ΔΚ. Τα σημεία του ΒΚ καλύπτονται από την πρώτη κλάση, του ΓΚ από τη δεύτερη, του ΔΚ από την τρίτη και του ΑΚ από την τέταρτη αφού βέβαια το Κ δεν ανήκει σε καμία κλάση (από την υπόθεση).

3. Γεωμετρίας της 3ης Βαλκανικής Ολυμπιάδας Νέων 25/06/1999
(Το θέμα αυτό επιλέχθηκε και ήταν πρόταση της επιτροπής διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\widehat{ΑΒΓ}$ (ΑΒ = ΑΓ). Έστω Δ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΓ > ΒΔ > ΔΓ. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους περί τα τρίγωνα $\widehat{ΑΒΔ}$ και $\widehat{ΑΔΓ}$ κύκλους K_1, K_2 αντίστοιχα. Έστω Β', Γ' τα αντιδιαμετρικά των Β, Γ ως προς τους κύκλους αυτούς. Αν Μ το μέσο της Β'Γ', αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ΜΒΓ είναι σταθερό μη εξαρτώμενο δηλαδή από τη θέση του Δ.

Λύση

$\widehat{Γ'ΔΓ} = 90°$, $\widehat{Β'ΑΒ} = 90°$. Άρα Γ 'Β'Δ είναι συνευθειακά. Είναι προφανές ότι οι κύκλοι είναι ίσοι, αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές και άρα $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΓΔ}$.



$\widehat{Β'ΒΑ} = 90° - \widehat{ΑΒ'Β} = 90° - \widehat{ΑΔΒ}$ και
$\widehat{ΑΓΓ'} = 90° - \widehat{ΑΓ'Γ} = 90° = \widehat{ΑΔΒ}$ από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΓ'ΓΔ.

Άρα $\widehat{Β'ΒΑ} = \widehat{ΑΓΓ'} \Rightarrow ΑΒ' = ΑΓ' \Rightarrow ΑΒ'Γ'$ ισοσκελές.

Άρα η ΑΜ θα είναι και ύψος. Αν Ε το μέσο της ΒΓ τότε το ΑΜΔΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ⇒ ΜΔ = ΑΕ ⇒(ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).

Παρατήρηση 1: Εδώ ο λύτης θα πρέπει να αποφανθεί για τη θέση των Β' και Γ', ότι δηλαδή το Β' ευρίσκεται στο ελάσσον τόξο του K_1 ενώ το Γ' στο μείζον τόξο του K_2.

Παρατήρηση 2: Θα μπορούσε να δινόταν, απλά ότι Δ εσωτερικό σημείο της βάσης ΒΓ.

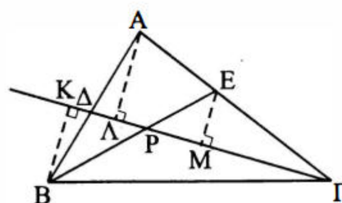
4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε ώστε: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = α$ και στην ΑΒ σημείο Δ ώστε: $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = β$. Έστω Ρ το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ. Να βρεθεί το εμβαδόν του ΔΑΕΡ με βάση το εμβαδό του ΑΒΓ.

Λύση

Θεωρώ τις κάθετες ΒΚ, ΑΛ, ΕΜ επί της ΓΔ.

$$\frac{ΑΛ}{ΒΚ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = β,\ \frac{ΑΛ}{ΕΜ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ} = \frac{ΑΕ + ΕΓ}{ΕΓ} = 1 + α$$

$$\frac{ΒΚ}{ΕΜ} = \frac{ΑΛ}{ΕΜ} \cdot \frac{ΒΚ}{ΑΛ} = \frac{α+1}{β} = \frac{ΒΡ}{ΡΕ}$$



Άρα: $\frac{(ΔΡΕ)}{(ΒΔΕ)} = \frac{ΡΕ}{ΒΕ} \Rightarrow \frac{(ΔΡΕ)}{(ΒΔΕ)} = \frac{ΡΕ}{ΒΡ + ΡΕ} = \frac{1}{\frac{ΒΡ}{ΡΕ} + 1} = \ldots = \frac{β}{α + β + 1}$. επίσης $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$,

αφού $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΒΕ)} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$ και $\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$

Άρα: $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ}{ΑΔ + ΔΒ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΑΕ + ΕΓ} =$

$$\frac{1}{1 + \frac{ΑΔ}{ΔΒ}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{ΕΓ}{ΑΕ}} = \frac{1}{1+β} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{α}}$$

Άρα: $\frac{(ΒΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{α}{(α+1)(β+1)}$.

Επίσης $\frac{(ΔΡΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΔΡΕ)}{(ΒΔΕ)} \cdot \frac{(ΒΔΕ)}{(ΔΡΕ)} =$

$$\frac{β}{α + β + 1} \cdot \frac{α}{(α+1)(β+1)}$$

Όμως: $\frac{(ΔΑΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ}$ (λόγος εμβαδών τριγώνων με μια γωνία κοινή).

Άρα: $\frac{(ΔΑΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{β}{β+1} \cdot \frac{α}{α+1} = \frac{α \cdot β}{(α+1)(β+1)}$

Τελικά έχω: $\frac{(ΔΑΕΡ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΔΡΕ)}{(ΑΒΓ)} + \frac{(ΔΑΕ)}{(ΑΒΓ)} =$

$$\frac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)} + \frac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{(ΔΑΕΡ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)} \Rightarrow$$

$$(ΔΑΕΡ) = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}(ΑΒΓ)$$

5. Έστω α, β, γ σύμμετροι αριθμοί που παριστάνουν πλευρές τριγώνου.

Δείξτε ότι: $\frac{\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma}}{(\tau-\gamma)^{\alpha}(\tau-\alpha)^{\beta}(\tau-\beta)^{\gamma}} > 2^{\alpha+\beta+\gamma}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε

$$2^{\alpha+\beta+\gamma}(\tau-\gamma)^{\alpha}(\tau-\alpha)^{\beta}(\tau-\beta)^{\gamma} < \alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2\tau-2\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{2\tau-2\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{2\tau-2\beta}{\gamma}\right)^{\gamma} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\gamma}\right)^{\gamma} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)^{\gamma} < 1.$$

Έστω λ το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών των α, β, γ $\Rightarrow \lambda\alpha,\ \lambda\beta,\ \lambda\gamma \in \mathbb{N}$, από ανισότητα Cauchy

$$\frac{\lambda\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha} + \lambda\cdot\beta\cdot\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta} + \lambda\cdot\gamma\cdot\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\gamma}}{\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma} >$$

$$\sqrt[\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma]{\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha}^{\lambda\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta}\right)^{\lambda\beta}\cdot\left(\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\gamma}\right)^{\lambda\gamma}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda\cdot(\alpha+\beta-\gamma+\beta+\gamma-\alpha+\gamma+\alpha-\beta)}{\lambda(\alpha+\beta+\gamma)} >$$

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma]{\left(1+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow 1 > \left(1+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\cdot\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)^{\gamma}$$

6. Αν σε τρίγωνο $\widehat{ΑΒΓ}$ έχω: $\frac{\alpha}{Α} = \frac{\beta}{Β} = \frac{\gamma}{Γ}$ δείξτε ότι είναι ισόπλευρο.

Λύση

$\frac{\alpha}{Α} = \frac{\beta}{Β} = \frac{\gamma}{Γ} = \lambda \Rightarrow \alpha = \lambda Α,\ \beta = \lambda Β,\ \gamma = \lambda Γ.$

$\alpha < \beta+\gamma \Rightarrow Α < Β + Γ \Rightarrow Α < \frac{\pi}{2}$. Όμοια έχω $Β < \frac{\pi}{2}$, $Γ < \frac{\pi}{2}$.

Από τον νόμο των ημιτόνων έχω:

$$\frac{\alpha}{ημΑ} = \frac{\beta}{ημΒ} = \frac{\gamma}{ημΓ} \Rightarrow \frac{Α}{ημΑ} = \frac{Β}{ημΒ} = \frac{Γ}{ημΓ}$$

Θεωρούμε ότι Α > Β.

Θα υπάρχει κάποιος $\kappa \in \mathbb{R}^{+}_{*}$ ώστε Α = Β + κ, με $\kappa < \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{Α}{ημΑ} = \frac{Β}{ημΒ} \Rightarrow \frac{Β+\kappa}{ημ(Β+\kappa)} = \frac{Β}{ημΒ} \Rightarrow$$

ΒημΒ + κ ημΒ = ΒημΒ συνκ + ΒσυνΒ ημκ ⇒

Β ημΒ (1 - συνκ) = ΒσυνΒημκ - κημΒ.

Από 1 - συνκ > 0 ⇒ Β συνΒημκ - κημΒ > 0.

Όμως αν $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow ημx < x$ τότε έχω:

κΒσυνΒ - κημΒ > 0 ⇒ ΒσυνΒ > ημΒ ⇒ Β > εφΒ,

άτοπο αφού, αν $Β < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ εφΒ > Β. Άρα Α ≤ Β.

Όμως κατά τον ίδιο τρόπο το Α < Β οδηγεί σε άτοπο άρα Α ≥ Β. Τελικά Α = Β = Γ.

7. Αν α, β, γ, δ, x_0 φυσικοί αριθμοί, όπου x_0 πρώτος αριθμός αλλά και πρώτος προς τους α, β, γ, δ, δείξτε ότι: $x_0 / \alpha\beta^{x_0} + \beta\gamma^{x_0} + \gamma\delta^{x_0} + \delta\alpha^{x_0} \Rightarrow x_0 / \alpha+\gamma$ ή $x_0 / \beta+\gamma$.

Λύση

$\alpha\beta^{x_0} + \beta\gamma^{x_0} + \gamma\delta^{x_0} + \delta\alpha^{x_0} = \lambda x_0,\ \lambda \in \mathbb{N}.$

Έχουμε, προφανώς την ισχύ του θεωρήματος του Fermat. Δηλαδή, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Z}^{+}$ ώστε

$$\alpha^{x_0-1} - 1 = \lambda_1 x_0,\ \beta^{x_0-1} - 1 = \lambda_2 x_0,\ \gamma^{x_0-1} - 1 = \lambda_3 x_0,$$

$$\delta^{x_0-1} - 1 = \lambda_4 x_0 \Rightarrow$$

$$(\alpha^{x_0-1} - 1)\,\alpha\cdot\delta = \lambda_1 x_0 \alpha\cdot\delta,$$

$$(\beta^{x_0-1} - 1)\,\alpha\cdot\beta = \lambda_2 x_0 \alpha\cdot\beta,\ (\gamma^{x_0-1} - 1)\,\beta\cdot\gamma = \lambda_3 x_0 \beta\cdot\gamma,$$

$$(\delta^{x_0-1} - 1)\,\gamma\cdot\delta = \lambda_4 x_0 \gamma\cdot\delta.$$

Άρα:

$$\delta\cdot\alpha^{x_0} = \alpha\cdot\delta + \lambda_1 x_0 \alpha\cdot\delta,\ \alpha\cdot\beta^{x_0} = \alpha\cdot\beta + \lambda_2 x_0 \alpha\cdot\beta,$$

$$\beta\cdot\gamma^{x_0} = \beta\cdot\gamma + \lambda_3 x_0 \beta\cdot\gamma,\ \gamma\cdot\delta^{x_0} = \gamma\cdot\delta + \lambda_4 x_0 \gamma\cdot\delta.$$

Προσθέτω κατά μέλη και έχω:

$$\alpha\cdot\beta^{x_0} + \beta\cdot\gamma^{x_0} + \gamma\cdot\delta^{x_0} + \delta\cdot\alpha^{x_0} = (\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma + \gamma\cdot\delta + \delta\cdot\alpha) +$$

$$+ x_0(\lambda_1\alpha\delta + \lambda_2\alpha\beta + \lambda_3\beta\gamma + \lambda_4\gamma\delta) \Rightarrow$$

$$\alpha\cdot\beta^{x_0} + \beta\cdot\gamma^{x_0} + \gamma\cdot\delta^{x_0} + \delta\cdot\alpha^{x_0} =$$

$(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) + x_0(\lambda_1\alpha\delta + \lambda_2\alpha\beta + \lambda_3\beta\gamma + \lambda_4\gamma\delta)$

Τελικά

$\lambda x_0 = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) + x_0(\lambda_1\alpha\delta + \lambda_2\alpha\beta + \lambda_3\beta\gamma + \lambda_4\gamma\delta)$

$\Rightarrow x_0 / \alpha+\gamma$ ή $x_0 / \beta+\delta$.

Αφήνεται στους λύτες να εξετάσουν την ισχύ του αντιστρόφου.



Προτεινόμενα θέματα για τη στήλη των Ολυμπιάδων

του Σωτήρη Σκοτίδα

1ο Βρείτε όλους τους ακέραιους n ώστε ο αριθμός $M = n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Προτεινόμενη λύση

Είναι

$M = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n - 1 + 8n^2 - 16n + 8 + 1 =$
$(n-1)^4 + 8(n-1)^2 + 1 = [(n-1)^2 + 4]^2 - 15 = \kappa^2$

οπότε $m^2 - \kappa^2 = 15 = (m-\kappa)(m+\kappa)$, όπου $m = (n-1)^2 + 4 \geqslant 4$

και καθώς $(m-\kappa)(m+\kappa) = \alpha\cdot\beta \Rightarrow m = \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$, $\kappa = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $m = 8 \Rightarrow (n = 3, n = -1)$
$m = 4 \Rightarrow n = 1$

2ο Δείξτε ότι υπάρχει ακέραιος της μορφής 99919991…999100…0 ο οποίος είναι πολ/σιο του 1999.

Λύση

Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha_1 = 9991$, $\alpha_2 = 99919991$, …, $\alpha_{2000} = 99919991\ldots9991$

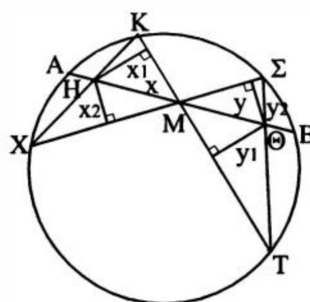
Επειδή $2000 > 1999$ και $\upsilon \in \{0, 1, 2, \ldots, 1998\}$ όπου υ το υπόλοιπο των διαιρέσεων $\alpha_\tau : 1999$, $\tau \in \{1, 2, \ldots, 2000\}$ σύμφωνα με την αρχή του Dirichlet υπάρχουν αριθμοί α_i, α_j $(i > j)$ ώστε $\alpha_i - \alpha_j \equiv 0 \bmod 1999$

Όμως ο αριθμός $\alpha_i - \alpha_j$ είναι της ζητούμενης μορφής αποτελούμενος από $i - j$ μπλοκ ψηφίων 9991 ακολουθούμενος από $4j$ μηδενικά.

3ο Έστω Μ το μέσο χορδής ΑΒ. Από το Μ φέρνουμε τις χορδές ΚΤ, ΧΣ. Αν οι ΚΧ, ΣΤ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Η, Θ αντίστοιχα, δείξτε ότι ΜΗ = ΜΘ.

Λύση

Από τα ζεύγη ομοίων τριγώνων βρίσκουμε



$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

$\frac{x_1}{y_2} = \frac{KH}{\Sigma\Theta}$

$\frac{x_2}{y_1} = \frac{HX}{\Theta T}$

Οπότε $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \frac{KH\cdot HX}{\Sigma\Theta\cdot\Theta T} = \frac{AH\cdot HB}{A\Theta\cdot\Theta B} =$

$\frac{(\alpha-x)(\alpha+x)}{(\alpha+y)(\alpha-y)} = \frac{\alpha^2-x^2}{\alpha^2-y^2}$ όπου $\alpha = AM = MB$

Έτσι $x^2(\alpha^2-y^2) = y^2(\alpha^2-x^2)$ τότε $x = y$

4ο Έστω η ακολουθία (x_n), $n \in \mathbb{N}$, με $x_0 = \frac{1}{2}$ και $x_n = \frac{2}{3 - x_{n-1}}$, $n \geqslant 1$. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{x_n - 1}{x_n - 2} = \frac{\frac{2}{3-x_{n-1}} - 1}{\frac{2}{3-x_{n-1}} - 2} =$

$\frac{x_{n-1} - 1}{-4 + 2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-1}-2}$

Δηλαδή η ακολουθία (y_n) με $y_n = \frac{x_n - 1}{x_n - 2}$ είναι γεωμετρική πρόοδος αφού $y_n = \frac{1}{2} y_{n-1}$.

Οπότε $y_n = y_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ με $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

(είναι $x_1 = \frac{4}{5}$ άρα $y_1 = \frac{1}{6}$)

Όμως $x_n = \frac{2y_n - 1}{y_n - 1}$ άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

5ο Βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών x, y, ω που ικανοποιούν τις ισότητες

$$3(x^2 + y^2 + \omega^2) = 1$$

και

$$x^2y^2 + y^2\omega^2 + \omega^2x^2 = xy\omega(x + y + \omega)^3.$$

Λύση

Δεν είναι άγνωστη η ισχύς των ανισοτήτων $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geqslant (\alpha + \beta + \gamma)^2$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ με το ίσον να ισχύει αν και μόνον αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Με τη χρήση των ισοτήτων του προβλήματος οι παραπάνω ανισότητες γίνονται $1 \geqslant (x + y + \omega)^2$ και

$xy\omega(x + y + \omega)^3 \geqslant (xy)(y\omega) + (y\omega)(\omega x) + (\omega x)(xy) = xy\omega(x + y + \omega)$ όμως από τα δεδομένα προκύπτει $xy\omega(x + y + \omega) \geqslant 0$, $|x| + |y| + |\omega| > 0$

Αν $xy\omega(x + y + \omega) = 0$ παρατηρούμε ότι ακριβώς δύο από τους x, y, ω θα είναι μηδέν. Έτσι βρίσκουμε τις λύσεις

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ $\left(0, 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Στην περίπτωση που $xy\omega(x + y + \omega) > 0$, παίρνουμε $(x + y + \omega)^2 \geqslant 1$, άρα $(x + y + \omega)^2 = 1 \Rightarrow x + y + \omega = \pm 1$

Για $x + y + \omega = 1$ παρατηρούμε ότι θα είναι $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\omega - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = y = \omega = \frac{1}{3}$.

Στην άλλη περίπτωση $x = y = \omega = -\frac{1}{3}$.

6ο Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ δείξτε ότι $\frac{1}{4} < \frac{(AI)(BI)(\Gamma I)}{(A\Delta)(BE)(\Gamma Z)} \leqslant \frac{8}{27}$

[32η Δ.Μ.Ο., ΕΣΣΔ].

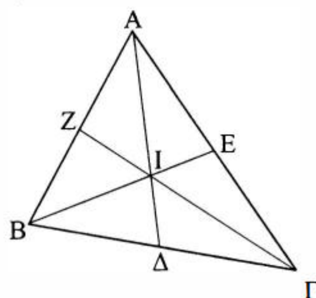
Λύση

Αποδεικνύουμε πρώτα το θεώρημα Van Anbel:

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο Ι, τότε $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma}$

Απόδειξη

Από θεώρημα Μενελάου για τις διατέμνουσες ΓΖ, ΒΕ στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ αντίστοιχα έχουμε $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}\frac{\Delta I}{IA} = 1$, $\frac{AE}{E\Gamma}\frac{B\Gamma}{B\Delta}\frac{\Delta I}{IA} = 1$ οπότε $\frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AI}{I\Delta}\left(\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} + \frac{\Delta B}{B\Gamma}\right) = \frac{AI}{I\Delta}\cdot 1$



Αν τώρα στο θ. Van Anbel θεωρήσουμε ως σημείο Ι το έγγεντρο του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε $\frac{AI}{I\Delta} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} \Rightarrow \frac{AI}{A\Delta} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$

Ανάλογα $\frac{\Gamma I}{\Gamma Z} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\frac{BI}{BE} = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$

οπότε $\frac{(AI)(BI)(\Gamma I)}{(A\Delta)(BE)(\Gamma Z)} \leqslant \frac{8}{27} \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta+\gamma)^3 \geqslant \frac{27}{8}(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma) \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)}{2}\right]^3 \geqslant \left[3\cdot\sqrt[3]{\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right.$$

που ισχύει λόγω της γνωστής ανισότητας Gauchy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Για $n = 3$, $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$

Τέλος $\frac{1}{4} < \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{(\alpha+\beta+\gamma)^3} \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} < 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(\beta+\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha+\beta-\gamma) + \beta^2(\alpha+\gamma-\beta) + 2\alpha\beta\gamma > 0$$

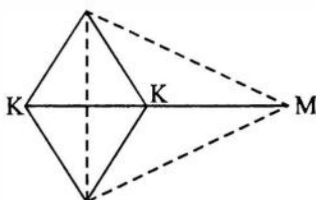
που ισχύει λόγω της τριγωνικής ανισότητας.

7ο Κάθε σημείο του επιπέδου χρωματίζεται με ένα από δύο διαθέσιμα χρώματα. Δείξτε ότι υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο, οι κορυφές του οποίου έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύση

Αν όλα τα σημεία του επιπέδου έχουν το ίδιο χρώμα, τότε το θέμα λήγει.

Έστω ότι τουλάχιστον δύο σημεία του επιπέδου έχουν διαφορετικό χρώμα (υποθέτουμε κόκκινο(Κ) και μπλε (Μ))



Θεωρούμε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία αυτά. Το μέσο θα είναι Κ ή Μ. Σχεδιάζουμε τότε δύο ισόπλευρα τρίγωνα με κοινή πλευρά το τμήμα με άκρα ίδιου χρώματος ΚΚ ή ΜΜ (στο σχήμα με το ΚΚ)

Αν μια από τις τρίτες κορυφές είναι Κ το θέμα λήγει. Στην αντίθετη περίπτωση που είναι και οι δύο Μ, το τρίγωνο με πλευρές τα διακεκομένα τμήματα είναι το ζητούμενο, αφού εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι ισόπλευρο.

8ο Βρείτε τους φυσικούς αριθμούς m, n ώστε $3\cdot 2^m + 1 = n^2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $n^2 \equiv 1 \bmod 3$ άρα $n \not\equiv 0 \bmod 3$. Έτσι $n = 3\kappa + 1$, $n = 3\kappa + 2$.

Αν $n = 3\kappa + 2$, έχουμε

$$3\cdot 2^m + 1 = 9\kappa^2 + 12\kappa + 4 \Rightarrow 2^m = (3\kappa + 1)(\kappa + 1)$$

Για $\kappa = 0$, παίρνουμε $m = 1$, $n = 2$, ενώ για $\kappa = 1$ έχουμε $m = 3$, $n = 5$.

Αν $\kappa \geqslant 2$, είναι $4(\kappa + 1) > 3\kappa + 1 > 2(\kappa + 1)$, άρα δεν είναι δυνατόν οι $\kappa + 1$, $3\kappa + 1$ να είναι συγχρόνως δυνάμεις του 2 πράγμα που θα έπρεπε να συμβαίνει.

Αν $n = 3\kappa + 1$, ανάλογα βρίσκουμε $m = 4$, $n = 7$.

9ο Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^3 = 3\alpha - 1$, $\beta^3 = 3\beta - 1$, δείξτε ότι $\alpha + 2 = \beta^2$.

Λύση

Προφανώς α, β ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Έστω $x = y\eta\mu\theta$, οπότε $\eta\mu^3\theta - \frac{3}{y^2}\eta\mu\theta + \frac{1}{y^3} = 0$

όμως είναι γνωστό ότι $\eta\mu^3\theta - \frac{3}{4}\eta\mu\theta + \frac{1}{4}\eta\mu 3\theta = 0$

άρα $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ και $\frac{1}{4}\eta\mu 3\theta = \frac{1}{y^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow \eta\mu 3\theta = \frac{1}{2}$

άρα $x_1 = 2\cdot\eta\mu 10^\circ$, $x_2 = 2\cdot\eta\mu 50^\circ$, $x_3 = -2\cdot\eta\mu 70^\circ$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\alpha = 2\eta\mu 10^\circ$, $\beta = 2\cdot\eta\mu 50^\circ$ οπότε $\beta^2 = 4\cdot\eta\mu^2 50^\circ = 4\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 100^\circ}{2} = 2(1 + \eta\mu 10^\circ) = 2 + \alpha$



Τέσσερα ... Ολυμπιακά Θέματα

του Αντώνη Δούναβη

1. Βρείτε ένα ζεύγος θετικών ακεραίων κ, λ με $0 < \lambda < 200$ ώστε $\frac{59}{80} < \frac{\kappa}{\lambda} < \frac{45}{61}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ζευγάρι ακεραίων.

Λύση

(α) Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $\frac{45}{61} - \frac{59}{80} = \frac{45\cdot 80 - 59\cdot 61}{61\cdot 80} = \frac{1}{4880}$. Άρα θα πρέπει να προσθέσουμε στον $\frac{59}{80}$ ένα κλάσμα μικρότερο του $\frac{1}{4880}$ ώστε να προκύψει κλάσμα μεταξύ του $\frac{59}{80}$ και $\frac{45}{61}$ με τη δέσμευση ο παρανομαστής του να είναι μικρότερος του 200. Αυτό δεν είναι εύκολο με δοκιμές.

(β) Πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι αν $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\gamma}{\delta}$. Μετά εύκολα βρίσκει ότι ένας Τέτοιος ζητούμενος αριθμός είναι ο $\frac{59+45}{80+61} = \frac{104}{141}$. Αυτός είναι και ο μοναδικός.

(γ) Μοναδικότητα: Για τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{59}{80}$ και $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{45}{61}$ έχουμε παρατηρήσει ότι $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$ και $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{x}{y} < \frac{\gamma}{\delta}$, $0 < y < 200$.

- Αφού $\frac{x}{y} < \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \gamma y - x\delta > 0$ άρα $\gamma y - \delta x \geq 1$
- Και $\frac{x}{y} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta x > \alpha y \Leftrightarrow \beta x \geq \alpha y + 1 \Leftrightarrow$ $\beta\delta x \geq \alpha\delta y + \delta \Leftrightarrow \delta x \geq \frac{\alpha\delta y + \delta}{\beta}$

  Άρα $-\delta x \leq -\frac{\alpha\delta y + \delta}{\beta}$, άρα $\gamma y - \delta x \leq \gamma y - \frac{\alpha\delta y + \delta}{\beta} = \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)y - \delta}{\beta}$.

  Τελικά $1 \leq \gamma y - \delta x \leq \frac{y-\delta}{\beta}$.

  Εφαρμόζοντας διαδοχικά στους $\frac{59}{80}, \frac{104}{141}$ και $\frac{104}{141}, \frac{45}{61}$ τον υπολογισμό ενδιάμεσου $\frac{59}{80} < \frac{59+104}{80+141} \leq \frac{104}{141}$, $\frac{104}{141} < \frac{104+45}{141+61} \leq \frac{45}{61}$ βρίσκουμε αριθμούς $\frac{163}{221}$ και $\frac{149}{202}$ που έχουνε παρανομαστή που υπερβαίνει το 200.

2. Αποδείξτε ότι, αν x και y είναι ρητοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση $x^5 + y^5 = 2x^2y^2$, τότε ο $1 - xy$ είναι τετράγωνο ενός ρητού αριθμού.

Λύση

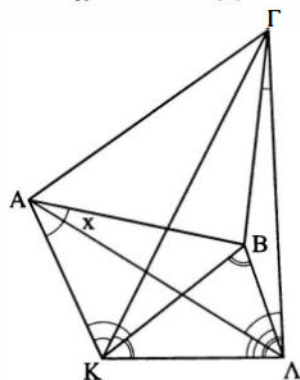
Αφού x, y είναι ρητοί και $\frac{x}{y}$ ρητός (*) η σχέση γράφεται: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + 1 = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2}{y}$. Θέτω $t = \frac{x}{y}$(1) Τότε $t^5 + 1 = \frac{2t^2}{y} \Leftrightarrow y = \frac{2t^2}{t^5+1}$ άρα $x = yt = \frac{2t^3}{t^5+1}$.

- Αν $t = -1$, τότε από (1) $x + y = 0$, άρα $x^5 + y^5 = 0$, άρα $x = y = 0$, τότε (*).
- Αν $t \neq -1$ έχουμε:

$$1 - xy = 1 - \frac{4t^5}{(t^5+1)^2} = \left(\frac{t^5-1}{t^5+1}\right)^2$$

* Αν y = 0 τότε από τη σχέση και ο x = 0, άρα $1 - xy = 1$ κλπ.

3. Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΚΛΓ και ένα σημείο Β στο εσωτερικό του ώστε τα τρίγωνα ΑΚΛ, ΑΒΚ να είναι όμοια με το ΚΛΓ (Τα τρίγωνα είναι διατεταγμένα ως προς τις κορυφές τους που αντιστοιχούν σε ίσες γωνίες).



Να δείξετε ότι:

(α) $A\hat{K}B$ όμοιο $A\hat{\Lambda}\Gamma$

(β) ΑΒΓ όμοιο $A\hat{K}\Lambda$

Λύση

(α) $\left\{\begin{array}{l} A\hat{K}B = A\hat{K}\Lambda - B\hat{K}\Lambda \\ A\hat{\Lambda}\Gamma = K\hat{\Lambda}\Gamma - A\hat{\Lambda}K \end{array}\right\} A\hat{K}B = A\hat{\Lambda}\Gamma$ (1)

Έχουμε $A\hat{K}\Lambda$ όμοιο $\Lambda\hat{B}K$ άρα $\frac{AK}{A\Lambda} = \frac{\Lambda B}{\Lambda K}$

επίσης $\Lambda\hat{B}K$ όμοιο $K\hat{\Lambda}\Gamma$ άρα $\frac{\Lambda B}{BK} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma}$

$\Leftrightarrow \frac{AK}{A\Lambda} = \frac{BK}{\Lambda\Gamma}$ ή $\frac{AK}{BK} = \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}$

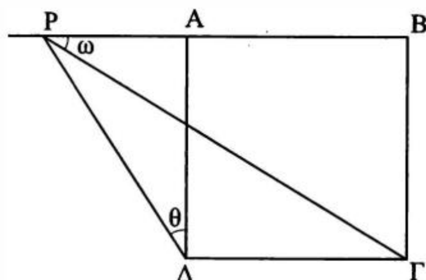
από τις (1), (2) έχουμε $A\hat{K}B$ όμοιο $A\hat{\Lambda}\Gamma$.

(β) Από την προηγούμενη ομοιότητα έχουμε $K\hat{A}B = \Lambda\hat{A}\Gamma$, άρα λόγω του κοινού μέρους $\hat{x}$ $K\hat{A}\Lambda = B\hat{A}\Gamma$ και επιπλέον $\frac{AK}{A\Lambda} = \frac{AB}{A\Gamma}$ άρα $A\hat{K}\Lambda$ όμοιο $A\hat{B}\Gamma$.

4. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της γραμμής ΑΒ. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του λόγου $\frac{P\Gamma}{P\Delta}$ και αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει για τα σημεία Ρ που ικανοποιούν την σχέση $AP \cdot BP = AB^2$.

Λύση

(α) Αν κάποιος θεωρήσει το Ρ ως σημείο του τμήματος ΑΒ τότε μπορεί να θεωρήσει ότι ο λόγος $\frac{Ρ Γ}{Ρ Δ}$ = max όταν το Ρ ταυτίζεται με το Α και ότι $\frac{Ρ Γ}{Ρ Δ}$ = min όταν ο Ρ ταυτίζεται με το Β. Τότε όμως δεν ισχύει η συνθήκη $ΑΡ \cdot ΒΡ = ΑΒ^2$. Άρα το Ρ δεν είναι σημείο του τμήματος ΑΒ αλλά εκτός αυτού.



(β) Προφανώς όταν το Ρ βρίσκεται αριστερά του Α ο λόγος $\frac{Ρ Γ}{Ρ Δ}$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή του και όταν ο Ρ βρίσκεται δεξιά του Β ο λόγος $\frac{Ρ Δ}{Ρ Γ}$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή του, άρα ο $\frac{Ρ Γ}{Ρ Δ}$την ελάχιστη.

(γ) Έστω Ρ αριστερά του Α. Ο λόγος $\frac{ΡΑ}{ΑΒ} = \frac{ΡΑ}{ΑΔ}$ = εφθ και $ΡΔ = \frac{α}{συνθ}$, α πλευρά τετραγώνου.

Από νόμο συνημιτόνων στο $\widehat{ΡΔΓ}$ έχουμε: $ΡΓ^2 = ΡΔ^2 + ΔΓ^2 - 2ΡΔ \cdot ΔΓ συν(90 + θ)$ ή $ΡΓ^2 = ΡΔ^2 + ΔΓ^2 + 2ΡΔ \cdot ΔΓ$ ημθ ή $\left(\frac{ΡΓ}{ΡΔ}\right)^2 = 1 + \left(\frac{ΔΓ}{ΡΔ}\right)^2 + 2\left(\frac{ΔΓ}{ΡΔ}\right)$ημθ, όπου $\frac{ΔΓ}{ΡΔ} = \frac{ΑΔ}{ΡΔ}$ = συνθ. Άρα $\left(\frac{ΡΓ}{ΡΔ}\right)^2 = 1 + συν^2θ + ημ2θ$. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(θ) = 1 + συν^2θ + ημ2θ$ τότε αυτή παίρνει την μέγιστη τιμή όταν $f'(θ) = 0 \Leftrightarrow -ημ2θ + 2συν2θ = 0 \Leftrightarrow -2(εφ^2θ + εφθ - 1) = 0$ α' όπου καθορίζουμε την γωνία θ.



17η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 29 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2000

Από την Επιτροπή Διαγωνισμών

Θέματα μεγάλων τάξεων

Θέμα 1ο.

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α, ΑΔ = β. Ευθεία ε που περνάει από το κέντρο Ο του ορθογωνίου τέμνει τη πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε, έτσι ώστε $\frac{ΑΕ}{ΕΔ} = \frac{1}{2}$.

Αν το Μ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε στο εσωτερικό του ορθογωνίου, να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των α και β, έτσι ώστε οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΔ, ΑΒ, ΔΓ και ΒΓ, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Θέμα 2ο.

Να προσδιορίσετε το πρώτο αριθμό ρ, αν ο αριθμός $1 + ρ + ρ^2 + ρ^3 + ρ^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Θέμα 3ο.

Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός πραγματικός αριθμός κ, για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)(3x^2+y^2)}} \leqslant \frac{1}{κ},$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y.

Θέμα 4ο.

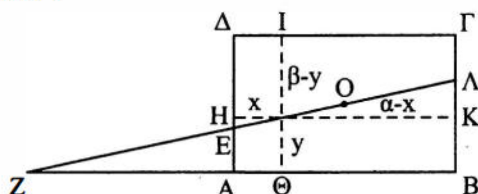
Για τα υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$ του συνόλου Μ, ισχύει ότι $|A_i| > \frac{2}{3}|M|$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, 2000$, όπου με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Χ.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο α του

Μ το οποίο ανήκει τουλάχιστον σε 1334 από τα υποσύνολα A_i.

Λύσεις Θεμάτων Μεγάλων Τάξεων

Θέμα 1ο.



Οι αριθμοί x, y, β-y, α-x αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν

$$y - x = \beta - 2y = \alpha - \beta + y - x$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha - \beta = 0 \text{ και } y = \frac{\beta + x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta \text{ και } y = \frac{\beta + x}{3},\ 0 < x < \alpha \qquad (1)$$

Από ΖΑΕ ≈ ΖΒΛ τριγ. :

$\frac{AZ}{ZB} = \frac{EA}{\Lambda B} = \frac{EA}{E\Delta} = \frac{1}{2}$, αφού $\Lambda B = E\Delta$, οπότε $\frac{AZ}{AZ + \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow AZ = \alpha$.

Από ΖΘΜ ≈ ΖΑΕ τριγ. :

$\frac{M\Theta}{AE} = \frac{Z\Theta}{AZ} \Leftrightarrow \frac{y}{b/3} = \frac{\alpha + x}{\alpha}$, οπότε $y = \frac{\beta}{3\alpha}(\alpha + x)$.

Επομένως οι σχέσεις **(1)** γράφονται ισοδύναμα :

$$\alpha = \beta \text{ και } \frac{\beta(\alpha + x)}{3\alpha} = \frac{\beta + x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta \text{ και } \beta\alpha + \beta x = \alpha\beta + \alpha x$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta \text{ και } (\alpha - \beta)x = 0,\ 0 < x < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Θέμα 2ο.

Έστω $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 = \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Τότε θα έχουμε $(2\rho^2 + \rho)^2 < (2\kappa)^2 < (2\rho^2 + \rho + 2)^2$, οπότε : $(2\kappa)^2 = (2\rho^2 + \rho + 1)^2 = 4\rho^4 + 4\rho^3 + 5\rho^2 + 2\rho + 1$ και λόγω της υπόθεσης για το κ^2 έχουμε τελικά: $\rho^2 - 2\rho - 3 = 0$ ή $\rho = 3$.

Θέμα 3ο.

$\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(3x^2 + y^2)}} \le \frac{1}{\kappa}$, για κάθε x, y > 0 ⇔ $\kappa xy \le \sqrt{(x^2 + y^2)(3x^2 + y^2)}$ για κάθε x, y > 0 ⇔ $3x^4 + (4 - \kappa^2)x^2y^2 + y^4 \ge 0$ για κάθε x, y > 0. **(1)**

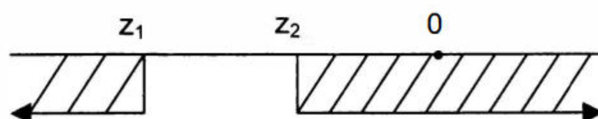
Για y = 0, η **(1)** αληθεύει για κάθε κ > 0.

Για $y \neq 0$, η **(1)** γίνεται : $3z^2 + (4 - \kappa^2)z + 1 \ge 0$ για κάθε $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2 > 0$ **(2)**

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

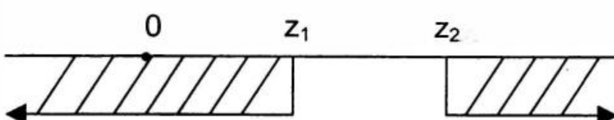
- Αν $\Delta = (\kappa^2 - 4 - 2\sqrt{3})(\kappa^2 - 4 + 2\sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow 0 < \kappa < \sqrt{3} - 1$ ή $\kappa > \sqrt{3} + 1$, τότε η **(2)** έχει δύο ρίζες $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ με $z_1 + z_2 = \frac{\kappa^2 - 4}{3}$, $z_1 z_2 = \frac{1}{3} > 0$, οπότε

  ➢ για 0 < κ < 2 είναι :



και η **(2)** δεν αληθεύει για κάθε z > 0.

  ➢ για κ > 2 είναι :



και η **(2)** δεν αληθεύει για κάθε z > 0

- Αν $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 \le \kappa \le \sqrt{3} + 1$, η **(2)** αληθεύει για κάθε $z \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε z > 0.

Επομένως η **(2)** αληθεύει για κάθε z > 0, όταν $\kappa \in (0, \sqrt{3} + 1]$, οπότε η μέγιστη τιμή του κ είναι $\sqrt{3} + 1$.

Θέμα 4ο.

Έστω ότι δεν υπάρχει x ∈ M, το οποίο να ανήκει σε 1334 από τα υποσύνολα $A_1, A_2, ..., A_{2000}$. Δηλαδή έστω ότι κάθε στοιχείο x ∈ M, ανήκει σε 1333 υποσύνολα το πολύ. Τότε :

$$\left|\{(x,i) \mid x \in A_i, 1 \le i \le 2000\}\right| \le 1333|M| \qquad (1)$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε :

$$\left|\{(x,i) \mid x \in A_i, 1 \le i \le 2000\}\right| > \frac{2}{3} \cdot 2000|M| \qquad (2)$$

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι :

$\frac{2}{3} \cdot 2000|M| < 1333|M|$ ή 4000 < 3999, άτοπο.



Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο
Λευκοπούλειος Διαγωνισμός
29 Ιανουαρίου 2000

Να προσπαθήσετε όσα θέματα μπορείτε

Θέμα 1

α) Σε μία αίθουσα είναι k άτομα και παρακολουθούν μια ομιλία. Στο τέλος της ομιλίας τα άτομα βγαίνουν τυχαία ένα–ένα από την αίθουσα. Ποια είναι η πιθανότητα, ένα συγκεκριμένο άτομο να βγεί τελευταίο από την αίθουσα.

β) Στην αίθουσα είναι m άνδρες και n γυναίκες. Βγαίνουν τυχαία ένα–ένα άτομο από την αίθουσα έως ότου μείνουν στην αίθουσα άτομα του ίδιου φύλου. Ποια είναι η πιθανότητα οι τελευταίοι που θα μείνουν να είναι άνδρες. Κάνε εφαρμογή για $n = 2$, $m = 3$.

Θέμα 2

Δεχόμαστε ότι και οι 365 ημέρες του έτους είναι εξ' ίσου πιθανές για τη γέννηση ενός ατόμου. Παίρνουμε τυχαία k άτομα, ποια είναι η πιθανότητα:

α) Δύο τουλάχιστον άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα του έτους.

β) r από τα k άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα του έτους και τα υπόλοιπα να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές ημέρες. Κάνε εφαρμογή για $k = 4$, $r = 2$.

δ) Ρωτάμε ένα–ένα άτομο και σταματάμε όταν βρεθεί το πρώτο άτομο που έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με άτομο που είχαμε ρωτήσει προηγουμένως.

Ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσουμε το πολύ στο πέμπτο άτομο που θα ρωτήσουμε; $(k \geq 5)$

Θέμα 3

Μια παρέα από m φίλους ασχολούνται κάθε Κυριακή με το άθλημα της ξιφασκίας. Η πιθανότητα να τραυματιστεί ένα άτομο κάθε φορά είναι $\frac{1}{5}$, (όσοι τραυματίζονται σταματούν και αποσύρονται από αυτό τον αγώνα. Ο τραυματισμός ενός ατόμου είναι ανεξάρτητος από τον τραυματισμό άλλων ατόμων).

Ποια είναι η πιθανότητα να αποσυρθούν όλα τα άτομα σε λιγότερες από $n + 1$ Κυριακές; Κάνε εφαρμογή για $m = 3$, $n = 4$.

Λύσεις Θεμάτων του Λευκοπούλειου Διαγωνισμού Πιθανοτήτων

Θέμα 1

α) Υπάρχουν $k! = k\cdot(k-1)\ldots 1$ δυνατές περιπτώσεις να βγουν όλα τα άτομα από την αίθουσα, στις $(k-1)!$ περιπτώσεις ένα συγκεκριμένο άτομο βγαίνει τελευταίο, τότε

$$p_j = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k},\ j = 1, \ldots, k.$$

β) Θεωρούμε τα γεγονότα:

A = {Τα άτομα που μένουν τελευταία είναι άνδρες},

B = {Το άτομο που βγαίνει τελευταίο είναι άνδρας},

τότε $A = B$ και $P(A) = P(B) = \frac{m}{m+n} = \frac{2}{5}$.

Θέμα 2

α) Ορίζουμε το γεγονός:

A = {Δύο τουλάχιστον άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα του έτους}, τότε $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}$, όπου $n_k = n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)$

β) Αν B = {r από τα k άτομα έχουν γενέθλια την ίδια μέρα}, τότε

$$P(B) = \frac{\binom{k}{r}(365)_{k-r+1}}{(365)^k} = \frac{(6\cdot 364\cdot 363)}{365^3} = 0{,}016$$

δ) Αν C = {Το τελευταίο άτομο που ρωτήσαμε, έχει την ίδια μέρα γενέθλια με κάποιο από τα άτομα που είχαμε ρωτήσει προηγουμένως}. Με a, b, c, …, συμβολίζουμε την ημέρα των γενεθλίων του ατόμου που ρωτάμε.

C = {aa, aba, abb, abca, abcb, abcc, abcda, abcdb, abcdc, abcdd}, P(C) =

$$\frac{1}{365} + \frac{2\cdot 364}{365^2} + \frac{3\cdot 364\cdot 363}{365^3} + \frac{4\cdot 364\cdot 363\cdot 362}{365^4} = 0{,}0134.$$

Θέμα 3

Αν C = {Ένα άτομο δεν τραυματίζεται στις n πρώτες Κυριακές}

C′ = {Ένα άτομο τραυματίζεται σε κάποια από τις n Κυριακές

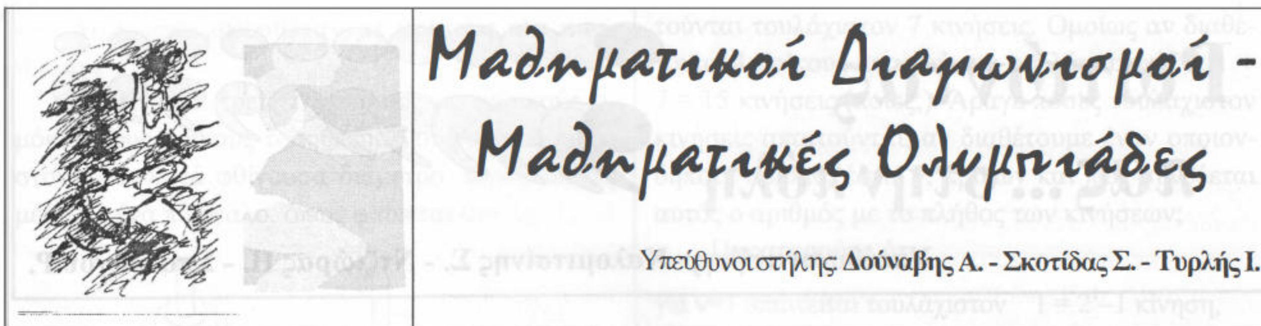
D = {Και τα m άτομα τραυματίζονται σε κάποια από τις n Κυριακές}

$$P(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^n, P(C') = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

$$P(D) = \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)^m = \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right)^3 = 0{,}185$$

Αθήνα 29 Ιανουαρίου 2000

Στρατής Κουνιάς
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πρόεδρος Ελληνικού Στατιστικού Ινστιτούτου



Προτεινόμενα θέματα για τη στήλη των Ολυμπιάδων

του **Σωτήρη Σκοτίδα**

1. Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ αριθμοί του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε

$\varepsilon\varphi\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \varepsilon\varphi\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \dots + \varepsilon\varphi\left(\alpha_n - \frac{\pi}{4}\right) \ge n - 1$. Δείξτε **ότι $\varepsilon\varphi\alpha_0 \cdot \varepsilon\varphi\alpha_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon\varphi\alpha_n \ge n^{n+1}$.**

Λύση

Αποδεικνύουμε πρώτα πως αν $x_0, x_1, \dots, x_n$ θετικοί αριθμοί ώστε $\frac{1}{1+x_0} + \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \le 1$, τότε $x_0 x_1 \dots x_n \ge n^{n+1}$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\frac{1}{1+x_i} = \beta_i$, άρα $x_i = \frac{1-\beta_i}{\beta_i}$ $\forall\, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ οπότε $x_0 x_1 \dots x_n = \frac{(1-\beta_0)(1-\beta_1)\dots(1-\beta_n)}{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n}$.

Όμως παρατηρούμε ότι $1 - \beta_i \ge \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{i-1} + \beta_{i+1} + \dots + \beta_n \ge n \cdot (\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{i-1} \beta_{i+1} \dots \beta_n)^{1/n}$ από ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου.

Άρα $\prod_{i=0}^{n} x_i \ge \frac{n\,(\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n)^{1/n} \cdot n \cdot (\beta_0 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n)^{1/n} \cdot \dots \cdot (\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_{n-1})^{1/n}}{\beta_0 \cdot \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_n} = n^{n+1}$

Η δοθείσα ανισότητα γράφεται $\frac{\varepsilon\varphi\alpha_0 - 1}{1 + \varepsilon\varphi\alpha_0} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha_1 - 1}{1 + \varepsilon\varphi\alpha_1} + \dots + \frac{\varepsilon\varphi\alpha_n - 1}{1 + \varepsilon\varphi\alpha_n} \ge n - 1 \Leftrightarrow$

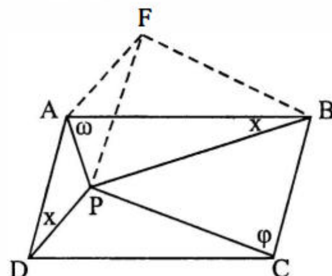
$(n+1) - 2\left(\frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_0} + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_1} + \dots + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_n}\right) \ge n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_0} + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_1} + \dots + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi\alpha_n} \le 1$.

Θέτοντας $x_i = \varepsilon\varphi\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, παίρνουμε $\varepsilon\varphi\alpha_0 \cdot \varepsilon\varphi\alpha_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon\varphi\alpha_n \ge n^{n+1}$.

2. Έστω P εσωτερικό σημείο του παραλληλογράμμου ABCD ώστε $\widehat{ABP} = \widehat{ADP}$. Δείξτε ότι $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$.

Λύση

Φέρνουμε PF ισοπαράλληλη της BC, δηλαδή PFBC παραλληλόγραμμο $\Rightarrow \widehat{PFB} = \widehat{\varphi}$.



Όμως προφανώς και ADPF παραλληλόγραμμο, οπότε $\widehat{AFP} = \widehat{x} = \widehat{ABP} \Rightarrow$ AFBP εγγράψιμο σε κύκλο οπότε $\widehat{\omega} = \widehat{PAB} = \widehat{PFB} = \varphi$.

3. Οι διχοτόμοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία P, Q, R αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΔP} + \frac{BE}{EQ} + \frac{ΓZ}{ZR} \geq 9$.

[Μαθηματικές Ολυμπιάδες Πολωνίας – Ν. Κορέας 1996]

Λύση

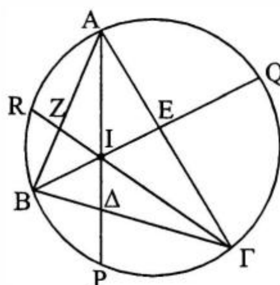
Από Θ. Stewart $b^2 \cdot ΔB + \gamma^2 \cdot ΔΓ = \alpha \cdot ΑΔ^2 + \alpha \cdot ΔΒ \cdot ΔΓ$. Αλλά $ΔΒ = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $ΔΓ = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$.

Έτσι $ΑΔ^2 = \frac{\beta\gamma\,[(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2]}{(\beta+\gamma)^2}$. Τότε $\frac{ΑΔ}{ΔP} = \frac{ΑΔ^2}{ΑΔ \cdot ΔP} = \frac{ΑΔ^2}{ΒΔ \cdot ΔΓ} = \frac{(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{4\tau(\tau-\alpha)}{\alpha^2}$.

Ανάλογα παίρνουμε και τις δύο άλλες σχέσεις οπότε η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται

$$\frac{4\tau(\tau-\alpha)}{\alpha^2} + \frac{4\tau(\tau-\beta)}{\beta^2} + \frac{4\tau(\tau-\gamma)}{\gamma^2} \geq 9 \qquad (1).$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{4\tau\,(\tau - x)}{x^2}$, $(0 < x < 3\tau)$ με $f''(x) > 0$, άρα f κυρτή οπότε από ανισότητα Jensen έχουμε $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \Leftrightarrow$ (1).



Σημείωση:

Αν f κυρτή στο διάστημα Δ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in Δ$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ τότε ισχύει $\lambda_1 f(\alpha_1) + \lambda_2 f(\alpha_2) + \ldots + \lambda_n f(\alpha_n) \geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\, f\left(\frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}\right)$ (γενικευμένες ανισότητες Jensen).

4. Έστω οι μη-αρνητικοί αριθμοί α, b ώστε $b^2 + b^6 \leq \alpha^2 - \alpha^6$. Δείξτε ότι (i) $\alpha \leq 1$, (ii) $b < \frac{2}{3}$.

Λύση

(i) Έστω αντίθετα ότι $\alpha > 1$, τότε $0 \le \alpha^2 - \alpha^6 = \alpha^2(1 - \alpha^4) < 0$, άτοπο

(ii) Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 - \alpha^6 = \alpha^2(1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2) \le \frac{1}{4} \cdot 2$ διότι $0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha^2 \le 1$ και $\alpha^2(1 - \alpha^2) = \frac{1}{4} - \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$ με το ίσον αν $\alpha^2 = \frac{1}{2}$. Ας είναι $b \ge \frac{2}{3}$, τότε $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 \le b^2 + b^6 \le \alpha^2 - \alpha^6 \le \frac{1}{2}$, άτοπο.

5. Βρείτε τους θετικούς ακεραίους n, m ώστε $(n + m)^m = n^m + 1413$.

Λύση

Δεν είναι άγνωστο ότι $(\alpha + \beta)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \alpha^{\nu-\kappa} \beta^\kappa$ οπότε

$$(n + m)^m = n^m + m \cdot n^{m-1} m + \frac{m(m-1)}{2} \cdot n^{m-2} \cdot m^2 + \ldots + m^m = n^m + 1413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2\left(n^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} n^{m-2} + \ldots + m^{m-2}\right) = 1413 = 3^2 \cdot 157.$$

Αλλά, καθώς 157 πρώτος, κατ΄ ανάγκη $m = 3$, οπότε $n^2 + 3n + 3 = 157 \Rightarrow n = 11$.

6. Έστω η ακολουθία (α_n) με $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \cdot \alpha_{n-2}$ $(n \ge 2)$. Υπολογίστε τον α_n.

Λύση

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\alpha_\kappa \in \mathbb{N}^*$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ οπότε $\log_2 \alpha_n = \log_2 \alpha_{n-1} + \log_2 \alpha_{n-2}$ για κάθε $n \ge 2$ με $\log_2 \alpha_0 = 0$, $\log_2 \alpha_1 = 1$, δηλαδή αν $b_n = \log_2 \alpha_n$, τότε η ακολουθία (b_n) είναι η γνωστή ακολουθία Fibonacci, δηλαδή $b_n = F_n$ αφού $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ οπότε $\alpha_n = 2^{F_n}$, όπου $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ με $F_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n.

Μερικές χρήσιμες ισότητες στην ακολουθία Fibonacci

$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$

$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

$(F_n, F_{n+1}) = 1$

$F_m | F_{mn}$ για κάθε $m, n \ge 1$

$(F_m, F_n) = (m, n)$

$F_m | F_n \Leftrightarrow m | n$ για $m \ge 2$



Μαθηματικοί Διαγωνισμοί - Μαθηματικές Ολυμπιάδες

61os ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 4 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2000

Β΄ Γυμνασίου

1. Δίνονται οι παραστάσεις

$A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1$ και $B = (5^2 - 2^4) : (2^3 + 1)$

Να βρεθούν οι Α, Β και να συγκριθούν οι αριθμοί $\frac{A}{20B}$, $\frac{22B}{A}$.

2. Του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΒΓ ∥ ΑΔ) δίνονται:

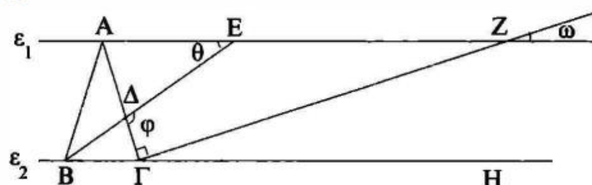
(α) ΑΒ = ΓΔ = 12 μέτρα

(β) Η περίμετρός του 54 μέτρα

(γ) Το εμβαδόν του Ε = 120 τ.μ.

Να βρείτε το ύψος του υ.

3.



Στο παραπάνω σχήμα δίνονται:

(α) $ε_1 \parallel ε_2$

(β) ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{ΒΑΓ} = 20^o$

(γ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$

(δ) ΓΖ ⊥ ΑΓ

Να βρείτε τις γωνίες $φ = \widehat{ΓΔΕ}$, $θ = \widehat{ΑΕΔ}$ και ω.

Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες ΒΕ και ΓΖ δεν είναι παράλληλες.

4. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{2001}{2000},$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2000}.$$

Να βρείτε τον αριθμό Α – Β.

Γ΄ Γυμνασίου

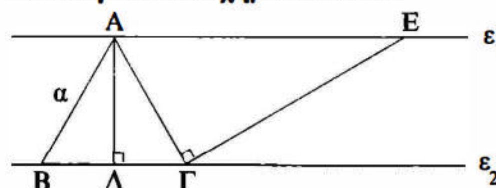
1. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$$A = (-5)^2 - (-2)^{-3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{1000}$$

$$B = [(-5)^2 - (-2)^3 - 1] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{35}{24}\right].$$

Να βρείτε τους αριθμούς Α, Β και να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{A}{B}$, $\frac{25B}{23A}$.

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται:



(α) $ε_1 \parallel ε_2$

(β) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α.

(γ) ΓΕ ⊥ ΑΓ και ΑΔ ⊥ ΒΓ.

(δ) ΑΕ = 2α

Να βρείτε: (i) το λόγο $\frac{ΓΕ}{ΑΔ}$

(ii) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΔΓΕ.

3. Ο θετικός ακέραιος x είναι άρτιος και όταν διαιρείται με το 7 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρεθεί ο αριθμός x, αν είναι μεταξύ των αριθμών 512 και 521.

4. Σε μία Βαλκανική συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

Α΄ Λυκείου

1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. (α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 360°.

(β) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι εξωτερικές γωνίες $\widehat{A}_{εξ}$, $\widehat{B}_{εξ}$, $\widehat{Γ}_{εξ}$, $\widehat{Δ}_{εξ}$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10 και 12, αντιστοίχως.

Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

3. Σε μία τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δύο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34 παιδιά να βρείτε:

(i) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη,

(ii) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες.

4. Οι δύο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y. Αν αυξήσουμε τη μία διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου. Να βρεθούν οι διαστάσεις x, y.

Β΄ Λυκείου

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x = 2\nu + 1, \ \nu \in \mathbb{N},$$

έχει πραγματικές ρίζες.
Είναι δυνατόν οι ρίζες της εξίσωσης αυτής να είναι ακέραιοι αριθμοί;

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΔ στο Ε. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την ΒΕ, εκτός του Ε, και στο Ζ. Να αποδείξετε ότι η χορδή ΖΕ χωρίζει τον κύκλο γ σε δύο τόξα από τα οποία το ένα είναι τριπλάσιο του άλλου.

3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του θετικού ακέραιου x για την οποία ο 13^x διαιρεί τον αριθμό 500!
[Δίνεται ότι: $500! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 499 \cdot 500$].

4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 2cm. Προς το ίδιο μέρος της ΑΒ θεωρούμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ, ΖΑΒ με ΓΑ = ΓΒ, ΔΑ = ΔΒ και ΖΑ = ΖΒ, έτσι ώστε

$$E_{(\Gamma AB)} = 1 \text{ cm}^2, \ E_{(\Delta AB)} = 2 \text{ cm}^2, \ E_{(ZAB)} = 3 \text{ cm}^2.$$

Να αποδείξετε ότι: $\widehat{A\Delta B} + \widehat{AZB} = \frac{\pi}{2}$.

Γ΄ Λυκείου

1. Ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) οι πλευρές ΒΓ = α και ΑΓ = β ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.
Να αποδείξετε ότι είναι $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$, όπου μ_β και μ_γ είναι οι διάμεσοι από τις κορυφές Β και Γ, αντιστοίχως.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y, z τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα $x^2 + y^2 - 8z = 6$.

3. Τα σημεία Κ, Λ βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒ και είναι τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$(AB K) = (A\Gamma K) = (BK\Lambda) = (\Gamma K\Lambda) = (B\Lambda\Gamma).$$

(i) Να αποδείξετε ότι τα Κ, Λ ανήκουν στη διάμεσο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ .

(ii) Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί ο λόγος $\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda}$.

4. Σε μία κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα που είναι του ίδιου φύλου και έχουν το ίδιο ύψος.

Λύσεις των θεμάτων στο επόμενο τεύχος

«Ολυμπιακές προσεγγίσεις»

του Σωτήρη Λουρίδα

1. Τα θέματα που αφορούν στις ανισότητες είναι θέματα μείζονος ενδιαφέροντος για τις μαθηματικές Ολυμπιάδες. Η κεντρική ιδέα για την απόδειξη μιας ανισότητας είναι το γεγονός ότι το αυστηρό στα μαθηματικά είναι και το απλό (R. Godement: Algebre, Paris 1966).

2. Μερικές «επώνυμες» ανισότητες.

2.1. Ανισότητες Αριθμητικού – Γεωμετρικού – Αρμονικού Μέσων - Cauchy. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$ και $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu = 1$ τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \geq \nu$ (η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$).

2.2. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$ τότε

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_\nu}}.$$

Αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu$ έχω ισότητα.

2.3. Cauchy – Schwarz - BuniaKowski:

Γιά τους πραγματικούς $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, ..., \nu$ ισχύει:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_\nu^2\right) \cdot \left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_\nu^2\right) \geq$$

$\geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_\nu\beta_\nu\right)^2$. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$

2.4. Weierstrass:

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$ και $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, τότε

i) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) > 1 + S$.

ii) Αν επιπλέον $S < 1$ τότε:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) < \frac{1}{1-S}.$$

iii) Αν επιπλέον $\alpha_\nu < 1$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, τότε $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_\nu) > 1 - S$.

iv) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_\nu) < \frac{1}{1+S}$.

2.4 Hølder.

Η ανισότητα του Hölder είναι μια γενίκευση της ανισότητας των Cauchy – Schwarz.

Αν $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu\}$ και $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu\}$ είναι δύο σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών και οι αριθμοί p, q είναι τέτοιοι ώστε: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ με $p > 1$, τότε:

$$\alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_\nu\beta_\nu \leq (\alpha_1^p + ... + \alpha_\nu^p)^{1/p}(\beta_1^q + ... + \beta_\nu^q)^{1/q}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$. Αν θεωρήσουμε $x = \frac{1}{p}$, $y = \frac{1}{q}$ και $A_i = \alpha_i^p$, $B_i = \beta_i^q$, $i = 1, 2, ..., \nu$, τότε έχουμε την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση:

$$A_1^x B_1^y + ... + A_\nu^x B_\nu^y \leq (A_1 + ... + A_\nu)^x (B_1 + ... + B_\nu)^y$$

Το ίσον ισχύει αν $\frac{A_\kappa}{S_\kappa} = \frac{B_\kappa}{S_\kappa}$ με $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ και $A_1 + A_2 + ... + A_\nu = S_\nu$, $B_1 + B_2 + ... + B_\nu = S_\nu$. Για p=q=2, προκύπτει η ανισότητα Cauchy – Schwarz.

2.6. Tschebychef.

Για τους πραγματικούς $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, ..., \nu$ με $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \cdots \geq x_\nu$ και $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4 \geq \cdots \geq y_\nu$ ισχύει

$$\nu \cdot (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu) \geq$$

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) \cdot (y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu)$. Η ισότητα ισχύει όταν $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu$ ή $y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu$

2.7. Αν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ και $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\nu$ θετικοί αριθμοί τότε

$$y_1^{x_1} \cdot y_2^{x_2} \cdots y_\nu^{x_\nu} < \left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu}{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}\right)^{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}$$

2.8. Ανισότητα του Bernoulli

Αν $x > -1$ και ν φυσικός αριθμός, τότε ισχύει: $(1+x)^\nu \geq 1 + \nu x$.

Γενίκευση: Αν $-1 < x \neq 0$, τότε έχουμε:

$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, για $0<\alpha<1$

$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, για $\alpha>1$ ή $\alpha<0$.

Αν x=0 τότε ισχύουν σαν ισότητες.

2.9. Jensen.

Αν f κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x, y \in [\alpha, \beta]$. Γενίκευση:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu}\right) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_\nu)}{\nu},$$

$\forall x_i \in [\alpha, \beta]$ με $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Αν f κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, y \in [\alpha, \beta].$$

Γενίκευση:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu}\right) \geq \frac{f(x_1) + ... + f(x_\nu)}{\nu},$$

$\forall x_i \in [\alpha, \beta]$ με $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

2.10. Αν για τους θετικούς $x_i, i = 1, 2, ..., \nu$ έχουμε $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = k$, με k σταθερό αριθμό, το γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu$ γίνεται μέγιστο αν $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = \frac{k}{\nu}$

2.11. Αν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ θετικές μεταβλητές τότε στην περίπτωση που έχουν σταθερό άθροισμα, έστω $x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu = \kappa$, η ελάχιστη τιμή της $x_1^\lambda + x_2^\lambda + \cdots + x_\nu^\lambda$ είναι η $\frac{\kappa^\lambda}{\nu^{\lambda-1}}$.

2.12. Ανισότητα Minkowski

Η ανισότητα του **Minkowski** είναι μια γενίκευση της τριγωνικής ανισότητας

Αν $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$ και $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu\}$ είναι δύο σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών και $p > 1$, τότε ισχύει:

$$[(\alpha_1\beta_1)^p + \ldots + (\alpha_\nu\beta_\nu)^p]^{1/p}$$
$$\leq (\alpha_1^\rho + \ldots + \alpha_\nu^\rho)^{1/\rho}(\beta_1^p + \ldots + \beta_\nu^p)^{1/p}.$$

3. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2000}$ θετικοί ρητοί αριθμοί με άθροισμα $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2000}$ να αποδείξτε ότι:

$$\left(\frac{\sigma}{\alpha_1} - 1\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\alpha_2} - 1\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma}{\alpha_{2000}} - 1\right)^{\alpha_{2000}} \leq 1999^\sigma$$

Λύση:

Αν οι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2000}$ είναι θετικοί ακέραιοι τότε από το θεώρημα Cauchy έχουμε:

$$\sqrt[\sigma]{\left(\frac{\sigma-\alpha_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma-\alpha_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma-\alpha_{2000}}{\alpha_{2000}}\right)^{\alpha_{2000}}} \leq$$

$$\frac{\alpha_1 \cdot \frac{\sigma-\alpha_1}{\alpha_1} + \alpha_2 \cdot \frac{\sigma-\alpha_2}{\alpha_2} + \cdots + \alpha_{2000} \cdot \frac{\sigma-\alpha_{2000}}{\alpha_{2000}}}{\sigma} = 1999 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma}{\alpha_1} - 1\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\alpha_2} - 1\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma}{\alpha_{2000}} - 1\right)^{\alpha_{2000}} \leq 1999^\sigma.$$

Αν οι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2000}$ περιέχουν και κλασματικούς τότε, έστω κ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό των παρονομαστών τους οπότε οι $\kappa \cdot \alpha_1$, $\kappa \cdot \alpha_2$, ..., $\kappa \cdot \alpha_{2000}$ ακέραιοι θετικοί. Επομένως:

$$\sqrt[\kappa\cdot\sigma]{\left(\frac{\sigma-\alpha_1}{\alpha_1}\right)^{\kappa\cdot\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma-\alpha_2}{\alpha_2}\right)^{\kappa\cdot\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma-\alpha_{2000}}{\alpha_{2000}}\right)^{\kappa\cdot\alpha_{2000}}} \leq$$

$$\frac{\kappa(\sigma-\alpha_1) + \kappa(\sigma-\alpha_2) + \cdots + \kappa(\sigma-\alpha_{2000})}{\kappa \cdot \sigma} = 1999.$$

Άρα

$$\sqrt[\sigma]{\left(\frac{\sigma}{\alpha_1} - 1\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\alpha_2} - 1\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma}{\alpha_{2000}} - 1\right)^{\alpha_{2000}}} \leq 1999 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma}{\alpha_1} - 1\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\alpha_2} - 1\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\sigma}{\alpha_{2000}} - 1\right)^{\alpha_{2000}} \leq 1999^\sigma.$$

4) Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt[5]{\left(x^{10} \cdot y^{10} + y^{10} \cdot \omega^{10} + \omega^{10} \cdot x^{10}\right) \cdot \left(x^{10} + y^{10} + \omega^{10}\right)^4} \geq$$
$x^2y^2\omega^2\left(x^6 + y^6 + \omega^6\right)$ για κάθε $x, y, \omega \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Υπενθυμίζουμε ότι για τους κ, λ με $\kappa + \lambda = 1$ και τους θετικούς $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ και από την ανισότητα Hölder έχουμε:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^\kappa \cdot (y_1 + y_2 + y_3)^\lambda \geq$$
$$x_1^\kappa \cdot y_1^\lambda + x_2^\kappa \cdot y_2^\lambda + x_3^\kappa \cdot y_3^\lambda.$$

Θεωρώντας $\kappa = \frac{1}{5}$ και $\lambda = \frac{4}{5}$ και $x_1 = (x \cdot y)^{10}$, $x_2 = (y \cdot \omega)^{10}$, $x_3 = (\omega \cdot x)^{10}$, $y_1 = \omega^{10}$, $y_2 = x^{10}$, $y_3 = y^{10}$ έχουμε:

$$\left[(x\cdot y)^{10} + (y\cdot\omega)^{10} + (\omega\cdot x)^{10}\right]^{1/5} \cdot \left(\omega^{10} + x^{10} + y^{10}\right)^{4/5} \geq$$
$$\left[(x\cdot y)^{10}\right]^{1/5} \cdot \left(\omega^{10}\right)^{4/5} + \left[(y\cdot\omega)^{10}\right]^{1/5} \cdot \left(x^{10}\right)^{4/5} +$$
$$\left[(\omega\cdot x)^{10}\right]^{1/5} \cdot \left(y^{10}\right)^{4/5} \text{ οπότε:}$$

$$\sqrt[5]{\left(x^{10} \cdot y^{10} + y^{10} \cdot \omega^{10} + \omega^{10} \cdot x^{10}\right) \cdot \left(x^{10} + y^{10} + \omega^{10}\right)^4} \geq$$
$$x^2y^2\omega^8 + y^2\omega^2x^8 + x^2\omega^2y^8 \text{ ή}$$

$$\sqrt[5]{\left(x^{10} \cdot y^{10} + y^{10} \cdot \omega^{10} + \omega^{10} \cdot x^{10}\right) \cdot \left(x^{10} + y^{10} + \omega^{10}\right)^4} \geq$$
$$x^2y^2\omega^2\left(x^6 + y^6 + \omega^6\right).$$

Παρατήρηση: Μπορούμε να κατασκευάσουμε παρόμοια άσκηση με μεγαλύτερο πλήθος όρων.

5) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω H_1, H_2, H_3 τα σημεία τομής των υψών AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ αντίστοιχα με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{H_2H_3^2}{B\Gamma^2} + \frac{H_3H_1^2}{\Gamma A^2} + \frac{H_1H_2^2}{AB^2} \geq 3.$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι τα H_1, H_2, H_3 είναι τα συμμετρικά του Η, ως προς τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$

αντίστοιχα. Άρα: $H_2H_3 = 2B_1\Gamma_1$, $H_3H_1 = 2\Gamma_1A_1$, $H_1H_2 = 2B_1A_1$ οπότε αρκεί να δείξω ότι: $\frac{B_1\Gamma_1^2}{B\Gamma^2} + \frac{\Gamma_1A_1^2}{\Gamma A^2} + \frac{A_1B_1^2}{AB^2} \ge \frac{3}{4}$. Υπολογίζεται, εύκολα, ότι:

$$\hat{A} < 90° \Rightarrow AB_1 = \frac{A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2}{2A\Gamma},$$

$$\hat{A} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow AB_1 = \frac{B\Gamma^2 - A\Gamma^2 - AB^2}{2A\Gamma}.$$

Τελικά $AB_1 = \pm\frac{A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2}{2A\Gamma}$. Από τα όμοια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB_1\Gamma_1}$, $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχω:

$$\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{AB_1}{AB} \Rightarrow \frac{B_1\Gamma_1^2}{B\Gamma^2} = \frac{AB_1^2}{AB^2} = \frac{\left(A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2\right)^2}{4A\Gamma^2 \cdot AB^2},$$

όμοια έχουμε:

$$\frac{A_1\Gamma_1^2}{\Gamma A^2} = \frac{\left(AB^2 + B\Gamma^2 - A\Gamma^2\right)^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2},$$

$$\frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{\left(B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - AB^2\right)^2}{4B\Gamma^2 \cdot A\Gamma^2}.$$

Άρα, αρκεί να αποδείξω ότι:

$$\frac{B\Gamma^2 \cdot \left(A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2\right)^2 + A\Gamma^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \cdot \frac{\left(AB^2 + B\Gamma^2 - A\Gamma^2\right)^2 + AB^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \cdot \frac{\left(B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - AB^2\right)^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \ge \frac{3}{4}.$$

Θεωρώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι: $B\Gamma \ge A\Gamma \ge AB$. Είναι σαφές ότι:

$$B\Gamma^2\left(B\Gamma^2 - A\Gamma^2\right)\left(B\Gamma^2 - AB^2\right) + A\Gamma^2\left(A\Gamma^2 - AB^2\right)\left(A\Gamma^2 - B\Gamma^2\right) + AB^2\left(AB^2 - B\Gamma^2\right)\left(AB^2 - A\Gamma^2\right) \ge 0$$

(αφήνεται στους αναγνώστες).

Οπότε έχω:

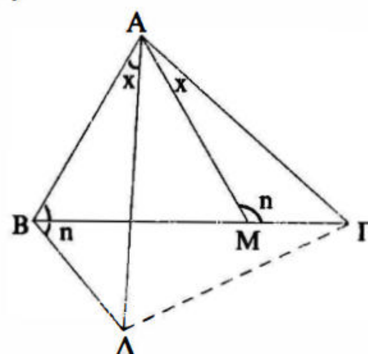
$$B\Gamma^2 \cdot \left(A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2\right)^2 + A\Gamma^2 \cdot \left(AB^2 + B\Gamma^2 - A\Gamma^2\right)^2 + AB^2 \cdot \left(B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - AB^2\right)^2 \ge 3B\Gamma^2 \cdot A\Gamma^2 \cdot AB^2$$ ή

$$\frac{B\Gamma^2 \cdot \left(A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2\right)^2 + A\Gamma^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \cdot \frac{\left(AB^2 + B\Gamma^2 - A\Gamma^2\right)^2 + AB^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \cdot \frac{\left(B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - AB^2\right)^2}{4AB^2 \cdot B\Gamma^2 \cdot \Gamma A^2} \ge \frac{3}{4}..$$

6) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ οι εσωτερικοί διχοτόμοι του, αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{\delta_\alpha} + \frac{1}{\delta_\beta} + \frac{1}{\delta_\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Λύση:



Για το τυχαίο σημείο Μ (εσωτερικό της ΒΓ) θεωρώ $B\hat{A}\Delta = M\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{M}\Gamma$. Επειδή $A\hat{M}\Gamma > \hat{B}$ η ΒΔ είναι εξωτερικά του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$. Προφανώς $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ όμοιο $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ οπότε: $\frac{AB}{AM} = \frac{B\Delta}{M\Gamma} \Rightarrow AB \cdot M\Gamma = AM \cdot B\Delta$.

Ταυτόχρονα έχουμε: $\frac{AB}{AM} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$.

Επειδή $B\hat{A}M = \Delta\hat{A}\Gamma$ και αφού $\frac{AB}{AM} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$ έχουμε $\overset{\Delta}{ABM}$ όμοιο $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$.

Άρα: $\frac{AM}{A\Gamma} = \frac{MB}{\Delta\Gamma}$ οπότε $A\Gamma \cdot MB = \Delta\Gamma \cdot AM$.

Τελικά $AB \cdot M\Gamma + A\Gamma \cdot MB = AM(B\Delta + \Delta\Gamma) \Rightarrow$
$AB \cdot M\Gamma + A\Gamma \cdot MB > AM \cdot B\Gamma$.

Αν $AM = \delta_\alpha \Rightarrow BM = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $M\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ οπότε $\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha\beta\gamma}{\beta+\gamma} > \alpha \cdot \delta_\alpha \Rightarrow \delta_\alpha < \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} \Rightarrow$

$\frac{1}{\delta_\alpha} > \frac{\beta+\gamma}{2\beta\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\delta_\alpha} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$, ομοίως προκύπτει ότι $\frac{1}{\delta_\beta} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$, $\frac{1}{\delta_g} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις παραπάνω ανισότητες έχουμε:

$$\frac{1}{\delta_\alpha}+\frac{1}{\delta_\beta}+\frac{1}{\delta_\gamma}>\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\delta_\alpha}+\frac{1}{\delta_\beta}+\frac{1}{\delta_\gamma}>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

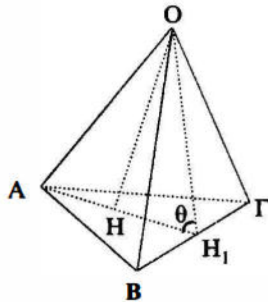
Προτεινόμενη Άσκηση: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε,Ζ τα σημεία επαöής του εγγεγραμένου του κύκλου με τις πλευρές ΒΓ =α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha\cdot A\Delta+\beta\cdot BE+\gamma\cdot \Gamma Z+(\alpha-\beta)^2+$$
$$+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

7) Έστω ΑΒΓ η τομή τρισορθογώνιας γωνίας (στερεάς) $O\cdot xyz$ από επίπεδο και οι δίεδρες γωνίες θ, φ, ω με ακμές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν x, y, z πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι:

$$x^2\cdot \tau\varepsilon\mu^2\theta+y^2\cdot \tau\varepsilon\mu^2\varphi+z^2\cdot \tau\varepsilon\mu^2\omega\ge(x+y+z)^2.$$

Λύση:



Γνωρίζουμε ότι το ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Επίσης ότι η προβολή του Ο στο ΑΒΓ είναι το ορθόκεντρο Η του ΑΒΓ $\sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{HH_1^2}{OH_1^2}$ με

$$B\hat{O}\Gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{HH_1^2}{BH_1\cdot \Gamma H_1}=$$

$$\frac{4R^2\sigma\upsilon\nu^2B\cdot\sigma\upsilon\nu^2\Gamma}{2R\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot 2R\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}\Rightarrow$$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta=$ σöB ·σöΓ , όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου περί το ΑΒΓ κύκλου.

Ομοίως $\sigma\upsilon\nu^2$ö =σöA ·σöΓ και

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=$ σöA ·σöB ⇒ $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2$ö $+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.

(Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει σöAσöB +σöBσöΓ +σöΓσöA =1).

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\left(\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{y^2}{\sigma\upsilon\nu^2\text{ö}}+\frac{z^2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\text{ö}+\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)$$
$$\ge(x+y+z)^2\ \ldots$$

Παρατηρήσεις: Χρησιμοποιήσαμε ότι:

1. Αν η προβολή γωνίας ΧΟΨ σε επίπεδο, το οποίο τέμνουν οι πλευρές τις και που η κορυöή της δεν ανήκει σε αυτό, είναι ορθή τότε η γωνία ΧΟΨ είναι οξεία.
2. $BH_1=2R\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B$, $H_1\Gamma=2R\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $HH_1=2R\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

8) Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και με την ιδιότητα: $\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{2000\ \text{φορές}}(x)=\kappa\cdot x^\mu$, όπου κ, μ δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

Λύση:

Έστω $f(x)>x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ τότε:

$$\begin{cases} f(f(x))>f(x)>x \\ f(f(f(x)))>f(f(x)), \\ \vdots \\ \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{2000\ \text{öορές}}>\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{1999\ \text{öορές}} \end{cases}$$

Αν προσθέσουμε τις σχέσεις αυτές κατά μέλη θα έχουμε $\kappa\cdot x^\mu>x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, άτοπο. Έστω $f(x)<x, \forall x\in\mathbb{R}$. Κατά τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα θα υπάρχουν x_1, x_2 πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$f(x_1)\ge x_1\quad \text{και}\quad f(x_2)\le x_2$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)-x_1\ge 0\quad\text{και}\quad f(x_2)-x_2\le 0.$$

Άρα για την $h(x)=f(x)-x$, που είναι προöανώς συνεχής, σαν διαöορά συνεχών συναρτήσεων, διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

1η) Αν $f(x_1)-x_1=0\Rightarrow h(x_1)=0$ άρα $x_0=x_1$.

2η) Αν $f(x_2)-x_2=0\Rightarrow h(x_2)=0$ άρα $x_0=x_2$.

3η) Αν $f(x_1)-x_1\ne 0$ δηλ. $f(x_1)-x_1<0$ και $f(x_2)-x_2\ne 0$ δηλ. $f(x_2)-x_2>0$, τότε $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει x_0, μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $h(x_0)=0$ δηλ. $f(x_0)=x_0$.

Παρατήρηση:

Μια συνάρτηση, τέτοιου τύπου είναι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $y=f(x)=2x^3$ (γιατί;).

9) Να βρεθεί ο ελάχιστος α για τον οποίο υπάρχουν θετικοί αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε: να ισχύουν $x+y\le\alpha$ και $x^{-1}+y^{-1}\le\alpha$ και $(x^{-1}+\alpha^{-1})^{-1}+(y^{-1}-\alpha^{-1})^{-1}\le\alpha$.

Λύση:

Από τις δύο πρώτες ανισότητες έχουμε:

$0<x\le\alpha-y$ και $\alpha\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{1}{\alpha-y}+\frac{1}{y}$ ή

$\alpha\ge\frac{\alpha}{y(\alpha-y)}$, $y^2-\alpha y+1\le0$ με ρίζες

$y_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ κατανοούμε ότι, λόγω συμμετρίας, $x^2-\alpha x+1\le0$ με ρίζες $x_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$.

Άρα: $\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le x\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ και

$$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le y\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\qquad(1)$$

Επειδή για τους αριθμούς $\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}$ και $\frac{1}{y}-\frac{1}{\alpha}$ ισχύει:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{y}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\alpha$ και

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\le\alpha$ έχουμε:

$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ και

$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le\frac{1}{y}-\frac{1}{\alpha}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$

ή $\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}-\frac{1}{\alpha}\le\frac{1}{x}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}-\frac{1}{\alpha}$

και $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}+\frac{1}{\alpha}\le\frac{1}{y}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}+\frac{1}{\alpha}$ (2)

ταυτόχρονα από τις σχέσεις (1) και την υπόθεση προκύπτει ότι:

$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le\frac{1}{x}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ και

$$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le\frac{1}{y}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\qquad(3)$$

Από (2), (3) έχουμε:

$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\le\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}-\frac{1}{\alpha}$ ή

$\sqrt{\alpha^2-4}\ge\frac{1}{\alpha}\Rightarrow|\alpha|\ge\sqrt{2+\sqrt{5}}$ άρα μικρότερος α είναι ο $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

10) Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ τρεις από τους οποίους είναι θετικοί και ο τέταρτος αρνητικός έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}=0.$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές $\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}$, $\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}$, $\sqrt{\alpha_3+\alpha_4}$.

Λύση:

Αν οι $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ είναι θετικοί τότε το πρόβλημα είναι προφανές. Αν ένας από τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ είναι αρνητικός, έστω $\alpha_1<0$ τότε $-\frac{1}{\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}>\frac{1}{\alpha_2}$.

Άρα ισχύει $|\alpha_1|<\alpha_2\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2>0$. Όμοια έχουμε $\alpha_3+\alpha_1>0$. Άρα προκύπτει $\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}>\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}$ και $\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}>\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}$.

Κατ΄ αρχήν έχουμε

$\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}>\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}>-\alpha_1$

$\Leftrightarrow(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_1)>\alpha_1$

$\Leftrightarrow\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1>0$ όπου $\alpha_1<0$ και $\alpha_2>0$, $\alpha_3>0$, $\alpha_4>0$.

Επειδή $\alpha_1\alpha_2\alpha_3<0$ με

$-\frac{1}{\alpha_4}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=\frac{\alpha_1\cdot\alpha_2+\alpha_1\cdot\alpha_3+\alpha_3\alpha_1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3}<0$,

προκύπτει ότι $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1>0$.

Επομένως $\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}>\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}$. (1).

Επιπλέον ισχύει

$|\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}-\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}|<\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}$ (2).

Πράγματι, $|\sqrt{\alpha_1+\alpha_2}-\sqrt{\alpha_3+\alpha_1}|<\sqrt{\alpha_2+\alpha_3}$

$\Leftrightarrow\alpha_1<\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_1)}$, που είναι αληθής.

Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Καταλήγοντας:

Γνωρίζουμε ότι για τους θετικούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ έχουμε:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}} \Rightarrow$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\right) \geq \nu^2.$$

Για $\nu=2$ και $\alpha_1=\alpha\gamma$, $\alpha_2=\beta\delta \Rightarrow$

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}\right) \geq 4 \Rightarrow (\alpha\gamma+\beta\delta)^2 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta.$$

Αν α, β, γ, δ διαδοχικές πλευρές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου, από το θεώρημα του Πτολεμαίου: $\alpha\gamma+\beta\delta=xy$ όπου x, y οι διαγώνιες του τετραπλεύρου. Επομένως $x^2y^2 \geq 4\alpha\beta\gamma\delta$.

Για $\nu=3$ θεωρούμε $\alpha_1=\upsilon_\alpha$, $\alpha_2=\upsilon_\beta$, $\alpha_3=\upsilon_\gamma$ ύψη τριγώνου με αντίστοιχες πλευρές α, β, γ. Τότε:

$$(\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma)\left(\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}\right) \geq 9.$$

Όμως: $\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}=\frac{1}{\rho}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Άρα $\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma \geq 9\rho$.

Για $\nu=4$ τότε $\alpha_1=s_1$, $\alpha_2=s_2$, $\alpha_3=s_3$, $\alpha_4=s_4$ ύψη τετραέδρου τότε

$$(s_1+s_2+s_3+s_4)\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}\right) \geq 16.$$

Όμως $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}=\frac{1}{R}$ όπου $\mathbb{R}$ η ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας.

Άρα $s_1+s_2+s_3+s_4 \geq 16R$



61ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

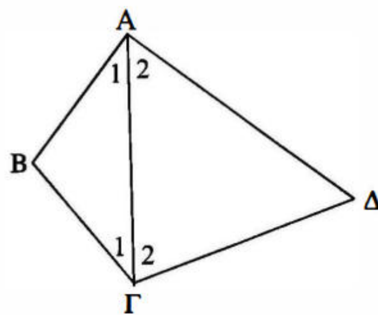
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Α΄ Λυκείου

1. Αν x είναι ο αριθμός, τότε:
$3x + 18 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = -3$.

2. (α) Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ και

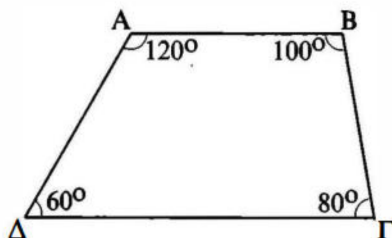
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}$$
$$= (\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{\Gamma}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Delta}) = 180° + 180° = 360°.$$



(β) Έχουμε: $\frac{\hat{A}_{εξ}}{6} = \frac{\hat{B}_{εξ}}{8} = \frac{\hat{\Gamma}_{εξ}}{10} = \frac{\hat{\Delta}_{εξ}}{12} = \lambda \Leftrightarrow$

$\hat{A}_{εξ} = 6\lambda$, $\hat{B}_{εξ} = 8\lambda$, $\hat{A}_{Γξ} = 10\lambda$, $\hat{\Delta}_{εξ} = 12\lambda \Leftrightarrow$

$$180° - \hat{A} = 6\lambda,\ 180° - \hat{B} = 8\lambda,\ 180° - \hat{\Gamma} = 10\lambda,$$
$$180° - \hat{\Delta} = 12\lambda \Leftrightarrow 4 \cdot 180° - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta})$$
$$= 6\lambda + 8\lambda + 10\lambda + 12\lambda \Leftrightarrow 720° - 360° = 36\lambda$$
$$\Leftrightarrow 36\lambda = 360° \Leftrightarrow \lambda = 10.$$



Άρα είναι: $180° - \hat{A} = 60°$, $180° - \hat{B} = 80°$,
$180° - \hat{\Gamma} = 100°$, $180° - \hat{\Delta} = 120°$
$\Leftrightarrow \hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 100°$, $\hat{\Gamma} = 80°$, $\hat{\Delta} = 60°$

Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$ θα είναι ΑΒ ∥ ΔΓ και αφού $\hat{A} + \hat{B} \neq 180°$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

3. Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών και Κ ο αριθμός των κοριτσιών, τότε την πρώτη μέρα πήραν μέρος $\frac{3A}{4}$ αγόρια και $\frac{2K}{3}$ κορίτσια. Επειδή ένα αγόρι έπαιξε την παρτίδα με ένα κορίτσι θα έχουμε ότι

$$\frac{3A}{4} = \frac{2K}{3} \Leftrightarrow 9A = 8K \Leftrightarrow A = \frac{8K}{9}.$$

Όμως έχουμε $A + K = 34 \Leftrightarrow$

$$\frac{8K}{9} + K = 34 \Leftrightarrow \frac{17K}{9} = 34 \Leftrightarrow K = 18,$$

οπότε $A = \frac{8}{9} \cdot 18 = 16$.

Επομένως δεν έπαιξαν την πρώτη ημέρα $A - \frac{3A}{4} = \frac{A}{4} = 4$ αγόρια και $K - \frac{2K}{3} = \frac{K}{3} = 6$ κορίτσια.

4. Σύμφωνα με την άσκηση θα έχουμε

$$(x + 1)(y + 2) = 2xy$$
$$xy + 2x + y + 2 = 2xy$$
$$-xy + 2x + y + 2 = 0$$
$$(2 - y)x + y + 2 = 0$$
$$(2 - y)x - (2 - y) = -4$$
$$(2 - y)(x - 1) = -4$$
$$(x - 1)(y - 2) = 4$$

Επειδή οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι θα έχουμε: $(x - 1 = 1$ και $y - 2 = 4)$ ή $(x - 1 = 2$ και $y - 2 = 2)$ ή $(x - 1 = 4$ και $y - 2 = 1)$
δηλαδή είναι: $x = 2, y = 6$ ή $x = 3, y = 4$ ή $x = 5, y = 3$.

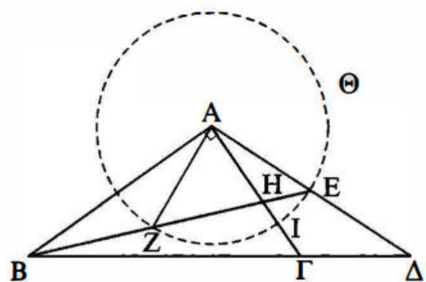
Β΄ Λυκείου

1. Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4(-2\nu - 1) = 8\nu + 5 > 0$, αφού $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες. Αν $x = \kappa$

είναι μία ακέραια ρίζα της εξίσωσης, τότε $\kappa^2 + \kappa = 2\nu + 1 \Leftrightarrow \kappa(\kappa + 1) = 2\nu + 1$, που είναι άτοπο, γιατί το πρώτο μέλος ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος είναι περιττός αριθμός.

2. Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:
$\widehat{\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Gamma A\Delta} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma A\Delta}$, αφού ΑΓ = ΓΔ

Άρα είναι: $\widehat{\Gamma A\Delta} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΗΒ έχουμε: $\widehat{AHE} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$, οπότε από το τρίγωνο ΑΗΕ προκύπτει:



$$\widehat{AHE} = 180^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2} - \left(90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{\Gamma}}{2} = 45^\circ.$$

Επειδή είναι ΑΖ = ΑΕ (ακτίνες του κύκλου γ) θα είναι και $\widehat{AZE} = 45^\circ$, οπότε

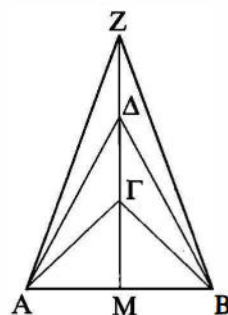
$$\widehat{ZAE} = 180^\circ - (\widehat{AEH} + \widehat{AZE}) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ.$$

Άρα το τόξο $\overset{\frown}{ZIE}$ έχει μέτρο 90°, οπότε το τόξο $\overset{\frown}{Z\Theta E}$ θα έχει μέτρο 360° - 90° = 270°, δηλαδή είναι τριπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{ZIE}$.

3. Θα παραγοντοποιήσουμε το 500! κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εμφανισθεί ο παράγοντας 13 όσο είναι δυνατόν περισσότερες φορές. Ο 13 διαιρεί τους αριθμούς $13 = 1\cdot 13$, $26 = 13\cdot 2$, $39 = 13\cdot 3$, $52 = 13\cdot 4$, ..., $494 = 38\cdot 13$, δηλαδή καταρχήν ο 13 εμφανίζεται ως παράγοντας 38 φορές. Όμως οι αριθμοί $169 = 13\cdot 13$, $338 = 26\cdot 13 = 2\cdot 13\cdot 13$ εμφανίζουν το 13 και δεύτερη φορά ως παράγοντα. Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα $500! = 13^{40}\cdot \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, όπου ο κ δεν διαιρείται με το 13, οπότε είναι x = 40.

4. Αν Μ είναι το μέσον της ΑΒ, τότε ΑΜ = 1cm, ΓΜ = 1cm, ΔΜ = 2cm, ΖΜ = 3cm και χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ λαμβάνουμε $A\Gamma = \sqrt{2}$.
Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΓΖ είναι όμοια, γιατί έχουν:
(i) τη γωνία ΑΓΔ κοινή
(ii) $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma Z}{A\Gamma} = \sqrt{2}$.

Άρα έχουμε $\widehat{A\Delta B} = 2\cdot \widehat{A\Delta M} = 2\cdot \widehat{ZA\Gamma}$ και αφού $\widehat{AZB} = 2\cdot \widehat{AZM}$ προκύπτει ότι:



$$\widehat{A\Delta B} + \widehat{AZB} = 2(\widehat{ZA\Gamma} + \widehat{AZM}) = 2\cdot \widehat{A\Gamma M} = 2\cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Γ΄ Λυκείου

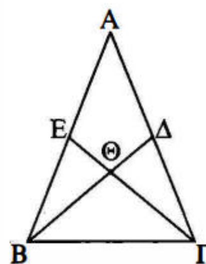
1. Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε από Θ. διαμέσων

$$B\Theta^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{9},$$

$$\Gamma\Theta^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{9}$$

και $B\Theta^2 + \Gamma\Theta^2 = \frac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{9} = \frac{4\alpha^2 + 2\beta^2}{9}$, αφού $\beta = \gamma$.

Από $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ έχουμε $5\alpha = \sqrt{10}\beta$ και $5\alpha^2 = 2\beta^2$, οπότε $B\Theta^2 + \Gamma\Theta^2 = \frac{4\alpha^2 + 5\alpha^2}{9} = \alpha^2 = B\Gamma^2$



Άρα το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ορθογώνιο στο Θ, οπότε είναι $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$.

2. Έστω ότι υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε:

$$x^2 + y^2 - 8z = 6 \text{ ή } x^2 + y^2 = 2(4z + 3) \qquad (1)$$

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ενός αρτίου αριθμού είναι άρτιος, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι περιττός. Έτσι, αν οι ακέραιοι x και y στην ισότητα (1) είναι ένας άρτιος και ένας περιττός, τότε το πρώτο μέλος της (1) θα είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος αυτής είναι άρτιος (άτοπο).

Άρα θα έχουμε μόνο τις περιπτώσεις:

(i) x, y άρτιοι, δηλαδή $x = 2\mu$, $y = 2\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$

Τότε η (1) γίνεται $4\mu^2 + 4\nu^2 = 2(4z + 3)$ ή $2\mu^2 + 2\nu^2 = 4z + 3$, που είναι αδύνατη γιατί $2\mu^2 + 2\nu^2$ είναι άρτιος, ενώ ο $4z + 3$ είναι περιττός.

(iii) x, y περιττοί, δηλαδή

$$x = 2\mu + 1,\ y = 2\nu + 1,\ \mu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

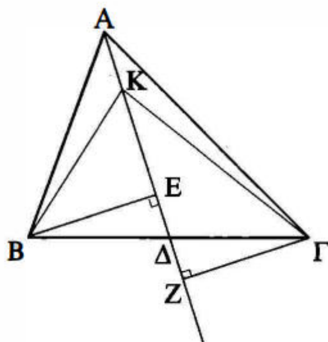
Τότε η (1) γίνεται

$$(2\mu + 1)^2 + (2\nu + 1)^2 = 2(4z + 3) \text{ ή}$$

$$\mu(\mu + 1) + \nu(\nu + 1) = 2z + 1$$

που είναι αδύνατη, γιατί οι αριθμοί $\mu(\mu + 1)$ και $\nu(\nu + 1)$ είναι άρτιοι, ενώ ο αριθμός $2z + 1$ είναι περιττός.

3. (i) Από την ισότητα (ΑΒΚ) = (ΑΓΚ) προκύπτει ότι $\frac{1}{2}AK \cdot BE = \frac{1}{2}AK \cdot \Gamma Z$ ή $BE = \Gamma Z$.

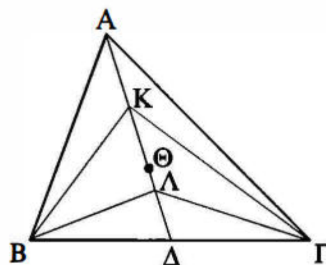


Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΖΔ είναι ορθογώνια και έχουν ΒΕ = ΓΖ, $\widehat{B\Delta E} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$, οπότε είναι ίσα. άρα θα είναι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Κ βρίσκεται σε αυτήν.

Επειδή είναι (ΒΚΛ) = (ΓΚΛ), εργαζόμενοι στο τρίγωνο ΒΚΓ, αποδεικνύουμε ομοίως ότι η προέκταση της ΚΛ περνάει από το μέσον Δ της ΒΓ, δηλ. και το Λ ανήκει στη διάμεσο ΑΔ.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$(AB K) = (BK\Lambda) = \frac{1}{5}(AB\Gamma) = \frac{2}{5}(AB\Delta),$$



και αφού τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΚΛ, ΑΒΔ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Β έπεται ότι:

$$AK = K\Lambda = \frac{2}{5}A\Delta$$

Επιπλέον προκύπτει ότι: $\Lambda\Delta = \frac{1}{5}A\Delta$.

Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε

$$\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda} = \frac{A\Theta - AK}{\Theta\Delta - \Lambda\Delta} = \frac{\frac{2}{3}A\Delta - \frac{2}{5}A\Delta}{\frac{1}{3}A\Delta - \frac{1}{5}A\Delta} = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)A\Delta}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)A\Delta} = 2$$

4. Επειδή είναι $577 = 9 \cdot 64 + 1$, μία τουλάχιστον χώρα θα έχει τουλάχιστον 65 παιδιά στην κατασκήνωση. Από αυτά τουλάχιστον 33 θα είναι του ιδίου φύλου.

Αν σε αυτά τα 33 παιδιά, δεν υπάρχει ομάδα 5 παιδιών του ιδίου ύψους, τότε θα υπάρχουν ομάδες με 4 το πολύ παιδιά του ιδίου ύψους, οπότε θα υπάρχουν τουλάχιστον 9 ομάδες παιδιών του ιδίου ύψους μέσα από τα 33 παιδιά που αναφέραμε παραπάνω.

Αν τώρα πάρουμε 1 παιδί από καθεμία από τις 9 παραπάνω ομάδες, θα δημιουργήσουμε μία ομάδα 9 παιδιών που όλα έχουν διαφορετικό ύψος. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί από την υπόθεση σε οποιαδήποτε ομάδα 9 ατόμων υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά του ιδίου ύψους.

61ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

Θέματα

Α΄ Λυκείου

1. Αν α και x είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha - 1}} \geq 2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1, οι 60 είναι ίσοι με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες $T_i, i = 1, 2, \ldots, 100$, αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στο κύκλο. Αν P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας

$T_i, i=1,2,...,100$, να αποδείξετε ότι:

(α) $P_i = 2S_i - 6$, για κάθε $i=1,2,...,100$

(β) $P_1 + P_2 + ... + P_{100} = 360$.

3. (i) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση: $x^4 + 4y^4$

(ii) Αν οι αριθμοί x,y είναι θετικοί ακέραιοι και $y \geq 2$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες Ot, Os, το σημείο A της Ot με OA=x και το σημείο B της Os με OB=y και y<x.. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μέσα στη γωνία tOs. Από την κορυφή Δ φέρουμε ευθεία ε κάθετη στη διχοτόμο Oδ της γωνίας tOs η οποία τέμνει την Os στο E και Ot στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(i) AZ=x+y και BE=2x.

(ii) Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Β΄ Λυκείου

1. Δίνεται κύκλος (O, R), μια διάμετρος AB αυτού και ένα σημείο του Γ διαφορετικό των Α,Β. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ, αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ρ. Η κάθετος από το Γ προς τη διάμετρο ΑΒ την τέμνει στο Δ, ενώ η ευθεία ΑΡ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο Ε.

Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$

2. Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \leq x+y$

(ii) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \leq x+y+z$

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 3α και κατασκευάζουμε τετράγωνα ΒΓΔΕ και ΒΖΗΘ εκατέρωθεν του ΑΒ, όπου τα σημεία Γ και Θ ανήκουν στο ΑΒ και είναι τέτοια ώστε ΒΓ=α, ΒΘ=2α.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ, ΔΖ και ΕΗ περνάνε από το ίδιο σημείο.

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιγνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιός από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλ. ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

Γ΄ Λυκείου

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Ένας κύκλος που έχει χορδή τη ΒΓ τέμνει τη πλευρά ΑΒ στο μέσον της Δ και τη πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Γράφουμε και τον κύκλο γ που έχει χορδή τη ΓΕ και εφάπτεται της ΒΓ στο Γ. Η ΔΕ προκτεινόμενη τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ και τον κύκλο γ στο Η.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΖΑ, ΒΕ και ΓΗ περνάνε από το ίδιο σημείο.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{12(αx+36)}{x^2+36}$, όπου ο α είναι ακέραιος.

Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι ακέραιοι αριθμοί.

3. Για κάθε $x, y, z > 0$ να αποδείξετε ότι:

(i) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{x+y}{3}$

(ii) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{x+y+z}{3}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιγνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από

τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλ. ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

Λύσεις Θεμάτων

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Προφανώς για α=1 πρέπει να είναι x≠0. Έχουμε:

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+\alpha \geq 2\sqrt{x^2+\alpha-1}$$

[αφου $\sqrt{x^2+\alpha-1}>0$]

$\Leftrightarrow x^4+2\alpha x^2+\alpha^2 \geq 4(x^2+\alpha-1)$

[αφου $\sqrt{x^2+\alpha-1}>0$]

$\Leftrightarrow x^4+2(\alpha-2)x^2+(\alpha-2)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow [x^4+(\alpha-2)]^2 \geq 0$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν

$$x^2=2-\alpha \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2-\alpha},\quad 1\leq \alpha \leq 2.$$

2. (α) Επειδή δεν υπάρχουν τρείς ίσοι διαδοχικοί αριθμοί, για τα σημεία οποιασδήποτε τριάδας T_i υπάρχουν δύο δυνατότητες:

1η) Το ένα να είναι 1 και τα δύο να είναι 2, οπότε θα έχουμε: $S_i=1+2+2=5$, $P_i=1\cdot 2\cdot 2=4$ και $P_i=2S_i-6$.

2η) Το ένα να είναι 2 και τα δύο να είναι 1, οπότε θα έχουμε $S_i=4$, $P_i=2$ και $P_i=2S_i-6$.

(β) $P_1+P_2+...+P_{100}=$

$=(2S_1-6)+(2S_2-6)+...+(2S_{100}-6)=$

$=2(S_1+S_2+...+S_{100})-100\cdot 6$

Καθένας από τους 100 αριθμούς ανήκει σε τρείς διαφορετικές τριάδες, οπότε:

$S_1+S_2+...+S_{100}=3\cdot(40\cdot 1+60\cdot 2)=3\cdot 160=480$.

Άρα είναι:

$$P_1+P_2+...+P_{100}=2\cdot 480-600=360.$$

3. (i) $x^4+4y^4=(x^2)^2+(2y^2)^2+4x^2y^2-4x^2y^2=$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2+2y^2+2xy)\cdot(x^2+2y^2-2xy)$.

(ii) $x^4+4y^4=[(x+y)^2+y^2][(x-y)^2+y^2]$.

Επειδή οι αριθμοί $(x+y)^2+y^2$, $(x-y)^2+y^2$ είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος. Για x=y ο αριθμός $(x-y)^2+y^2$ γίνεται y^2 και είναι $y^2>1$, αφού $y\geq 2$.

4. (i) Επειδή είναι ΖΕ ⊥ Οδ, το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (ΟΕ=ΟΖ). Φέρουμε ΔΚ ⊥ ΑΖ και έχουμε:

$$\overset{\Delta}{AK\Delta}=\overset{\Delta}{OAB}[\hat{O}=\hat{K}=90^o,$$

$$A\Delta=AB,\quad K\overset{\Delta}{\Delta}A=90^o-K\hat{A}\Delta=O\overset{\Delta}{A}B].$$

Άρα είναι ΑΚ=ΟΒ=y, ΚΔ=ΟΑ=x.

Επίσης το τρίγωνο ΔΚΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε ΚΖ=ΚΔ=x.

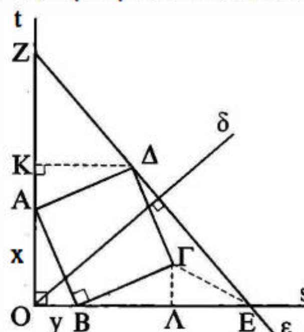
Άρα έχουμε ΑΖ=ΑΚ+ΚΖ=x+y.

Επίσης έχουμε:

$$BE=OE-OB=OZ-OB=OA+AZ-OB=$$
$$=x+x+y-y=2x.$$

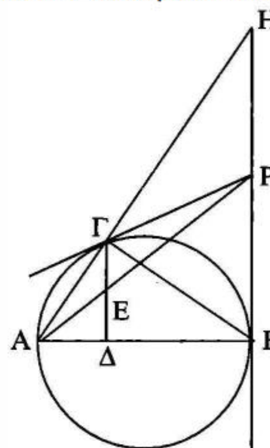
(ii) Φέρουμε το ύψος ΓΛ.

Τότε $\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}=\overset{\Delta}{OAB}$, οπότε ΒΛ=ΟΑ=x και ΛΕ=ΒΕ-ΒΛ=x, δηλ. η ΓΛ είναι και διάμεσος.



Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν η ΑΓ τέμνει την ΒΡ στο Η, τότε το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ορθογώνιο, αφού $B\hat{\Gamma}H=90^o$. Επιπλέον τα τμήματα ΡΒ, ΡΓ είναι ίσα ως εφαπτόμενα του κύκλου από το σημείο Ρ, οπότε $P\hat{B}\Gamma=P\hat{\Gamma}B$, οπότε θα είναι και $P\hat{\Gamma}H=P\hat{H}\Gamma$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $P\hat{\Gamma}B$ και $P\hat{B}\Gamma$, δηλαδή ΡΗ=ΡΓ=ΡΒ και το Ρ είναι μέσον του ΒΗ.



Επειδή είναι ΓΔ ⊥ ΑΒ έπεται ότι ΓΔ//ΒΗ και από τα εμφανιζόμενα όμοια τρίγωνα προκύπτει ότι

$\frac{ΕΔ}{ΒΡ}=\frac{ΑΕ}{ΑΡ}=\frac{ΕΓ}{ΡΗ}=\frac{ΕΓ}{ΒΡ}$, (αφού ΒΡ=ΡΗ), οπότε θα είναι ΕΔ=ΕΓ και $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}=\frac{ΓΕ}{2ΓΕ}=\frac{1}{2}$.

2.(i) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\le x+y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\le x+y$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\le 1$ [αφού x+y>0]

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\le x^2+xy+y^2$

[αφού $x^2+xy+y^2>0$]

$\Leftrightarrow -2xy\le 0$, που ισχύει [αφού x, y >0]

(ii) Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι:

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}=$$
$$=\frac{y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{x^3}{z^2+zx+x^2} \quad (1)$$

Πράγματι, έχουμε: (1)

$\Leftrightarrow \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3-z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3-x^3}{z^2+zx+x^2}=0$

$\Leftrightarrow x-y+y-z+z-x=0$, που ισχύει.

Έτσι έχουμε:

$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\right)$

$\le\frac{1}{2}(x+y+y+z+z+x)$ [λόγω της (i)]

$=\frac{1}{2}(2x+2y+2y)=x+y+z$.

3. Έχουμε $\overset{\Delta}{ΑΒΖ}=\overset{\Delta}{ΕΖΗ}$[$Α\hat{Β}Ζ=Ε\hat{Ζ}Η=90^o$, ΒΖ=ΖΗ=2α, ΑΒ=ΕΖ=3α.]

Άρα $\hat{Η}_1=\hat{Ζ}_2=90^o-\hat{Ζ}_1\Rightarrow \hat{Η}_1+\hat{Ζ}_1=90^o\Rightarrow$

$Ζ\hat{Κ}Η=180^o-(\hat{Η}_1+\hat{Ζ}_1)=90^o\Rightarrow ΕΗ\perp ΑΖ$, οπότε η ΕΗ είναι η ευθεία του ύψους του τριγώνου ΑΕΖ από την κορυφή Ε.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι είναι ΖΔ η ευθεία του ύψους του τριγώνου ΑΕΖ από τη κορυφή Ζ. Επιπλέον είναι $ΑΒ\perp ΕΖ$, οπότε οι ευθείες ΑΒ, ΕΗ και ΖΔ περνάνε από το ίδιο σημείο ως ύψη του τριγώνου ΑΕΖ.

4. Ονομάζουμε $Α_1$ το σημείο που θα χρησιμοποιηθεί πρώτο, $Α_2$ αυτό που θα χρησιμοποιηθεί δεύτερο κ.ο.κ.

Είναι ουσιαστικό να παρατηρήσουμε ότι ο μαθητής που θα χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο $Α_{98}$, αυτός θα χάσει το παιχνίδι, αφού ο άλλος στη συνέχεια θα γράψει τη χορδή $Α_{99}$ $Α_{100}$ ή την $Α_κ$ $Α_{100}$ για κάποιο κ=1,2,…,99, και θα τελειώσει το παιγνίδι.

Για τη χρησιμοποίηση των σημείων $Α_1$, $Α_2$, … , $Α_{97}$ μπορούν να γραφούν το πολύ $\frac{97\cdot 96}{2}=97\cdot 48=4656$ χορδές. Έτσι, αν γραφούν όλες οι 4656 χορδές, αφού ο Α αρχίζει πρώτος, είναι δυνατόν ο Β να γράψει την 4656[η] χορδή και έτσι να αναγκάσει τον Α να χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο $Α_{98}$.

Άρα ο Β έχει στρατηγική νίκης.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έχουμε $Ε\hat{Η}Γ=Α\hat{Γ}Β$ [εγγεγραμμένη και γωνία χορδής – εφαπτομένης] $=Α\hat{Δ}Ε$ [γιατί ΒΓΕΔ εγγράψιμο]

Άρα είναι ΓΗ//ΑΒ.

Επειδή ΑΒ//ΓΗ και Δ μέσον ΑΒ θα έχουμε: $\frac{ΑΔ}{ΘΗ}=\frac{ΖΔ}{ΖΗ}=\frac{ΔΒ}{ΗΓ}$ και αφού ΔΒ=ΑΔ έχουμε: ΗΓ=ΘΗ.

Αν ΒΕ τέμνει την ΓΗ στο Θ΄, τότε:

$\frac{Β\Delta}{Η\Theta'}=\frac{\Delta Ε}{ΕΗ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{Α\Delta}{ΓΗ}=\frac{Β\Delta}{ΓΗ}\Rightarrow Η\Theta'=ΓΗ$ και $\Theta'\equiv\Theta$.

2. Θα προσδιορίσουμε το σύνολο των τιμών της f για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{Z}$.

Ζητάμε τα $\kappa\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση f(x)=κ έχει λύση στο πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$ της f. Έχουμε

$$f(x)=\kappa\Leftrightarrow\frac{12(\alpha x+36)}{x^2+36}=\kappa\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa x^2-12\alpha x+36(\kappa-12)=0 \quad (1)$$

- Για κ=0 η (1) έχει λύση, μόνον όταν α≠0.
- Για α=0 η (1) έχει λύση, αν, και μόνον αν, κ(κ-12)≤0 και κ≠0 ⇔ 0<κ≤12, οπότε η f δεν έχει ελάχιστο.
- Έστω κ≠0 και α≠0.

Η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν

$$\Delta=144(\alpha^2-\kappa^2+12\kappa)\ge 0\Leftrightarrow \kappa^2-12\kappa-\alpha^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa\in[6-\sqrt{36+\alpha^2},6+\sqrt{36+\alpha^2}],\quad \kappa\neq 0.$$

Επειδή για α≠0, το κ=0 είναι λύση, θα έχουμε ότι: $f(\mathbb{R})=[6-\sqrt{36+\alpha^2},\ 6+\sqrt{36+\alpha^2}]$

Επομένως η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι ακέραιοι, αν και μόνον αν,

$$\sqrt{36+\alpha^2}=b\in\mathbb{Z}_+^*\Leftrightarrow b^2-\alpha^2=36,\ \alpha\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}_+^*$$

$$\Leftrightarrow (b-\alpha)\cdot(b+\alpha)=36,\ \alpha\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}_+^*.$$

Αν θέσουμε b-α=m, b+α=n, τότε $b=\sqrt{36+\alpha^2}>|\alpha|$ και $b=\frac{m+n}{2}\in\mathbb{Z}_+^*$, $\alpha=\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}$, οπότε πρέπει το άθροισμα και η διαφορά των α, b πρέπει να είναι άρτιος ακέραιος. Άρα αποδεκτές είναι οι περιπτώσεις:

$(m,n)=(2,18)$ ή

$(m,n)=(18,2)\Leftrightarrow b=10,\ \alpha=8$ ή

$\Leftrightarrow b=10,\ \alpha=-8$.

Άρα το ζητούμενο συμβαίνει για α=8 ή α=-8.

3. (i) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{x+y}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{x+y}{3}\Leftrightarrow$$

$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{1}{3}$, αφού x+y>0

$$\Leftrightarrow 3(x^2-xy+y^2)\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2(x^2-2xy+y^2)\ge 0\Leftrightarrow 2(x-y)^2\ge 0$, ισχύει

(ii) Όπως στην Άσκηση 2 της Β΄ Λυκείου θα έχουμε:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\right]$$

$\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}+\frac{y+z}{3}+\frac{z+x}{3}\right)=\frac{x+y+z}{3}$, λόγω (i).

4. Ονομάζουμε A_1 το σημείο που θα χρησιμοποιηθεί πρώτο, A_2 αυτό που θα χρησιμοποιηθεί δεύτερο κ.ο.κ.

Είναι ουσιαστικό να παρατηρήσουμε ότι ο μαθητής που θα χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο A_{98}, αυτός θα χάσει το παιχνίδι, αφού ο άλλος στη συνέχεια θα γράψει τη χορδή $A_{99}A_{100}$ ή την $A_\kappa A_{100}$ για κάποιο κ=1,2,…,99, και θα τελειώσει το παιγνίδι.

Για τη χρησιμοποίηση των σημείων A_1, A_2, … , A_{97} μπορούν να γραφούν το πολύ $\frac{97\cdot 96}{2}=97\cdot 48=4656$ χορδές. Έτσι, αν γραφούν όλες οι 4656 χορδές, αφού ο Α αρχίζει πρώτος, είναι δυνατόν ο Β να γράψει την 4656η χορδή και έτσι να αναγκάσει τον Α να χρησιμοποιήσει πρώτος το σημείο A_{98}.

Άρα ο Β έχει στρατηγική νίκης.

«Ολυμπιακές Προσεγγίσεις»

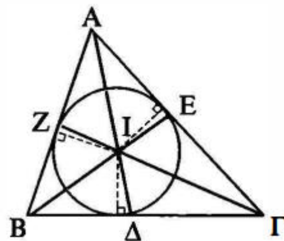
του Σωτήρη Λουρίδα

1. Αρχικά θα επιλύσουμε το προτεινόμενο πρόβλημα των προηγούμενων «Ολυμπιακών προσεγγίσεων» του τεύχους 38 του Ευκλείδη Β΄.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ, τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου του κύκλου με τις πλευρές $ΒΓ=α$, $ΑΓ=β$, $ΑΒ=γ$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι

$$\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+$$
$$+(\gamma-\alpha)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

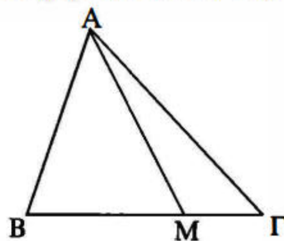
Λύση:



σχήμα 1

Γνωρίζουμε ότι:
$Β\Delta=ΒΖ=\tau-\beta$, $\Gamma\Delta=ΓΕ=\tau-\gamma$, $ΑΖ=ΑΕ=\tau-\alpha$, όπου 2τ η περίμετρος του ΑΒΓ.

Γνωρίζουμε ταυτόχρονα ότι για το τυχαίο σημείο Μ, εσωτερικό της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει: $ΑΒ\cdot ΜΓ+ΑΓ\cdot ΜΒ>ΑΜ\cdot ΒΓ$ (ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄, τεύχος 38, σελ. 18, Θέμα 6).



σχήμα 2

Άρα:
$\alpha\cdot Α\Delta<\gamma\cdot \Delta\Gamma+\beta\cdot Β\Delta \Rightarrow$
$\alpha\cdot Α\Delta<\gamma\cdot(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\beta)$, όμοια
$\beta\cdot ΒΕ<\alpha\cdot(\tau-\alpha)+\gamma(\tau-\gamma)$ και
$\gamma\cdot ΓΖ<\alpha(\tau-\alpha)+\beta(\tau-\beta)$.

Άρα: $\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ<2\alpha(\tau-\alpha)+$
$2\beta(\tau-\beta)+2\gamma(\tau-\gamma)\Leftrightarrow$
$\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ<2\alpha\tau-2\alpha^2+$
$2\beta\tau-2\beta^2+2\gamma\tau-2\gamma^2\Leftrightarrow$
$\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ+(\alpha-\beta)^2+$
$(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2<(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\alpha^2-2\beta^2-2\gamma^2$
$+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\Leftrightarrow$
$\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2<$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-2\alpha^2-2\beta^2-2\gamma^2+$
$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\Leftrightarrow$
$\alpha\cdot Α\Delta+\beta\cdot ΒΕ+\gamma\cdot ΓΖ+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+$
$(\gamma-\alpha)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

2. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $y=f(x)/\mathbb{R}$, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε φυσικό αριθμό ν να ισχύει $f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)=f(x)$. Να βρεθεί ο τύπος της f, αν $f(2001)=2004$.

Λύση:

Για $\nu=1$ έχουμε $f(x+1)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Άρα $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots=f(\nu)$ που σημαίνει ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν έχουμε $f(0)=f(\nu)=f(\nu-1)=\kappa$, όπου κ μια σταθερή ποσότητα.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι για κάθε φυσικό ν έχουμε:
$f(0)=f(-1)=f(-2)=\cdots=f(-\nu+1)=f(-\nu)=\cdots=\kappa$
δηλαδή για κάθε ακέραιο αριθμό ν έχουμε:

$$f(\nu)=\kappa.$$

Έστω $\frac{\mu}{\nu}$ θετικός ρητός, μ, ν φυσικοί.

$f\left(\frac{\mu}{\nu}\right)=f\left(\frac{\mu-1}{\nu}+\frac{1}{\nu}\right)=f\left(\frac{\mu-1}{\nu}\right)=$

$f\left(\frac{\mu-2}{\nu}\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{\nu}\right)=f(0)=\kappa$, αφού

$f\left(\frac{\mu-(\mu-1)}{\nu}\right)=f\left(\frac{1}{\nu}\right)$ και $f\left(\frac{\mu-\mu}{\nu}\right)=f(0)$.

Έστω τώρα $\frac{-\mu}{\nu}$ αρνητικός ρητός (μ, ν φυσικοί).

Έχουμε: $f\left(\frac{-\mu}{\nu}\right)=f\left(\frac{-\mu}{\nu}+\frac{1}{\nu}\right)=f\left(\frac{-\mu+1}{\nu}\right)=$

$f\left(\frac{-\mu+2}{\nu}\right)=\cdots=f\left(\frac{-\mu+\mu}{\nu}\right)=f(0)=\kappa$.

Άρα για κάθε ρητό αριθμό ρ έχουμε:

$$f(\rho)=\kappa.$$

Έστω, τώρα, x τυχαίος άρρητος αριθμός. Γνωρίζουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών, έστω ρ_ν, δηλαδή $\rho_\nu \to x$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και επομένως:

$$\lim f(\rho_\nu)=f(\lim\rho_\nu)=f(x).$$

Όμως: $\lim f(\rho_\nu)=\lim\kappa=\kappa$.

Τελικά $f(x)=\kappa$, όπου κ μια σταθερή τιμή.

Επειδή $f(2001)=2004$ έχουμε $\kappa=2004$.

Άρα: $f(x)=2004$.

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος m ώστε $m(m+1)$ να είναι κ-τάξης δύναμη ακεραίου αριθμού, (κ>1).

Λύση: Για m=1 είναι προφανές

Οι m και $m+1$ είναι πρώτοι μεταξύ τους για αυτό αν $m\cdot(m+1)$ είναι κ τάξης δύναμη ακεραίου τότε κάθε ένας από m, $m+1$ θα είναι κ τάξης δύναμη ακεραίου αριθμού.

Πράγματι αν αναλύσουμε το $m(m+1)$ σε απλή μορφή θα έχουμε

$$m(m+1)=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_i^{a_i}$$

Επειδή $p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_i^{a_i}=p^k$ με $p\neq 1$ θα πρέπει κάθε a_i να διαιρείται με κ και κάθε $p_i^{a_i}$ θα διαιρεί τελείως το m ή το $m+1$. Όμως οι διαδοχικοί αριθμοί m και $m+1$ δεν μπορεί να είναι και οι δύο κ τάξης δυνάμεις ακεραίων αριθμών (αν $a^\kappa=m$ και $\kappa>1$ τότε

$(a+1)^\kappa>(a+1)a^{\kappa-1}=a^\kappa+a^{\kappa-1}>m+1)$.

4. Για ποιους πρώτους αριθμούς p η διαίρεση του $2^{p-1}-1$ με το p είναι τέλειο τετράγωνο;

Λύση:

Προφανώς $p\neq 2$.

Τότε: $\frac{2^{p-1}-1}{p}=\frac{(2^{\frac{p-1}{2}}+1)(2^{\frac{p-1}{2}}-1)}{p}$.

$(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1)=1$ δηλαδή είναι πρώτοι μεταξύ τους. Αφού, αν δεν ήταν τότε κάθε ένας από αυτούς θα ήταν ζυγός. (Η διαφορά τους είναι ο 2 και επομένως το Ε.Κ.Π. τους μπορεί να είναι μόνο ο 2 άτοπο, αφού $p>2$). Θεωρούμε ότι ο $2^{\frac{p-1}{2}}+1$ διαιρείται με το p τότε από τα δεδομένα έχουμε: $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}+1}{p}(2^{\frac{p-1}{2}}-1)=a^2$ με $(\frac{2^{\frac{p-1}{2}}+1}{p},\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1)$, δηλαδή είναι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα κάθε ένας από αυτούς πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέτουμε $2^{\frac{p-1}{2}}-1=b^2$ όπου $b=2k+1$. Αυτό μας δίνει $2^{\frac{p-1}{2}}=4k^2+4k+2=4k(k+1)+2$.

Από εδώ έχουμε ότι $\frac{p-1}{2}<2$ αφού αν δεν ήταν το αριστερό μέλος θα μπορούσε να διαιρεθεί με 4 χωρίς το δεξί να διαιρείται με 4. Άρα $2<p<5$ δηλ. $p=3$. Τότε $\frac{2^{\frac{p-1}{2}}+1}{p}=1$ και επομένως αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Έστω ότι ο $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ διαιρείται με p. Θέτουμε $2^{\frac{p-1}{2}}-1=c^2$ με

$c=2n+1\Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}}=c^2-1=4n(n+1)$, όταν $n>1$ το δεξιό μέλος θα έχει περιττό διαιρέτη, άτοπο λόγω του αριστερού μέλους. Άρα $n=1$ τότε $2^{\frac{p-1}{2}}=8$, $\frac{p-1}{2}=3$ άρα $p=7$.

5. Θεώρημα του Wilson

Ο φυσικός αριθμός $p>1$ είναι πρώτος αν

και μόνο αν $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p$.

6. Βασικό Θεώρημα.

Να αποδειχθεί ότι ο φυσικός αριθμός $p>1$ είναι πρώτος αν και μόνο αν $k!\cdot(p-k-1)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod p$ όπου k ακέραιος αριθμός τέτοιος που $0 \le k \le p-1$.

Υπόδειξη:

Για $k=0$ το αποδεικνύουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Wilson. Συνεχίστε επαγωγικά.

7. Αποδείξτε ότι, αν p είναι αριθμός πρώτος μεγαλύτερος του 3 τότε ο αριθμητής του $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$ διαιρείται με p^2.

Λύση:

$$^{*}\Sigma = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1} = p\cdot\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k(p-k)}.$$

Αρκεί να αποδείξω ότι

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k(p-k)} = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} f(k)$$ διαιρείται με p, όπου $f(k) = (1\cdot p-1^2)\cdot(2\cdot p-2^2)\cdots$ $[(k+1)p-(k+1)^2]\left(\frac{p-1}{2}\cdot p-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right)$ (ας λάβουμε υπ' όψιν ότι: $kp-k^2 = k(p-k)$).

Κάνοντας τις πράξεις κατανοούμε ότι ο διαιρέτης του Σ_1 διαιρείται με p ακριβώς όταν ο

$$A = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 1^2\cdot 2^2\cdots(k-1)^2\cdot(k+1)^2\cdots\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

διαιρείται με p. Θεωρούμε

$$t_k = 1\cdot 2\cdots(k-1)(k+1)\cdots\frac{p-1}{2}.$$

Τότε: $k\cdot t_k = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$

Από το βασικό θεώρημα (6) για $k=\frac{p-1}{2}$ θα έχουμε: $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

Αν $p=4m+3$ θα έχουμε:

$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 2 \pmod p$ και αν $p=4m+1$ θα έχουμε: $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod p$.

Έστω, λοιπόν, $p=4m+3$. Τότε $k^2\cdot t_k^2 \equiv 1 \pmod p$. Οι αριθμοί $k\cdot 1$, $k\cdot 2$, ..., $k\cdot(p-1)$, είναι $p-1$ το πλήθος και δύο τυχαίοι από αυτούς δεν συγκρίνονται ως προς modp. Άρα θα υπάρχουν ακριβώς δύο από αυτούς λ_k και τ_k ώστε $k\cdot\lambda_k \equiv 1 \pmod p$ και $k\cdot\tau_k \equiv -1 \pmod p$. Άρα $\lambda_k+\tau_k = p$ οπότε ένας από αυτούς είναι μικρότερος ή ίσος με $\frac{p-1}{2}$. **Άρα για κάθε φυσικό k υπάρχει φυσικός αριθμός** m_k ώστε: $1 \le m_k \le \frac{p-1}{2}$ **και** $k^2\cdot m_k^2 \equiv 1 \pmod p$. Άρα $\forall k: 1\le k\le\frac{p-1}{2}$ θα έχουμε:

$t_k^2 \equiv m_k^2 \pmod p$ και

$$A \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} t_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \lambda_k^2 = 1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p(p-1)(p+1)}{24} \equiv 0 \pmod p$$

όταν $p>3$ άρα P/A.

Όμοια εργαζόμαστε και όταν $p=4m+1$.

---

* Αυτός ο συμβολισμός είναι πολύ σημαντικός και θα μπορούσε να εκληφθεί σαν μέθοδος (εξήγηση: $\frac{p}{p-1} = \frac{p-1+1}{p-1} = 1+\frac{1}{p-1}$, $\frac{p}{2(p-2)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}$, ..., $\frac{p}{\frac{p-1}{2}\left(p-\frac{p-1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}$,

άρα:

$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\ldots+\frac{1}{p-1} = p\sum_{k=1}^{p-1/2}\frac{1}{k(p-k)}$)

8. Εάν ο φυσικός αριθμός n έχει 1000 ψηφία ώστε κάθε ψηφίο από αυτά είναι 5 με πιθανή εξαίρεση ενός ψηφίου τότε ο αριθμός n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε ότι ο n είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε του n το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 1, 4, 5,

6 ή 9.

α) Έστω ότι n έχει σαν τελευταίο ψηφίο το 5 τότε $\sqrt{n} = 10 \cdot k + 5$ και $n = 100\left(k^2 + k\right) + 25$.

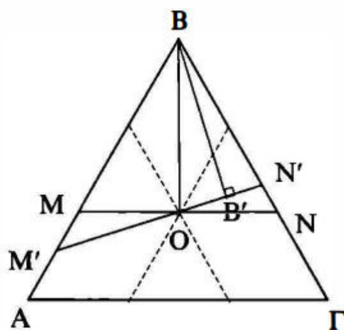
Δηλαδή προτελευταίο ψηφίο του n είναι 2. Το άθροισμα των ψηφίων του n θα είναι $S(n) = 999 \cdot 5 + 2$ το οποίο ισοδύναμα σημαίνει ότι αν διαιρέσουμε τον n με 3 θα έχουμε υπόλοιπο 2. Από την άλλη μεριά αφού το n είναι τέλειο τετράγωνο τότε με διαίρεση με 3 θα έχει υπόλοιπο 0 ή 1 άρα ο αριθμός δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Έστω n έχει για τελευταίο ψηφίο το 6. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $S(n) = 999 \cdot 5 + 6$ δηλαδή το $S(n)$ και επομένως και το n διαιρείται με 3 αλλά όχι με 9. Άρα ο n δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

γ) Αν ο n τελειώνει σε 50, 51, 54 ή 59 τότε με διαίρεση με 4 θα έχουμε υπόλοιπο αντίστοιχα 2, 5, 2 ή 3. Από την άλλη μεριά αφού n τέλειο τετράγωνο τότε με διαίρεση με 4 θα έχει υπόλοιπο 0 ή 1. Άρα το n δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί το ελάχιστου μήκους ευθύγραμμο τμήμα το οποίο κινούμενο έτσι ώστε τα άκρα του να γλιστρούν στην περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ, να καλύπτει όλα τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση:



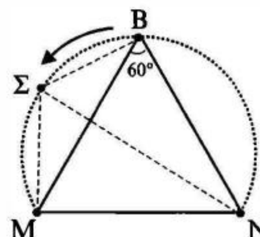
Σχήμα 1

Αφού θέλουμε το ευθύγραμμο τμήμα να καλύπτει το εσωτερικό του τριγώνου, θεωρούμε ότι σε κάποια στιγμή θα περάσει και από το κέντρο βάρους του τριγώνου. Θα αποδείξουμε ότι από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που περνούν από το κέντρο του ΑΒΓ και έχουν τις άκρες τους πάνω στις πλευρές του τριγώνου το μικρότερο μήκος θα έχει το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ για το οποίο ισχύει ΜΝ//ΑΓ. Έστω Μ΄Ν΄ τυχαίο ευθ. τμήμα με άκρα στις πλευρές του τριγώνου το οποίο περνάει από το κέντρο του.

Είναι $OM' > OM = ON > ON'$ ($O\hat{M}M' = 120°$, $O\hat{N}N' = 60°$ ...). Ταυτόχρονα $M\hat{O}M' = N\hat{O}N'$, οπότε: $E_{OMM'} > E_{ONN'}$.(Αφίεται στους αναγνώστες)

Τελικά $E_{BM'N'} > E_{BMN} \Rightarrow M'N' \cdot BB' > MN \cdot BO$ με $BO > BB' \Rightarrow N'M' > NM$. Έτσι αποδείχτηκε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που θεωρήσαμε δεν μπορεί να είναι μικρότερο του ΜΝ.

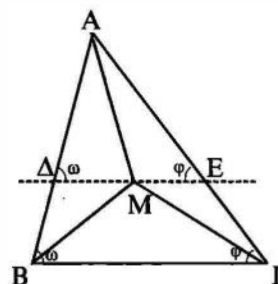
Επί της ουσίας μένει να αποδείξουμε ότι το ΜΝ κινούμενο με βάση την κίνηση του Μ από το Μ έως το Β καλύπτει όλη την επιφάνεια του ΒΜΝ. Αυτό συμβαίνει διότι οι θέσεις από τις οποίες διέρχεται είναι σε απόλυτη αντιστοίχιση με τις θέσεις που δημιουργούνται αν σταθεροποιήσουμε το ΜΝ και διαπιστώναμε ότι το Β κινείται στο σταθερό τόξο ($\hat{B} = 60°$ και ΜΝ ευθύγραμμο τμήμα σταθερού μήκους) από το Β έως το Μ αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Αν παρατηρήσουμε ότι: $N\Sigma = B\Sigma + \Sigma M \geq BM = MN$, φαίνεται ξεκάθαρα το «σάρωμα» της επιφάνειας



10. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με μικρότερη, έστω την πλευρά ΒΓ και σημείο Μ, εσωτερικό του τριγώνου. Αποδείξατε ότι

$$\mathbf{AM + MB + M\Gamma < AB + A\Gamma}.$$

Λύση:



Προφανώς, λόγω του ότι η ΒΓ είναι η μικρότερη πλευρά του τριγώνου σημαίνει ότι και η γωνία $\hat{A}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου. Δηλαδή $A < B$ και $A < \Gamma$. Θεωρούμε από το Μ την ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ με Δ σημείο της ΑΒ και Ε σημείο της ΑΓ. Προφανώς $\hat{\Delta} = \hat{B}$ και $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ άρα $\hat{A} < \hat{\Delta}$ και $\hat{A} < \hat{E}$ που σημαίνει ότι: $\Delta E < AE$ και $\Delta E < AB$ (1).

Καταλαβαίνουμε ότι μία από τις γωνίες $A\hat{M}E$, $A\hat{M}\Delta$ θα είναι αμβλεία.

Έστω $A\hat{M}E > 90° \Rightarrow AM < AE$ (2).

Από τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Delta M}$ και $\overset{\Delta}{ME\Gamma} \Rightarrow BM < B\Delta + \Delta M$ και $M\Gamma < ME + E\Gamma$ (3).

Από (2), (3) έχουμε:

$$AM + MB + M\Gamma < AE + B\Delta + \Delta M + ME + E\Gamma \Rightarrow$$
$$AM + MB + M\Gamma < B\Delta + A\Gamma + \Delta E \ (4).$$

Με βάση τις (1), (4) προκύπτει ότι:

$$AM + MB + M\Gamma < A\Gamma + B\Delta + A\Delta \text{ ή}$$
$$AM + MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$

Προτεινόμενο πρόβλημα:

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ώστε $A\Gamma \geq B\Delta > 2AB$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι συντομότεροι τρόποι σύνδεσης των κορυφών του από εκείνον των διαγωνίων του.

Λύνοντας το 3ο πρόβλημα της Τρίτης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας Νέων του 1999 ...

του Γιώργου Κ. Βακαλόπουλου — Μαθητού Α΄ τάξης 1ου Λυκείου Αμαρουσίου

Με αφορμή το 3ο πρόβλημα που δόθηκε στην Τρίτη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων του 1999 στο Plovdiv της Βουλγαρίας παραθέτουμε μια πρόταση με την απόδειξή της που αποτελεί γενίκευση των ζητουμένων του προβλήματος αυτού. Στο τέλος της πρότασης και της απόδειξης της, ακολουθεί το αρχικό πρόβλημα ως εφαρμογή της πρότασης αυτής.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν έχουμε k τυχαία σημεία στο επίπεδο, n από τα οποία σχηματίζουν κυρτό n-γωνο (k, n ⩾ 3 και k ⩾ n) τότε υπάρχουν :

A. $\boxed{(k-n)\cdot 3 + 2n - 3}$ **(α) μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα δύο από τα k σημεία, και**

B. $\boxed{(k-n)\cdot 2 + n - 2}$ **(β) τρίγωνα με κορυφές τρία από τα k σημεία, τα οποία δεν επικαλύπτουν το ένα το άλλο.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

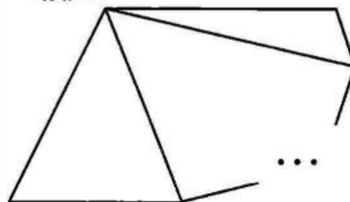
1. Έστω n σταθερό

- Για **k = n**, υπάρχουν **2n – 3 ευθύγραμμα τμήματα** και **n – 2 τρίγωνα**

Πράγματι στο n-γωνο υπάρχουν : (n πλευρές) + (n – 3 μη τεμνόμενες διαγώνιες) = 2n – 3 μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα και ορίζονται n – 2 τρίγωνα.

- Για **k = n + p**, p = 1,2,3,...

σχήμα 1



Δεχόμαστε ότι ισχύει για k = n + p σημεία και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για k + 1 = n + p + 1 σημεία.

Δηλαδή, **δεχόμαστε** ότι για n + p σημεία υπάρχουν:

$$\mathbf{(n + p - n) \cdot 3 + 2n - 3 = 3p + 2n - 3}$$

μη τεμνόμενα **ευθύγραμμα τμήματα** και

$$\mathbf{(n + p - n) \cdot 2 + n - 2 = 2p + n - 2}$$

τρίγωνα με την αρχική ιδιότητα.

Θα αποδείξουμε ότι για n + p + 1 σημεία :

A. Υπάρχουν $(n + p + 1 - n) \cdot 3 + 2n - 3 =$ **= 3p + 2n ευθύγραμμα τμήματα (I) και**

B. Υπάρχουν $(n + p + 1 - n) \cdot 2 + n - 2 =$

$=$ **2p + n τρίγωνα (II)** με την αρχική ιδιότητα

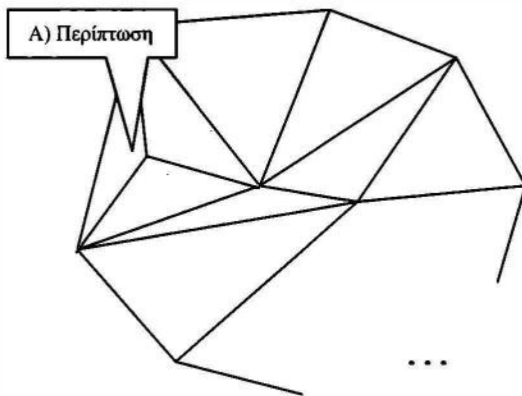
Α. Πράγματι αν προσθέσουμε ένα ακόμη σημείο, τότε αυτό θα είναι **ή** μέσα σε κάποιο τρίγωνο (Α περίπτωση) οπότε προσθέτουμε άλλα 3 ευθύγραμμα τμήματα **ή** θα είναι πάνω σε κάποια πλευρά (Β περίπτωση) οπότε σχηματίζονται άλλα 4 ευθύγραμμα τμήματα. Στη δεύτερη όμως περίπτωση, ταυτόχρονα η πλευρά στην οποία βρίσκεται θα πάψει να υπάρχει. Άρα στη περίπτωση αυτή προσθέτουμε πάλι 3 τμήματα.

Άρα το σύνολο των μη τεμνόμενων ευθυγράμμων τμημάτων και στις δύο περιπτώσεις γίνεται :

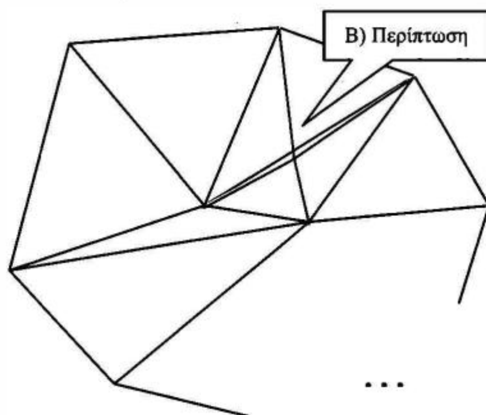
$$(3p + 2n - 3) + 3 = 3p + 2n.$$

Άρα η **(I)** ισχύει.

σχήμα 2α



σχήμα 2β



B. Και στις 2 παραπάνω περιπτώσεις τα τρίγωνα αυξάνονται κατά 2 (στην Α το ένα τρίγωνο γίνεται τρία και στην Β τα δύο τρίγωνα γίνονται τέσσερα).

Άρα το σύνολο των τριγώνων γίνεται

$$(2p + n - 2) + 2 = 2p + n.$$

Άρα η **(II)** ισχύει.

2. Έστω k σταθερό

- Για $k = n$, ισχύει (σχήμα 1)
- Για $k = n + p$

Δεχόμαστε ότι ισχύει για n-γωνο και $k - n$ εσωτερικά σημεία και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για ένα $(n + 1)$ - γωνο με $k - n - 1$ εσωτερικά σημεία.

Δηλαδή **δεχόμαστε** ότι για $k = n + p$ υπάρχουν $(k - n) \cdot 3 + 2n - 3 = 3k - n - 3$ μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα και ορίζονται

$$(k - n) \cdot 2 + n - 2 = 2k - n - 2$$

τρίγωνα με την αρχική ιδιότητα και **θα αποδείξουμε** ότι για ένα (n+1)-γωνο με $k - n - 1$ εσωτε**ρικά σημεία** :

Α. Υπάρχουν $(k - n - 1) \cdot 3 + 2(n + 1) - 3 =$

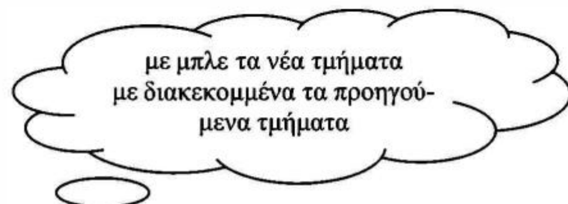
$=$ **3k – n – 4 ευθύγραμμα τμήματα (ΙΙΙ)** και

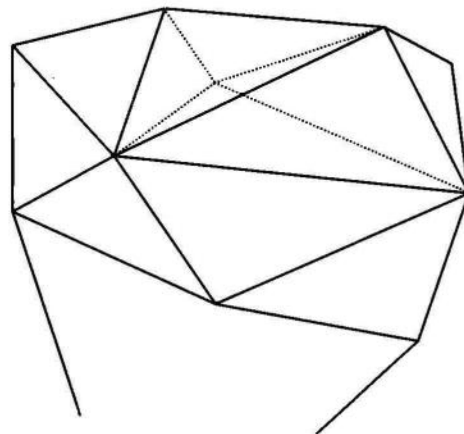
B. Ορίζονται $(k - n - 1) \cdot 2 + (n + 1) - 2 =$

$=$ **2k – n – 3 τρίγωνα (IV)**

Α. Πράγματι, αν βγάλουμε ένα σημείο έξω από το n-γωνο, τα ευθύγραμμα τμήματα μειώνονται κατά $4 - 1 - 2 = 1$ (σχήμα 3).

Σχήμα 3





Γενικά αν στο σημείο αυτό αρχικά καταλήγουν m ευθύγραμμα τμήματα, τότε μετά την απομάκρυνσή του έξω από το n-γωνο θα σχηματιστούν μέσα σ' αυτό m–3 νέες μη τεμνόμενες διαγώνιες του m-γώνου και τελικά μαζί με τα δύο νέα

τμήματα που θα σχηματιστούν όταν τοποθετηθεί έξω από το n-γωνο θα έχουμε ευθύγραμμα τμήματα μειωμένα κατά ένα.

Άρα το σύνολο των μη τεμνόμενων ευθυγράμμων τμημάτων γίνεται:

$$\mathbf{(3k - n - 3) - 1 = 3k - n - 4}.$$

Άρα η **(ΙΙΙ)** ισχύει.

Β. Ομοίως αν το σημείο απομακρυνθεί αντί των d τριγώνων στα οποία ήταν κορυφή θα σχηματιστούν d–2 τρίγωνα και μαζί με το τρίγωνο που σχηματίζεται έξω από το n-γωνο έχουμε συνολικά τρίγωνα μειωμένα κατά ένα.

Άρα το σύνολο των τριγώνων γίνεται :

$$\mathbf{(2k - n - 2) - 1 = 2k - n - 3}.$$

Άρα η **(IV)** ισχύει.

* * *

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δίνεται τετράγωνο S με πλευρά 20. Έστω M το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του S μαζί με 1999 τυχαία σημεία στο εσωτερικό του S. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με κορυφές σημεία του M και με εμβαδό μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{10}$.

Βαλκανική Ολυμπιάδα Νέων 1999

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση για n = 4 και k = 1999 + 4 = 2003 τα τρίγωνα που σχηματίζονται χωρίς να επικαλύπτουν το ένα το άλλο προκύπτουν με εφαρμογή του τύπου **(β)** :

$$\mathbf{(k - n) \cdot 2 + n - 2} \text{ **δηλαδή**}$$
$$\mathbf{(2003 - 4) \cdot 2 + 4 - 2 = 4000.}$$

Το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται με το εμβαδό του τετραγώνου S δηλαδή 400 τετραγωνικές μονάδες.

Άρα σύμφωνα με την αρχή του Dirichlet υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο που έχει εμβαδό $\mathbf{E} \le \frac{1}{10}$.

* * *

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Με τα δεδομένα της παραπάνω άσκησης, το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που δεν τέμνονται ανά δύο προκύπτει με εφαρμογή του τύπου

(α): $\mathbf{(k - n) \cdot 3 + 2n - 3}$ δηλαδή :

$$\mathbf{(2003 - 4) \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 3 = 6002}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

Η παραπάνω πρόταση ισχύει και στη περίπτωση που όλα ή μερικά από τα k – n σημεία είναι συνευθειακά.

Παράδειγμα :

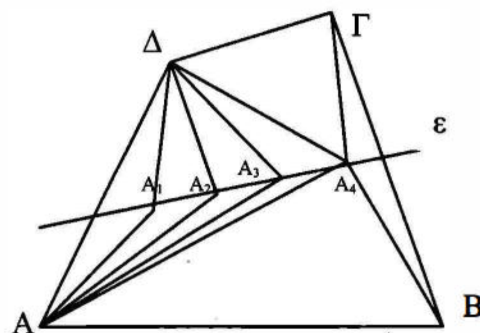
Έστω 8 σημεία από τα οποία 4 σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο και 4 βρίσκονται στο εσωτερικό του και συγκεκριμένα επ΄ευθείας (ε).

Τότε υπάρχουν 10 τρίγωνα με κορυφές τα 8 αυτά σημεία που δεν επικαλύπτουν το ένα το άλλο. ($ΑΔΑ_1$, $Α_1ΔΑ_2$, $Α_1ΑΑ_2$, $ΔΑ_2Α_3$, $ΑΑ_2Α_3$, $ΔΑ_3Α_4$, $ΑΑ_3Α_4$, $ΔΑ_4Γ$, $ΑΑ_4Β$, $ΓΑ_4Β$)

Πράγματι υπάρχουν: (k – n) ·2 + n – 2 = = (8 – 4) ·2 + 4 – 2 = **10 τρίγωνα**

Επίσης υπάρχουν 17 μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα δύο από τα 8 αυτά σημεία. (ΑΔ, $ΑΑ_1$, $ΔΑ_1$, $Α_1Α_2$, $ΑΑ_2$, $ΔΑ_2$, $Α_2Α_3$, $ΔΑ_3$, $ΑΑ_3$, $Α_3Α_4$, $ΔΑ_4$, $ΑΑ_4$, ΔΓ, $ΓΑ_4$, ΑΒ, $ΒΑ_4$, ΒΓ)

Πράγματι υπάρχουν : (k – n) ·3 + 2n – 3 = = (8 – 4) ·3 + 2 · 4 – 3 = **17 ευθύγραμμα τμήματα.**





Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

18η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

Θέματα μεγάλων τάξεων

Θέμα 1ο.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Οι ΒΔ, ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ και η ΔΕ τέμνει το τόξο ΑΒ, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Κ. Αν είναι $KA_1 \perp B\Gamma$, $KB_1 \perp A\Gamma$, $K\Gamma_1 \perp AB$ και το σημείο Δ απέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ απόσταση ίση με x, ενώ το Ε απέχει από τις πλευρές ΓΑ, ΒΓ απόσταση ίση με y, τότε:

i. να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων KA_1, KB_1, $K\Gamma_1$ συναρτήσει των x, y και του λόγου $\lambda = \frac{K\Delta}{E\Delta}$

ii. να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{KB} = \frac{1}{KA} + \frac{1}{K\Gamma}$.

Θέμα 2ο.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α,β τέτοιοι ώστε το γινόμενο $(15\alpha+\beta)\cdot(\alpha+15\beta)$ να είναι μία δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

Θέμα 3ο.

Έστω $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $f(1)=3$ και

$$f(m+n)+f(m-n)-m+n-1=\frac{f(2m)+f(2n)}{2},$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m, n με $m \geq n$.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Θέμα 4ο.

Στο πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από 1 έως 500.

Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το εξής παιγνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιγνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δύο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο Α.

Αν ο Α αρχίζει πρώτος, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης;

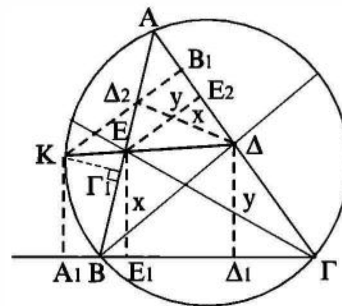
Λύσεις Θεμάτων μεγάλων τάξεων

Θέμα 1ο.

(α) Φέρουμε $EE_1 \perp B\Gamma$, $EE_2 \perp A\Gamma$, $\Delta A_1 \perp B\Gamma$, $\Delta\Delta_2 \perp AB$, οπότε σύμφωνα με την άσκηση θα είναι $EE_1 = EE_2 = x$, $\Delta\Delta_1 = \Delta\Delta_2 = y$.

Είναι $EE_2 \perp A\Gamma$, $KB_1 \perp A\Gamma$, οπότε

$$\frac{KB_1}{y} = \frac{K\Delta}{E\Delta} = \lambda \Rightarrow KB_1 = \lambda y.$$



Επίσης $K\Gamma_1 // \Delta\Delta_2$ και

$$\frac{K\Gamma_1}{x} = \frac{KE}{E\Delta} = \frac{K\Delta - E\Delta}{E\Delta} = \lambda - 1 \Rightarrow K\Gamma_1 = (\lambda-1)x.$$

Στο τραπέζιο $KA_1\Delta_1\Delta(KA_1 // \Delta\Delta_1)$ είναι $EE_1 // KA_1 // \Delta\Delta_1$ και $\frac{KE}{E\Delta} = \lambda - 1$, οπότε εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\frac{KA_1 + (\lambda-1)x}{1+(\lambda-1)} = y \Rightarrow KA_1 = \lambda y - (\lambda-1)x.$$

(β) Η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη προς την

$$KA \cdot K\Gamma = KB \cdot K\Gamma + KA \cdot KB. \quad (1)$$

Από τα τρίγωνα ΚΒΓ, ΚΑΓ και ΚΑΒ έχουμε:

$$KB \cdot K\Gamma = 2R \cdot KA_1, \quad KA \cdot K\Gamma =$$
$$= 2R \cdot KB_1, \quad KA \cdot KB = 2R \cdot K\Gamma_1,$$

οπότε η (1) γίνεται:

$$2R \cdot KB_1 = 2R \cdot KA_1 + 2R \cdot K\Gamma_1$$
$$\Leftrightarrow KB_1 = KA_1 + K\Gamma_1,$$

που ισχύει, όπως επαληθεύεται εύκολα μέσω των αποτελεσμάτων του ερωτήματος (α).

Θέμα 2°.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, αν για κάποιους θετικούς ακέραιους α, β ισχύει η ισότητα $(15\alpha+\beta)(\alpha+15\beta)=3^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$,, τότε πρέπει κ>4, αφού $15\alpha+\beta \geq 16 > 3^2$ και $\alpha+15\beta \geq 16 > 3^2$.

Υποθέτουμε ότι ο κ είναι ο **ελάχιστος** θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχουν κατάλληλοι θετικοί ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε

$$(15\alpha+\beta)\cdot(\alpha+15\beta)=3^\kappa \qquad (1)$$

Τότε οι θετικοί ακέραιοι 15α+β, α+15β διαιρούν το 3^κ, οπότε θα είναι της μορφής

$$15\alpha+\beta=3^m, \quad \alpha+15\beta=3^n, \qquad (2)$$

με $m,n \in \mathbb{Z}$, $m>2$, $n>2$, $m+n=\kappa$.

Από τις (2) προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha=3\alpha_1, \quad \beta=3\beta_1, \ (3)$$

όπου $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 \geq 1$, $\beta_1 \geq 1$.

Λόγω των (3) και (2) έχουμε:

$$(15\cdot 3\alpha_1 + 3\beta_1)\cdot(3\alpha_1 + 15\cdot 3\beta_1) = 3$$
$$\Leftrightarrow (15\alpha_1+\beta_1)\cdot(\alpha_1+15\beta_1) = 3^{m+n-2} = 3^{\kappa-2},,$$

με $m+n-2<\kappa$, που είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει ότι

$$(15\alpha+\beta)\cdot(\alpha+15\beta)=3^\kappa, \quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Θέμα 3°.

Για m=n=0 από τη δοθείσα σχέση λαμβάνουμε f(0)=1.

Επίσης για n=0 λαμβάνουμε:

$$2f(m)-m-1=\frac{f(2m)+f(0)}{2} \Leftrightarrow f(2m)=4f(m)-2m-3,$$

οπότε η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f(m+n)+f(m-n)=2f(m)+2f(n)-2n-2,$$

από την οποία, για n=1, m≥1, λαμβάνουμε

$$f(m+1)+f(m-1)=2f(m)+2$$
$$f(m+1)-f(m)=f(m)-f(m-1)+2$$

Αν θέσουμε

$$x_m=f(m)-f(m-1), \quad m=1,2,3,...$$

τότε η τελευταία ισότητα γίνεται

$$x_{m+1}=x_m+2, \qquad m=1,2,3,...$$
$$x_{m+1}-x_m=2, \qquad m=1,2,3,...$$

οπότε η ακολουθία (x_m), $m\geq 1$, είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $x_1=f(1)-f(0)=3-1=2$ και διαφορά ω=2.

Άρα ο γενικός όρος της ακολουθίας (x_m) θα είναι:

$$x_m=x_1+(m-1)\omega=2\mu, \qquad m=1,2,...$$

οπότε θα έχουμε τις ισότητες:

$$f(1)-f(0)=x_1$$
$$f(2)-f(1)=x_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$f(m)-f(m-1)=x_m$$

από τις οποίες με πρόθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$f(m)-f(0)=x_1+x_2+...+x_m$$
$$f(m)-1=2\cdot(1+2+...+m)$$
$$f(m)=2\cdot\frac{m(m+1)}{2}+1$$
$$f(m)=m^2+m+1, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Θέμα 4°.

Ο μαθητής Β έχει στρατηγική νίκης. Αρκεί να παρατηρήσει ότι οι αριθμοί από 1 έως 500, μπορούν να χωρισθούν σε 250 ζεύγη, όπου τα στοιχεία κάθε ζεύγους έχουν άθροισμα 501, που διαιρείται με το 3.

Έτσι αν κάθε φορά ο Α διαγράφει έναν αριθμό α, ο Β θα διαγράφει τον αριθμό 501-α, οπότε οι δύο αριθμοί που θα μείνουν τελικά θα έχουν άθροισμα 501, που διαιρείται με το 3.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΛΕΥΚΟΠΟΥΛΕΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ 2001
10 Φεβρουαρίου 2001

Θέμα 1

α) Από ν ανδρόγυνα (2ν άτομα) επιλέγουμε τυχαία 2 άτομα.
Ποια η πιθανότητα να είναι ζευγάρι;

β) Αν από τα ν ανδρόγυνα πάρουμε τυχαία κ άτομα, να υπολογιστεί η πιθανότητα:

ι) Να βρεθεί τουλάχιστον ένα ζευγάρι στα κ αυτά άτομα.

ιι) Να βρεθούν ακριβώς j ζευγάρια $(0 \le \kappa - 2j \le \nu - j)$.

Θέμα 2

Ρίχνουμε ν $(\nu \ge 2)$ συμμετρικά νομίσματα, με τις ενδείξεις Κ = Κεφαλή, Γ = Γράμματα, και με την εξής διαδικασία:

Στην πρώτη δοκιμή ρίχνουμε και τα ν νομίσματα, στη δεύτερη ρίχνουμε μόνο τα νομίσματα που έφεραν Γ στην πρώτη δοκιμή (αν υπάρχουν), στην τρίτη μόνο αυτά που έφεραν Γ στην δεύτερη δοκιμή (αν υπάρχουν) κ.ο.κ., μέχρι που να μην υπάρχουν νομίσματα με την ένδειξη Γ.

Να βρεθεί η πιθανότητα:

α) Στην τελευταία δοκιμή να ρίξουμε ν – 1 νομίσματα.

β) Να τελειώσει η διαδικασία στην κ δοκιμή.

γ) Να απαντηθούν τα ερωτήματα (α) και (β), όταν $\nu = 5$ και $\kappa = 2$.

Θέμα 3

Στο ΛΟΤΤΟ επιλέγονται 6 αριθμού από τους 49.

Αν σε ένα δελτίο συμπληρώσουμε 7 αριθμούς πληρώνουμε το ίδιο ποσό με το να συμπληρώσουμε 7 δελτία από 6 αριθμούς στο κάθε δελτίο.

Μας ενδιαφέρει να πετύχουμε 5 ή 6 αριθμούς στο ίδιο δελτίο.

Τι είναι προτιμότερο: Να συμπληρώσουμε ένα δελτίο με 7 αριθμούς ή 7 δελτία από 6 αριθμούς, έτσι ώστε ανά δύο τα 7 δελτία να μην έχουν κοινούς αριθμούς.

Λύσεις των θεμάτων

Θέμα 1

α) Οι δυνατοί τρόποι είναι $\binom{2\nu}{2}$ και οι ευνοϊκοί είναι ν, όσα και τα ζευγάρια, η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$P_\alpha = \frac{\nu}{\binom{\nu}{2}} = \frac{1}{2\nu - 1}$$

βι) Βρίσκουμε πρώτα την πιθανότητα να μην υπάρχει ζευγάρι στα κ άτομα.

$$P = 1 \cdot \frac{2\nu-2}{2\nu-1} \cdot \frac{2\nu-4}{2\nu-2} \cdots \frac{2\nu-2(k-1)}{2\nu-(k-1)} = \frac{2^k \cdot \binom{\nu}{\kappa}}{\binom{2\nu}{k}}$$

Διότι κάθε φορά η επιλογή του κάθε ατόμου γίνεται έτσι ώστε να μην περιλαμβάνεται το «έτερον ήμισυ» των ατόμων που έχουν επιλεχτεί. Ισοδύναμα από τα ν ζευγάρια επιλέγουμε κ ζευγάρια, $\binom{\nu}{\kappa}$ περιπτώσεις, και από κάθε ζευγάρι επιλέγουμε ένα άτομο, 2^κ περιπτώσεις. Η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$P_\iota = 1 - P = 1 - \frac{2^\kappa \cdot \binom{\nu}{\kappa}}{\binom{2\nu}{k}}$$

βιι) Επιλέγουμε πρώτα j ζευγάρια, από τα υπόλοιπα ν – j ζευγάρια επιλέγουμε κ – 2j ζευγάρια και από καθένα απ' αυτά επιλέγουμε ένα άτομο. Όλες οι δυνατότητες είναι $\binom{2\nu}{\kappa}$. Επομένως:

$$P_{\iota\iota} = \frac{\binom{\nu}{j} \cdot \binom{\nu-j}{\kappa-2j} 2^{\kappa-2j}}{\binom{2\nu}{\kappa}}$$

Θέμα 2

Η πιθανότητα ένα νόμισμα να έχει την ένδειξη «Γ», για πρώτη φορά στην j ρίψη, είναι:

$$P_1 = \frac{1}{2^j}$$

Η πιθανότητα ένα νόμισμα να έχει την ένδειξη «Γ», για πρώτη φορά πριν την j ρίψη, είναι:

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} = 1 - \frac{1}{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

α) Αν πάρουμε ν – 1 συγκεκριμένα νομίσματα, από τα ν, η πιθανότητα να φέρουν για πρώτη φορά την ένδειξη «Γ» στην i ρίψη και το άλλο νόμισμα να φέρει την ένδειξη «Γ», για πρώτη φορά, πριν την i ρίψη, είναι:

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{(\nu-1)i} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Η πιθανότητα δεν αλλάζει αν αντί για την έν-

δειξη Γ έχουμε την ένδειξη Κ. Επομένως η πιθανότητα, στην τελευταία ρίψη, τα συγκεκριμένα (ν −1) νομίσματα, να φέρουν την ένδειξη «Γ» είναι:

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i = \frac{1}{\left(2^{\nu}-1\right)\left(2^{\nu-1}-1\right)}$$

Επειδή υπάρχουν $\nu = \binom{\nu}{\nu-1}$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε τα (ν – 1) νομίσματα, τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{\nu}{\left(2^{\nu}-1\right)\left(2^{\nu-1}-1\right)}$$

β) Η πιθανότητα να τελειώσει η διαδικασία πριν την (κ + 1) ρίψη, είναι ίση με την πιθανότητα να τελειώσει η διαδικασία πριν την κ ρίψη συν την πιθανότητα να τελειώσει η διαδικασία στην κ ρίψη.

Η πιθανότητα να φέρουν την ένδειξη «Κ», τα ν νομίσματα, πριν την j ρίψη, οπότε τελειώνει η διαδικασία, είναι:

$$P_3 = \left(1-\frac{1}{2^{j-1}}\right)^{\nu}$$

Επομένως αν P είναι η πιθανότητα να τελειώσει η διαδικασία στην κ ρίψη, τότε

$$P = \left(1-\frac{1}{2^{\kappa}}\right)^{\nu} - \left(1-\frac{1}{2^{\kappa-1}}\right)^{\nu}$$

γ) Για $\nu = 5$ και $\kappa = 2$, η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι $\frac{1}{93} = 0,0108$ και στο (β) είναι $\frac{21}{1024} = 0,206$.

Θέμα 3

i) Στο δελτίο που συμπληρώνουμε 7 αριθμούς η πιθανότητα, να πετύχουμε ένα τουλάχιστον 5, είναι:

$$p_5 = \frac{\binom{7}{5}\binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{882}{\binom{49}{6}}$$

και η πιθανότητα να πετύχουν ένα τουλάχιστον 6 είναι:

$$p_6 = \frac{\binom{7}{6}\binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{7}{\binom{49}{6}}$$

ii) Οι αντίστοιχες πιθανότητες στα 7 δελτία από 6 αριθμούς το καθένα είναι:

$$\pi_5 = 7\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1806}{\binom{49}{6}}$$

$$\pi_6 = 7\frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{7}{\binom{49}{6}}$$

Επομένως η πιθανότητα να πετύχουν ένα τουλάχιστον 5 ή 6 είναι μεγαλύτερη στα 7 δελτία των 6 αριθμών, $\pi_5 + \pi_6 > p_5 + p_6$.

Αν μας ενδιαφέρει το αναμενόμενο κέρδος, τότε οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι, διότι αν τα χρήματα ου εισπράττουμε είναϊ γ όταν πιάσουμε 5 και δ όταν πιάσουμε 6, τότε:

Στο δελτίο με 7 αριθμούς αν πετύχουμε 5, πιάνουμε δύο πεντάρια και όταν πετύχουμε 6, πιάνουμε ένα εξάρι και έξι πεντάρια, το αναμενόμενο κέρδος θα είναι:

$$2\gamma p_5 + (\delta + 6\gamma)p_6 = \frac{1806\gamma + 7\delta}{\binom{49}{6}}$$

Στα 7 δελτία των 6 αριθμών, το αναμενόμενο κέρδος είναι:

$$\gamma\pi_5 + \delta\pi_6 = \frac{1806\gamma + 7\delta}{\binom{49}{6}}$$

Αυτό μας λέει ότι το αναμενόμενο κέρδος εξαρτάται μόνο από το πλήθος των έξι αριθμών που συμπληρώνουμε και δεν εξαρτάται από ποιοι είναι οι 6 αριθμοί που συμπληρώνουμε στο δελτίο.

Στρατής Κουνιάς, Νίκος Παπαδάτος, Βασίλης Παπαθανασίου

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

«Ολυμπιακές Προσεγγίσεις»

του Σωτήρη Λουρίδα

Θα ασχοληθούμε με μία ενότητα υψηλού ενδιαφέροντος για τους ειδικότερους μαθηματικούς διαγωνισμούς, την ενότητα των επίπεδων γεωμετρικών σημειακών μετασχηματισμών ή γεωμετρικών πράξεων: ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ, ΣΤΡΟΦΗΣ, ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ, ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ (θεωρούμε γνωστό τον γεωμετρικό σημειακό μετασχηματισμό ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, από τα βιβλία του Ο.Ε.Δ.Β., όπως επίσης και τη στοιχειώδη θεωρία του διανυσματικού λογισμού). Ουσιαστικά η γνώση των γεωμετρικών πράξεων μας επιτρέπει να κατανοούμε την γεωμετρική συμπεριφορά των επίπεδων σχημάτων που παράγονται από την ***μεταφορά, συμμετρία, στροφή, ομοιοθεσία, αντιστροφή*** *ενός γεωμετρικού σχήματος, χωρίς να εμπλεκόμαστε σε περίπλοκες αποδείξεις.*

ΜΕΡΟΣ Α΄ (ΜΕΤΑΦΟΡΑ, ΣΤΡΟΦΗ)

1. α) Για τη δημιουργία ενός επίπεδου σχήματος αρκεί ένα γεωμετρικό σημείο και ένας σαφής αυστηρός μαθηματικός τρόπος με βάση τον οποίο κινείται στο επίπεδο για να παραχθεί το σχήμα αυτό. Τότε λέμε ότι το σημείο αυτό διαγράφει το επίπεδο σχήμα.

Παρατήρηση:

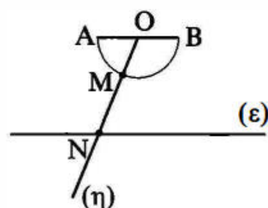
Δύο σημεία ενός επιπέδου που κινούνται στο επίπεδο αυτό με βάση τον ίδιο σαφή αυστηρό μαθηματικό τρόπο διαγράφουν το ίδιο επίπεδο σχήμα ή ίσα επίπεδα σχήματα.

β) Μεταξύ δύο σχημάτων του επιπέδου ορίζεται μία αμφιμονοσήμαντη (ή 1-1) αντιστοιχία (συνάρτηση) αν ορίζεται ένας νόμος ο οποίος σε κάθε σημείο του ενός σχήματος να αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα σημείο του άλλου σχήματος και αντίστροφα (τα σχήματα, τότε, ονομάζονται αντίστοιχα).

Παρατήρηση:

Μεταξύ δύο ίσων σχημάτων ορίζεται, πάντα, μία αμφιμονοσήμαντη ή 1-1 αντιστοιχία. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

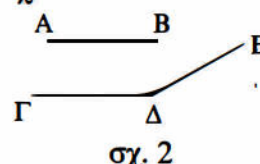
π.χ.



σχ. 1

Αν $AB // (\varepsilon)$ τότε η ημιπεριφέρεια με διάμετρο ΑΒ, εξαιρουμένων των Α, Β, είναι σχήμα αντίστοιχο της ευθείας (ε), αφού αν από το Ο θεωρήσουμε ημιευθείες Οη σε κάθε σημείο τομής Μ της Οη με την ημιπεριφέρεια αντιστοιχεί μόνο ένα σημείο Ν της (ε), (σημείο τομής της Οη με την (ε)) και αντίστροφα (σχ. 1).

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του σχήματος 2 με την ανοικτή τεθλασμένη ΓΔΕ, είναι σχήματα αντίστοιχα.



σχ. 2

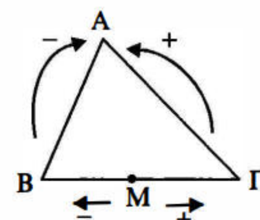
Παρατήρηση:

Θα λέμε ότι δύο αντίστοιχα σχήματα διαγράφονται όμοια αν κατά την διαγραφή καθενός, αντιστοιχούν τα αντίστοιχα σημεία τους κατά την ίδια σειρά.

γ) Θα θεωρούμε ότι η περίμετρος ενός επίπεδου σχήματος:

i) διαγράφεται κατά τη **θετική φορά** αν ένα «κινούμενο» σημείο τη διαγράφει κατά μία έννοια αντίθετη με τους δείκτες του ρολογιού αν αυτοί ορίζουν επίπεδο παράλληλο προς εκείνο του επίπεδου σχήματος,

ii) διαγράφεται κατά την **αρνητική φορά** αν ένα κινούμενο σημείο την διαγράφει κατά μία έννοια αντίθετη της προηγούμενης.



$A \to B \to \Gamma \to A$ Θετική φορά

$A \to \Gamma \to B \to A$ Αρνητική φορά

Σπουδαία παρατήρηση:

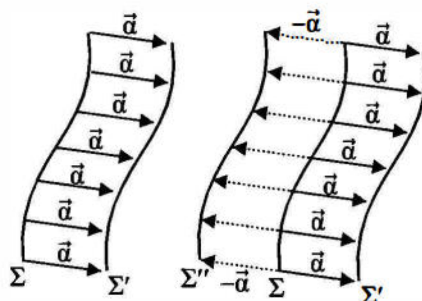
Αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σχήματα ίσα τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε μία αντιστοιχία, μεταξύ των σημείων τους ένα προς ένα. ως εξής:

Έστω $A_1A_2A_3\ldots A_\nu = B_1B_2B_3\ldots B_\nu$ με $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, ..., $A_{\nu-1}A_\nu = B_{\nu-1}B_\nu$, $A_\nu A_1 = B_\nu B_1$ και από τις κορυφές τους A_1, B_1 ξεκινήσουν ταυτόχρονα δύο κινητά με ίδιες ταχύτητες διαγράφοντας, αντίστοιχα, τις περιμέτρους τους, τότε την χρονική στιγμή t_0 θα έχουν διαγράψει ίσες διαδρομές.

2. ΜΕΤΑΦΟΡΑ (ή παράλληλη μετάθεση)

2.1. Έστω σημείο Α και διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Αν θεωρήσουμε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ τότε το Β είναι μεταφορά του Α κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

2.2. Έστω σχήμα Σ και διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Θεωρούμε μεταφορά του Σ το σχήμα Σ΄ του οποίου τα σημεία είναι οι μεταφορές όλων των σημείων του Σ κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (σχ. 1).



σχ. 1

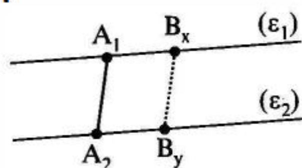
Παρατήρηση:

Αν Σ΄ είναι η μεταφορά του Σ κατά $\vec{\alpha}$, τότε Σ΄΄ είναι η αντίστροφη μεταφορά του Σ αν το Σ΄΄ είναι μεταφορά του Σ κατά $-\vec{\alpha}$ (σχ. 2).

2.3. Η Μεταφορά σχήματος «δίνει» σχήμα ίσο προς αυτό με περίμετρο διαγραφόμενη όμοια προς εκείνη του αρχικού.

2.4. Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε η μία από αυτές είναι μεταφορά της άλλης.

Απόδειξη:



Έστω A_1 τυχαίο σημείο της (ε_1) και A_2 τυχαίο σημείο της (ε_2). Δημιουργείται το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Έστω B_x τυχαίο σημείο της (ε_1). Θεωρούμε B_y τυχαίο σημείο ώστε $\overrightarrow{B_xB_y} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Αυτό σημαίνει ότι το B_y είναι σημείο της (ε_2), αφού $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_xB_y} \Rightarrow A_2B_y \parallel A_1B_x$ και βέβαια (από το γνωστό αξίωμα του Ευκλείδη) από το A_2 διέρχεται μόνο μία παράλληλη στην (ε_1) δηλ. η (ε_2). Το B_y είναι μοναδικό σημείο της (ε_2), αντίστοιχο του B_x με βάση την μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$. Άρα η (ε_2) είναι μεταφορά της (ε_1).

ΟΡΙΣΜΟΣ:

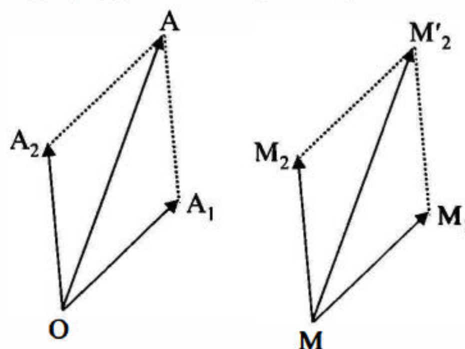
Δύο μεταφορές λέγονται διαδοχικές αν η πρώτη μεταφέρει το σχήμα Σ στο Σ_1 και η δεύτερη το σχήμα Σ_1 στο Σ_2.

Βασικό Θεώρημα:

Δύο διαδοχικές μεταφορές ενός σχήματος κατά διανύσματα διάφορων διευθύνσεων μπορούν να αντικατασταθούν από μία που ορίζεται από διάνυσμα – συνισταμένη των δύο προηγούμενων (διάνυσμα – άθροισμα των προηγούμενων) διανυσμάτων.

Απόδειξη:

Καθιστούμε τα διανύσματα τα ορίζοντα τις διαδοχικές μεταφορές διανυσματικές ακτίνες κοινής αρχής έστω $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$.



Θεωρούμε το τυχαίο σημείο Μ του αρχικού σχήματος. Κατά την πρώτη μεταφορά αντιστοιχίζεται στη θέση M_1 ώστε $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OA_1}$. Κατά την διαδοχικά δεύτερη μεταφορά αντι-

στοιχίζεται στην θέση M_2' ώστε, προφανώς $\overrightarrow{M_1M_2'}=\overrightarrow{OA_2}$. Άρα το Μ, μετά την εκτέλεση των δύο διαδοχικών μεταφορών αντιστοιχίζεται στην θέση M_2'.

Είναι σαφές ότι το $\overrightarrow{MM_2'}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M_2'}$ $\Rightarrow \overrightarrow{MM_2'}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA}$, αφού $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2'}=\overrightarrow{OA_2}$. Άρα, αντί για τις δύο διαδοχικές μεταφορές μπορούμε να εκτελέσουμε την μεταφορά κατά το $\overrightarrow{MM_2'}=\overrightarrow{OA}$ – άθροισμα των $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$.

Εύκολα αποδεικνύονται και τα εξής:

i) Μία μεταφορά ενός σχήματος μπορεί να αντικατασταθεί από δύο άλλες διαδοχικές μεταφορές συγκεκριμένων διευθύνσεων.

ii) Τα παραπάνω ισχύουν και για περισσότερες από δύο διαδοχικές μεταφορές.

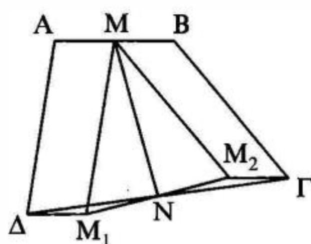
iii) Συνισταμένη μεταφορά διαδοχικών μεταφορών είναι εκείνη που τις αντικαθιστά.

iv) Η τελική θέση ενός σχήματος, που είναι αποτέλεσμα διαδοχικών μεταφορών είναι ίδια, ανεξάρτητα από την σειρά που διαδέχεται η μία την άλλη.

Ασκήσεις στην μεταφορά:

1. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δύο άλλων πλευρών του είναι παράλληλη προς την διχοτόμο των ευθειών ΑΔ, ΒΓ.

Λύση



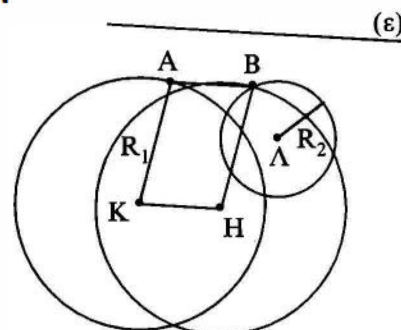
Έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Μεταφέρουμε την πλευρά ΑΔ στην θέση MM_1 και την ΒΓ στην MM_2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $M_1\hat{M}N=N\hat{M}M_2$. Πράγματι $MM_1=MM_2$. Άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ισοσκελές. Επίσης: $\overrightarrow{\Delta M_1}=\overrightarrow{AM}$ (ΜΕΤΑΦΟΡΑ του ΑΜ), $\overrightarrow{M_2\Gamma}=\overrightarrow{MB}$ (Μεταφορά του ΜΒ) με $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{\Delta M_1}=\overrightarrow{M_2\Gamma}$. Άρα το $\Delta M_1\Gamma M_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $M_1N=NM_2$.

Επομένως ΜΝ διάμεσος του τρ. MM_1M_2 με τρ. MM_1M_2 ισοσκελές. Σημαίνει ότι η ΜΝ θα είναι και διχοτόμος της $M_1\hat{M}M_2$.

(ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ, εκδόσεις Ε.Μ.Ε., σελ. 37, πρόβλημα 3)

2. Δίνονται δύο περιφέρειες (K,R_1), (Λ,R_2) και ευθεία ε. Υπάρχουν σημεία Α, Β αντίστοιχα των (K,R_1), (Λ,R_2) ώστε $AB=\lambda$ με $AB\parallel\varepsilon$;

Λύση:



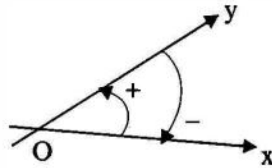
Αφού $AB=\lambda$ και $AB\parallel\varepsilon$ σημαίνει ότι το Β θα βρίσκεται στην μεταφορά της (K,R_1) στην (H,R_1) με $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{AB}$. Αν αυτή τέμνει την (Λ,R_2) στο Β προσδιορίζεται το ΗΒ. Αν $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{HB}$ τότε το ΑΒ προσδιορίζει τα Α, Β, ώστε $AB=\lambda$ με $AB\parallel\varepsilon$.

3. ΣΤΡΟΦΗ!!

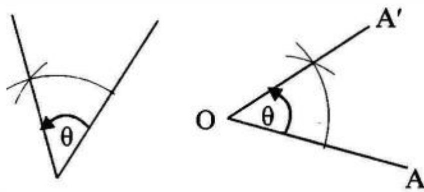
1) Μια γωνία $x\hat{O}y$ είναι ένα επίπεδο σχήμα. Αν θεωρήσουμε ότι αυτή σαρώνεται από την κίνηση της μίας πλευράς της έως την άλλη, τότε ορίζουμε μία φορά (αυτόματα ορίζεται και η αντίθετη φορά) οπότε έχουμε την έννοια της προσανατολισμένης γωνίας.

Συγκεκριμένα: Έστω το επίπεδο στο οποίο ανήκει η $x\hat{O}y$ και ένα επίπεδο παράλληλο σ' αυτό που κινούνται οι δείκτες ενός ρολογιού, θεωρούμε την κίνηση της Οx από την αρχική της θέση Οx έως την τελική της Οy. Αν η κί-

νηση αυτή είναι αντίθετη με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού μιλάμε για θετική φορά (θετικά προσανατολισμένη ευθεία) ενώ αν είναι ίδια με την κίνηση του δεικτών του ρολογιού μιλάμε για αρνητική φορά.



2) Έστω επίπεδο (π) και O είναι σημείο του που θα το θεωρήσω κέντρο της στροφής. Έστω τυχαίο σημείο A του επιπέδου και μία προσανατολισμένη του γωνία θ. Ονομάζω στροφή του A με κέντρο O και κατά γωνία θ (ή απλά με κέντρο O και γωνία θ) την αντιστοίχιση του A στο A′ αν $A\hat{O}A' = \theta$ και ταυτόχρονα $OA = OA'$. Τα σημεία A, A′ ονομάζονται ομόλογα.

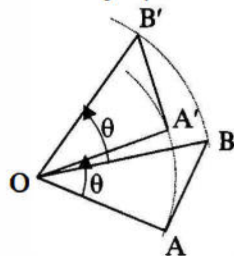


3) Στροφή του σχήματος Σ κέντρου O και γωνίας θ είναι το σημειοσύνολο των στροφών των σημείων του Σ κέντρου O και γωνίας θ. Τότε λέμε ότι το Σ στρέφεται περί το κέντρο O κατά γωνία θ.

4) Δύο σχήματα που το ένα προκύπτει από το άλλο με στροφή περί σημείο, έστω O, είναι ίσα.

Απόδειξη:

Αν το σχήμα Σ′ παράγεται από το σχήμα Σ όταν αυτό στρέφεται περί το O, έστω κατά γωνία θ, τότε θα αποδείξουμε ότι $\Sigma = \Sigma'$.



σχ. 1

Έστω A, B τυχαία σημεία του Σ και A′, B′ τα αντίστοιχα ομόλογά τους.

Έχουμε:

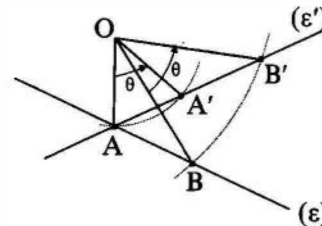
$$A\hat{O}A' = B\hat{O}B',\ A\hat{O}A' = A\hat{O}B + B\hat{O}A',$$

$$B\hat{O}B' = B\hat{O}A' + A'\hat{O}B' \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \Rightarrow$$

τρ. $A\overset{\Delta}{O}B =$ τρ. $A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$ για κάθε ζεύγος σημείων A, B. Άρα $\Sigma = \Sigma'$.

5) Η στροφή ευθείας ως προς κέντρο, έστω O, και γωνία έστω θ είναι ευθεία. Οι ευθείες αυτές σχηματίζουν γωνία ίση με θ.

Πράγματι:



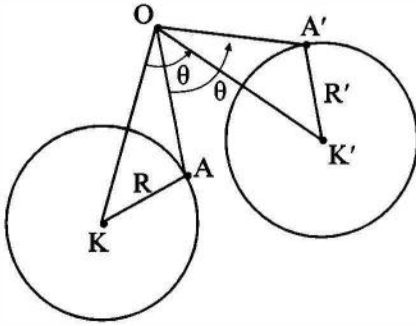
σχ. 2

Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία της ευθείας (ε) έστω A, B και A′, B′ τα ομόλογά τους, ώστε $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = \theta$. Η (ε′) που ορίζεται από αυτά είναι η στροφή της ε περί κέντρο O και γωνία θ, αφού ...

6) Έστω δύο σχήματα Σ, Σ′ που το ένα προκύπτει από το άλλο δια στροφής περί O κατά γωνία θ. Αν A, B δύο τυχαία σημεία του Σ και A′, B′ τα αντίστοιχα – ομόλογά τους του Σ′ και ε η ευθεία που ορίζουν τα A, B και ε′ η ευθεία που ορίζουν τα A′, B′, τότε η γωνία των (ε), (ε′) ταυτίζεται με την γωνία θ της στροφής.

Υπόδειξη: Με βάση την προηγούμενη πρόταση.

7) Η στροφή μιας περιφέρειας (K,R) περί κέντρο O κατά γωνία θ είναι περιφέρεια (K′,R) ίση προς την (K,R) όπου K′ η στροφή του K.



Υπόδειξη: Αν Α τυχαίο σημείο της (Κ,R) και Α΄ το αντίστοιχο-ομόλογό του συγκρίνοντας τα τρίγωνα τρ. $\overset{\Delta}{OKA}$, τρ. $\overset{\Delta}{OK'A'}$ βγαίνουν ίσα $\Rightarrow R = R'$...

8) Εάν θεωρήσουμε ότι δύο ίσα σχήματα διαγράφονται όμοια τότε ένα μπορεί να εφαρμόσει πάνω στο άλλο με μία μεταφορά και μία στροφή αυτού.

Πράγματι:

Έστω Α, Α΄ αντίστοιχα – ομόλογα σημεία των σχημάτων αυτών με μεταφορά του ΑΑ΄ του πρώτου σχήματος, έστω Σ φέρνουμε το Α στο Α΄ και το Σ, έστω στην θέση Σ΄. Με στροφή τώρα του Σ΄ περί το Α΄ φέρνουμε το Σ΄ στο ίσο προς το Σ σχήμα.

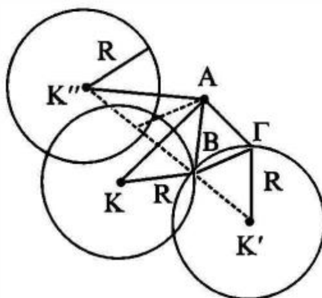
Παρατήρηση:

Κατανοούμε ότι η συμμετρία ως προς σημείο Ο είναι στροφή περί το σημείο Ο κατά γωνία π.

Ασκήσεις στην στροφή

1) Δίνεται περιφέρεια (Κ,R) και σημείο Α εξωτερικό αυτού σημείο. Έστω ότι σημείο Β κινείται στην περιφέρεια αυτή και τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ κινούμενο, ώστε $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{\pi}{3}$. Που κινείται το σημείο Γ;

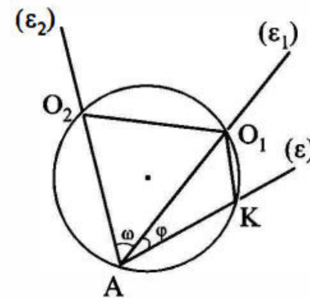
Λύση



Αφού $A\Gamma = AB$, $B\hat{A}\Gamma = \frac{\pi}{3}$ ή $B\hat{A}\Gamma = -\frac{\pi}{3}$ το Γ θα ανήκει στην στροφή με κέντρο το Α και γωνία $\frac{\pi}{3}$ ή $-\frac{\pi}{3}$, αντίστοιχα.

2) Έστω σχήμα κινούμενο σε σταθερό επίπεδο ώστε να διατηρείται αμετάβλητο και κάθε μία από δύο δοθείσες ευθείες του να διέρχεται από ανά ένα σταθερό σημείο. Να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες του κάθε μία από τις οποίες στρέφεται περί σταθερό σημείο.

Απόδειξη:



Έστω ευθείες ε_1, ε_2 που διέρχονται από τα O_1, O_2 αντίστοιχα. Αφού το σχήμα μένει αμετάβλητο η $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = \omega$ διατηρείται σταθερή άρα η τομή του Α θα κινείται σε σταθερό τόξο χορδής O_1O_2 και γωνίας ω. Η τυχαία ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α σχηματίζουσα γωνία φ με την (ε_1) τέμνει την περιφέρεια στο Κ. Επειδή εξακολουθεί να διατηρεί την γωνία φ σταθερή σημαίνει ότι εξακολουθεί να διέρχεται από το Κ. Άρα κάθε ευθεία που περνάει από το Α κατά την στροφή διέρχεται από σταθερό σημείο.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ

Οι υπεύθυνοι της έκδοσης και η συντακτική επιτροπή του Ευκλείδη Β΄ ζητά την συνεργασία των συναδέλφων. Με άρθρα για τις Μόνιμες στήλες και για την ύλη των Τάξεων.